

VIKTOR PINTER

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

KNJIGA PRVA



TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

Prof. ing. Viktor Pinter:

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

KNJIGA PRVA



UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS

Ing. VIKTOR PINTER

redovni profesor Elektrotehničkog fakulteta, Sveučilišta u Zagrebu

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

KNJIGA PRVA



TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

*Odobreno rješenjem Komisije za udžbenike i skripta
Sveučilišta u Zagrebu broj 08-1337/2 — 1975
od 20. listopada 1975.*

*Svome učitelju
profesoru MIROSLAVU PLOHLU
posvěcujem*

PREDGOVOR

Da bi se unaprijedila nastava i studentima olakšao studij preuzeli su nastavnici Elektrotehničkog fakulteta u Zagrebu obavezu da za predmete što ih predaju napišu i udžbenike.

Predmet »Osnove elektrotehnike« predavao se je prije kroz više decenija u 3. i 4. semestru kad su studenti već dobro upoznali metode računanja više matematike. Sada su predavanja tog predmeta prebačena u 1. semestar (kako bi se studenti što prije susreli s elektrotehnikom), pa je trebalo promijeniti program predmeta tako, da ga studenti, iako nisu završili kurs matematike, mogu lakše savladati.

Zato makar postoji poznati udžbenik »Osnovi elektrotehnike« profesora dra Josipa Lončara, kojim su se služile mnoge generacije studenata, smatrao sam svojom dužnošću da studentima dam u ruke još i ovaj udžbenik u kome je materija napisana onako kako se ona iznosi na predavanjima.

U ovoj prvoj knjizi udžbenika za predmet »Osnove elektrotehnike« objašnjeni su osnovni zakoni električnih, strujnih i magnetskih krugova, dok će u drugoj knjizi biti obrađene izmjenične struje.

Sve veća primjena elektrotehnike u svakodnevnom životu, industriji i njena velika pomoć pri najrazličitijim naučnim istraživanjima doveli su do toga, da su se u zadnjim godinama mnoga manja područja elektrotehnike nevjerovatno brzo i upravo eksplozivno razvila u posebne naučne discipline. Zbog toga bi se u skladu s nazivom i svrhom predmeta »Osnove elektrotehnike« morale u tom predmetu obraditi osnove i svih novijih grana elektrotehnike. Taj didaktički problem pokušava se riješiti na više načina.

Moguće je sva ta osnovna znanja obraditi jedinstvenim predmetom, no onda bi taj predmet trebalo proširiti na više semestara. A može se to provesti i tako, da se u nastavnom planu više ne vode »Osnove elektrotehnike« kao poseban predmet već se sva osnovna znanja pojedinih grana elektrotehničke nauke predavaju uvodno u samim tim predmetima.

Pri sastavljanju ovog udžbenika uzeo sam uglavnom ono gradivo, koje sam smatrao neophodno potrebnim da student mora poznavati, kako bi mogao pratiti predavanja u višim semestrima. Tu su mi osim toga bile dragocjene mnoge sugestije g. profesora dra Radenka Wolfa, kao i prijedlozi mojih bližih suradnika magistra Envera Šehovića i magistra Mladena Tkalića, pa se ovime zahvaljujem na njihovim dobrodošlim savjetima.

Kako se svaki dobar studij tehničkih nauka ne može zamisliti bez obilne praktične primjene teoretskih izvoda, bit će za predmet »Osnove elektrotehnike« izdana posebna zbirka zadataka koju sastavljaju moji suradnici.

Na kraju se zahvaljujem i onima koji su mnogo truda uložili da ova knjiga bude i lijepo opremljena, a to je zasluga članova naše izdavačke kuće »Tehnička knjiga« u Zagrebu inž. Zvonka Vistričke, inž. Ivana Uremovića i inž. Tome Struića kao i neumoran rad metera Emanuela Dragojevića iz Grafičkog zavoda Hrvatske u Zagrebu.

V. Pinter

SADRŽAJ

	Strana
1. Uvod. Osnovni pojmovi	13
1.1. Primjena električne energije	13
1.2. Što je elektricitet	14
1.3. Elektriziranje materije	16
1.4. Električna struja	18
1.5. Učinci električne struje	19
2. Strujni krug istosmjerne struje	21
2.1. Jednostruko zatvoreni strujni krug	21
2.2. Jakost električne struje	24
2.3. Mjerenje količine elektriciteta i gustoće struje	28
2.4. Trenutna vrijednost jakosti struje	29
2.5. Smjer električne struje	29
2.6. Električki napon	31
2.7. Unutarnji ili proizvedeni napon, elektromotorna sila	32
3. Osnovni zakon električkog strujanja	34
3.1. Ohmov zakon	34
3.2. Električki otpor	36
3.3. Utjecaj temperature na električki otpor	39
3.4. Mjerenje temperature zagrijanog namota	42
3.5. Voltamperske karakteristike	43
3.6. Prazni hod i kratki spoj izvora	46
3.7. Nazivne veličine u elektrotehnici	48
3.8. Pad ili potrošak napona i električki protunapon	48
4. Sastavljeni strujni krugovi istosmjerne struje	52
4.1. Serijski spoj otpora. Upliv otpora dovoda	52
4.2. Vanjska karakteristika realnih naponskih izvora	56
4.3. Paralelni spoj otpora	59
4.4. Električka vodljivost	61
4.5. Prvi Kirchhoffov zakon	62
4.6. Kombinirano vezani otpori	66
4.7. Serijski spoj više izvora	67
4.8. Serijski protuspoj i kompenzacija napona	69
4.9. Paralelno vezani izvori	71
4.10. Potencijal kao pomoćna računska veličina	73
4.11. Potencijalni dijagram	75
4.12. Ohmov zakon za elemenat strujnog kruga	76
4.13. Drugi Kirchhoffov zakon	78

	Strana
5. Jouleov zakon, električka energija i snaga	80
5.1. Jouleova toplina	80
5.2. Zagrijavanje vodiča električnom strujom	82
5.3. Energija i rad električne struje	84
5.4. Smjer toka energije	86
5.5. Električka snaga istosmjerne struje	88
5.6. Korisnost ili koeficijent iskoristivosti	90
5.7. Predznak snage. Nazivna snaga trošila	91
5.8. Prilagođivanje	93
5.9. Mjerenje snage i rada električne struje	95
5.10. Snaga i energija promjenljive struje	97
6. Elektroliza i kemijski izvori struje	98
6.1. Elektrolitske reakcije	98
6.2. Faradayevi zakoni elektrolize	99
6.3. Disocijacija	101
6.4. Napon polarizacije i potrošak energije pri elektrolizi	102
6.5. Primarni elementi	103
6.6. Akumulatori	105
7. Neke primjene osnovnih zakona električkog strujanja	109
7.1. Proširenje mjernog područja voltmetra i ampermetra	109
7.2. Omometar	111
7.3. Wheatstoneov most	112
7.4. Potencijometar	114
7.5. Kompenzator	117
8. Osnove rješavanja linearnih mreža istosmjerne struje	118
8.1. Uvodna razmatranja i osnovne definicije	118
8.2. Direktna primjena Kirchhoffovih zakona	119
8.3. Metoda napona čvorova	122
8.4. Metoda konturnih struja	125
8.5. Metoda superpozicije	130
8.6. Teorem uzajamnosti	131
8.7. Naponski i strujni izvori	132
8.8. Nadomjesni izvor više izvora	134
8.9. Theveninov teorem	139
8.10. Nortonov teorem	140
8.11. Millmanov teorem	141
8.12. Transformacija zvijezde i trokuta	143
9. Nelinearni elementi u istosmjernim strujnim krugovima	147
9.1. Voltamperske karakteristike	147
9.2. Grafičke metode za razdiobu struje i napona	148
10. Elektrostatika	152
10.1. Električki kapacitet i kondenzatori	152
10.1.1. Priključak otvorenog voda na izvor istosmjernog napona	152
10.1.2. Pločasti kondenzator	154
10.1.3. Serijski spoj kondenzatora	155
10.1.4. Paralelni spoj kondenzatora	157
10.1.5. Elektrostatske mreže	158

10.2. Homogeno električko polje	161
10.2.1. Električko polje pločastog kondenzatora	161
10.2.2. Jakost električkog polja	162
10.2.3. Silnice električkog polja	164
10.2.4. Sile električkog polja na električke naboje, električka influencija	165
10.2.5. Vektor gustoće električkog pomaka	166
10.2.6. Tok vektora $\mathbf{D}$	169
10.2.7. Električki potencijal	169
10.2.8. Napon kao razlika električkih potencijala	171
10.2.9. Rad pri gibanju električkog naboja u homogenom električkom polju	172
10.2.10. Potencijal i jakost elektrostatskog polja	174
10.3. Materija u električkom polju	175
10.3.1. Uvodna razmatranja	175
10.3.2. Električki dipoli i moment dipola	176
10.3.3. Električka polarizacija izolatora	177
10.3.4. Slobodni i vezani električki naboji	177
10.3.5. Susceptibilitet i dielektrička konstanta izolatora	178
10.3.6. Maxwellov postulat	181
10.3.7. Nabijeni kondenzator odvojen od izvora	181
10.3.8. Višeslojna izolacija kondenzatora	182
10.4. Nehomogeno električko polje	185
10.4.1. Osnovna razmatranja	185
10.4.2. Kuglasti kondenzator	186
10.4.3. Kapacitet osamljene kugle	187
10.4.4. Jakost električkog polja kuglastog kondenzatora	188
10.4.5. Priestleyev (Coulombov) zakon i princip djelovanja na blizini	190
10.4.6. Primjena zakona superpozicije	191
10.4.7. Gaussov teorem	195
10.4.8. Kapacitet cilindričnog kondenzatora	197
10.4.9. Tok vektora $\mathbf{D}$ u nehomogenom polju	199
10.4.10. Potencijal u nehomogenom polju	202
10.4.11. Električki potencijal nabijenog pravca	206
10.5. Energija elektrostatskog polja	207
10.5.1. Priključak kondenzatora na istosmjerni napon	207
10.5.2. Energija nabijenog kondenzatora	211
10.5.3. Sile u električkom polju pločastog kondenzatora	213
10.5.4. Odnos električke i toplinske energije pri nabijanju kondenzatora	216
10.6. Struja dielektričkog pomaka	217
11. Magnetska polja	219
11.1. Magnetske veličine	219
11.1.1. Permanentni i elektromagneti	219
11.1.2. Magnetske silnice	221
11.1.3. Magnetski tok i gustoća silnica	222
11.1.4. Jedinice za mjerenje toka i gustoće	224
11.1.5. Slika magnetskog polja, pravilo desnog vijka	226
11.2. Magnetski krug	229
11.2.1. Magnetsko polje torusnog svitka	229
11.2.2. Magnetska permeabilnost	230

	Strana
11.2.3. Magnetska uzbuda	231
11.2.4. Zakon protjecanja	232
11.3. Biot-Savartov zakon	238
11.3.1. Primjena Biot-Savartova zakona na kružni zavoj protjecan strujom	239
11.3.2. Helmholtzovi svici	241
11.3.3. Magnetsko polje svitka	242
11.4. Elektromagnetska indukcija	243
11.4.1. Lenzov zakon	243
11.4.2. Napon pomicanja	245
11.4.3. Samoindukcija	248
11.4.4. Proračun koeficijenta L za neke primjere iz prakse	250
11.4.5. Induktivitet jednoslojnog svitka	255
11.4.6. Međusobna indukcija	256
11.4.7. Priključak induktivnog svitka na izvor konstantnog napona	260
11.4.8. Prekid struje u induktivnom svitku	262
11.4.9. Rezultantni induktivitet više svitaka	264
11.5. Sile u magnetskom polju	266
11.5.1. Ravni vodič protjecan strujom u magnetskom polju	266
11.5.2. Ampereov zakon u elementarnom obliku	267
11.5.3. Elektrodinamičko djelovanje dviju struja. Definicija jedinice za mjerenje jakosti struje	269
11.5.4. Sila magnetskog polja na električke naboje u gibanju	271
11.5.5. Hallov napon	273
11.5.6. Coulombov zakon	275
11.5.7. Magnetski moment strujne konture	276
11.6. Materija u magnetskom polju	278
11.6.1. Apsolutna i relativna permeabilnost	278
11.6.2. Ampereova teorija feromagnetizma	279
11.6.3. Krivulja magnetiziranja željeza	281
11.6.4. Magnetska histereza	283
11.6.5. Magnetski krug, serijski spoj	285
11.6.6. Paralelni spoj magnetskih otpora	290
11.6.7. Zakon loma magnetskih silnica	291
11.7. Energija magnetskog polja	293
11.7.1. Priključak induktivnog svitka na istosmjerni napon	293
11.7.2. Energija sustava svitaka	296
11.7.3. Prikaz promjene energije u (p, t) i (B, H) dijagramu	298
11.7.4. Privlačna sila magneta	300
11.8. Permanentni magneti	301
Kazalo	307

1.

UVOD. OSNOVNI POJMOVI

1.1.

PRIMJENA ELEKTRIČKE ENERGIJE

Čovjek je oduvijek nastojao da sebi u radu nađe pomagača. Da se ne umara trošeći vlastitu radnu sposobnost ili energiju, čovjek je već u pradavnim vremenima iskorišćivao za rad životinje. Tokom vremena pronašao je, međutim, i načine kako da iskoristi i ostale izvore energije na koje je nailazio u prirodi. Tako su dugo vremena čovjeku jedini pomagači u radu bili energije vodopada i vjetra.

Doba moderne industrijalizacije počinje tek u 19. stoljeću, nakon pronalaska parnog stroja, a na prijelazu iz 19. u 20. stoljeće sve više se za najrazličitije radove iskorišćuje električka energija.

Razlozi zbog kojih se baš električka energija pokazala naročito prikladna za rad u gotovo svim granama ljudskog djelovanja jesu slijedeći:

1. Električka energija (posredstvom električne struje) može se u aparatima koje nazivamo trošilima iskoristiti za obavljanje najrazličitijeg rada. Naziv trošila dobili su takvi aparati zbog toga što se u njima vrši rad na račun potrošene električke energije.

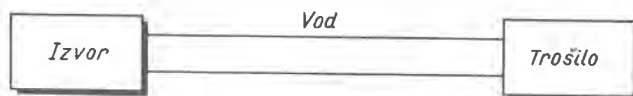
2. Električka energija potrebna za pogon električkih trošila može se dobiti u dovoljnim količinama u takozvanim električkim izvorima. To su naprave u kojima se razne druge vrste energija pretvaraju u električku. Tako se, na primjer, mehanička energija turbine u električkim generatorima pretvara u električku. U baterijama i akumulatorima iskorišćuje se kemijska energija za dobivanje električke energije.

3. Električka energija može se lako od mjesta proizvodnje prenijeti i na velike udaljenosti do mjesta potrošnje. Za to su u najjednostavnijem slučaju potrebne samo dvije — relativno tanke — žice, koje se zajednički nazivaju električki vod. Takav jednostavan, a uz to ekonomičan prijenos električke energije, omogućuje elektrifikaciju i onih mjesta, koja sama nemaju prirodnih izvora energije, koji bi se mogli iskoristiti za proizvod električke energije.

Iz ovih se razmatranja vidi da se u svakom uređaju gdje se iskorišćuje električka energija za neki rad, vrši zapravo dvostruka transformacija energije. Najprije se u izvoru energija koja nam stoji na raspolaganju pretvori u električku, a ta se onda prenosi u trošilo, gdje će obavljati rad za koji je trošilo konstruirano.

Moguće je, dakle, posve općenito prikazati najjednostavniji uređaj u kojem se iskorišćuje električka energija na način predložen na slici 1.1. Tu su shematski nacrtana tri glavna dijela cijelog uređaja: izvor, vod i trošilo.

Slika se, međutim, ne odnosi samo na najjednostavniji elektroenergetski uređaj, već nam može prikazati i najjednostavniji električki telekomunikacioni uređaj. Iz električkog izvora mogu se, naime, posredstvom voda slati izvjesni impulsi električne struje, koje će primati za to udešen aparat i registrirati ih kao dogovorenu informaciju.



Sl. 1.1. Elementarni prikaz uređaja gdje se iskorišćuje električna energija za neki rad.

Prema tome zaključujemo da će se elektroenergetski zadaci, kao i zadaci elek-
trokomunikacionih uređaja, u biti svoditi na rješavanje istih elektrotehničkih
problema.

Naziv elektrotehnika odnosi se općenito na ono područje ljudskog djelovanja,
koje se bavi iskorišćivanjem električkih pojava. To je međutim i naziv za onu op-
širnu granu nauke koja ispituje i objašnjava kako funkcioniraju električki uređaji
i naprave, te kako će se oni ispravno konstruirati.

U predmetu »Osnove elektrotehnike« objašnjavaju se osnovni zakoni nauke
o elektricitetu, dakako, uvijek s obzirom na primjenu tih zakona u tehničkoj praksi.
Zato je taj predmet jednako važan za sve grane elektrotehnike.

Da bismo mogli električke uređaje ispravno konstruirati i u pogonu ih pra-
vilno iskorišćivati potrebna nam je jasna slika o fizikalnim zbivanjima u tim ure-
đajima. Zato je nužno poznavanje osnovnih fizikalnih zakona nauke o elektricitetu.

Tu se, dakle, na prvom koraku susrećemo s pitanjem: što je zapravo elektri-
citet (ili elektrika). Odgovor na to pitanje potreban nam je zbog toga što je baš
elektricitet predmet svih daljnjih razmatranja.

1.2.

ŠTO JE ELEKTRICITET

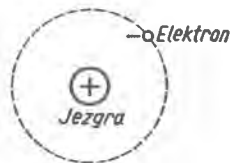
Makar je malo vjerojatno da će čovjek moći potpuno shvatiti bit elektriciteta,
ipak mu je na osnovi najnovijih naučnih istraživanja omogućeno da stvori neku
predodžbu o tome što je elektricitet. Pokazalo se, naime, da možemo i elektricitet,
uz ostale elementarne čestice, smatrati djelićima od kojih je sastavljena sva materija.

Prema jednostavnom Bohrovu modelu atoma, složeni su atomi svakog kemij-
skog elementa od centralne jezgre, oko koje po izvjesnim putanjama velikom brzini
kruže, kao mali planeti, sitne električke čestice: elektroni.

Najjednostavniji je po svom sastavu atom najlakšeg kemijskog elementa vo-
dika, slika 1.2. Tu oko jezgre kruži samo jedan elektron.

Makar da su dimenzije, a i mase elektrona, veoma male, ipak treba i ovdje pretpostaviti da bi elektron uslijed velike brzine vrtnje zbog centrifugalne sile odletio od svog centra, od jezgre, da ga uz jezgru ne drži neka privlačna sila. Budući da je atom zajednička cjelina jezgre i elektrona — ova privlačna sila svakako postoji.

Tu se odmah susrećemo s električkim pojavama. Pokazalo se, naime, da je ta sila što drži elektron u zajednici s jezgrom: električna privlačna sila. Jezgra je pozitivno električna dok je elektron negativno električan, a poznato je da se u prirodi pozitivno i negativno privlače.



Atomi ostalih, težih kemijskih elemenata, sastavljeni su slično kao atom vodika, samo je njihova jezgra veća i oko nje kruži više elektrona.

Sl. 1.2. Bohrov model atoma vodika.

Na prvi pogled moglo bi se činiti čudnovatim da se taj električki sastav materije ne opaža iako su sva materija, pa i čovjek, sastavljeni od tako električki složenih atoma.

Razlog je tome taj što je u normalnom stanju svaki atom u svojoj jezgri upravo toliko pozitivno električan, koliko svi elektroni zajedno posjeduju negativnog elektriciteta. Zbog toga se djelovanja prema van pozitivnog elektriciteta jezgre i negativnog elektriciteta elektrona poništavaju, pa se kaže da je atom u normalnom stanju električki neutralan.

O sastavu atoma spomenimo ovdje još samo toliko koliko je potrebno da se lakše razumiju mnoge električke pojave vezane uz samu materiju električkih uređaja.

Sva masa atoma sadržana je gotovo potpuno u njegovoj jezgri. Jezgra atoma vodika je samo jedna čestica, nazvana proton. Masa protona je $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Osim toga, proton posjeduje i količinu pozitivnog elektriciteta, koja je gotovo točno jednaka količini negativnog elektriciteta elektrona. Masa pak elektrona je samo $9,11 \cdot 10^{-31}$, dakle tek 1840-ti dio mase protona. Na slici 1.2, gdje je prikazan atom vodika, jezgra je dakle jedan električki pozitivni proton, oko kojega kruži jedan negativni elektron.

Atomi kemijskih elemenata koji su teži od vodika imaju u svojoj jezgri osim protona (koji tvore i masu i pozitivni električki naboj) još i neutrone. To su elementarne čestice koje nemaju električkog naboja, dakle su električki neutralne, ali posjeduju masu gotovo jednaku masi protona: $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Jedino atom običnog vodika ima jezgru bez neutrona, dakle samo jedan proton, a u vanjskom omotaču jedan elektron. Ipak se u mnogo manjoj količini u prirodi nailazi i na atome vodika koji u jezgri, osim jednog protona, imaju još i jedan neutron. Za razliku od običnog vodika, takav se vodik naziva deuterij ili teški vodik. Dakako da i on ima u svom omotaču samo jedan elektron.

Postoji dapače i tzv. tricij, vodik koji ima u jezgri tri elementarne čestice: uz jedan proton još dva neutrona, ali u vanjskom omotaču opet samo jedan elektron.

Budući da u Mendeljejevljevom periodičkom sustavu elemenata dolaze u tablici pojedini kemijski elementi na određena mjesta, prema tome koliko imaju

u jezgri protona, sve ove tri vrste vodika, obični ili laki, deuterij ili teški, a i tricij, nalazit će se na istom mjestu, pa ih zato nazivamo izotopima*.

Da bi se u kemijskim simbolima pojedinih elemenata i njihovih izotopa vidljivo označilo koliko imaju u sebi elementarnih čestica, pišu se brojevi protona (a to je i broj elektrona) lijevo dolje, dok se broj svih elementarnih čestica jezgre, tj. nukleona, a to su protoni i neutroni zajedno, naznačuju desno gore.

Obični vodik ima, dakle, oznaku ${}^1_1\text{H}$, dok bi deuterij imao oznaku ${}^2_1\text{H}$, a tricij ${}^3_1\text{H}$, no obično ih označuju sa D^2 i T^3 .

Slijedeći kemijski element Mendeljejevljevog sustava je helij, koji ima u jezgri dva protona i dva neutrona, a u omotaču dva elektrona. Njegov je simbol ${}^4_2\text{He}$. Pozitivna jezgra ovog elementa je poznata α -čestica radioaktivnog zračenja. Osim toga postoji i rijetki izotop helija ${}^3_2\text{He}$.

Sastav sve težih elemenata često je veoma kompliciran, jer mnogi imaju i po nekoliko različitih izotopa.

Makar da su izotopi pojedinih kemijskih elemenata po broju neutrona, dakle masom, različiti, oni su kemijski gotovo potpuno jednaki. Tako i teška voda, koja je sastavljena od deuterija i kisika, reagira kemijski kao i obična voda. Prema tome zaključujemo da su kemijska svojstva elemenata ovisna o količini protona, odnosno elektrona, što ih posjeduje atom. Tu osobito važnu ulogu imaju elektroni koji se nalaze na periferiji — na vanjskoj elektronskoj ljusci. Ovi elektroni nazivaju se valentni elektroni.

Iz nauke o sastavu materije poznato je da elektroni oko atomske jezgre kruže u točno određenim orbitima, koje se zovu ljuske. Te se ljuske, idući od jezgre prema periferiji atoma, označuju slovima: K, L, M, N --.

Svaka ljuska može imati samo određenu maksimalnu količinu elektrona, osim vanjske, koja dakako može, ali ne mora, biti potpuno popunjena elektronima.

Tako je broj elektrona popunjenih ljuska: K...2, L...8, M...16, N...32 --.

1.3.

ELEKTRIZIRANJE MATERIJE

Iako su atomi, pa i sva materija koju normalno susrećemo, neutralni, ipak je moguće dobiti električki nabijene atome, a s time u vezi i električki nabijena tijela. To se postizava tako da se na bilo koji način poremeti električka ravnoteža atoma. Ako se, naime, iz atomske zajednice odvoji neki elektron, atom kao cjelina neće biti više neutralan, jer prema van djeluje sada onaj suvišak pozitivnog elektriciteta jezgre koji više nije potpuno kompenziran negativnim elektricitetom elektrona. Takav se, dakle, atom u cjelini prema van vlada kao električki pozitivan.

Ako se pak odvojeni elektron pridruži nekom drugom neutralnom atomu postat će taj električki negativan, jer mu je pridobili elektron suvišan.

* Grčki: isos = isti i topos = mjesto.

Tako nije teško shvatiti da će i skupine atoma, a to su molekule pa i veće čestice materije i predmeti, postati električki pozitivni ili negativni prema tome da li su nekim atomima materije elektroni oduzeti ili dodani.

U mnogim daljnjim razmatranjima električkih pojava vidjet ćemo da osobito važnu ulogu imaju onakvi atomi (ili izvjesne grupe atoma) koji se prema van manifestiraju bilo kao pozitivno električki ili kao negativno električki. To su, dakle,

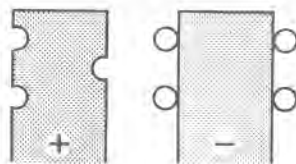


Sl. 1.3. Simbolički prikaz pozitivnog i negativnog iona.

materijalne čestice za koje kažemo da nose na sebi neki pozitivni ili negativni električki naboj, a nazivaju se ioni. Da bismo ih razlikovali, zovemo pozitivno električke ione kationima, a negativne anionima. Proces dobivanja pozitivnih i negativnih iona premještanjem elektrona s neutralnog atoma zove se ionizacija.

Na slici 1.3. simbolički je prikazano kako zamišljamo jedan pozitivni ion, a kako jedan negativni. Slično tome nastaju i električki nabijena tijela. Može se reći da će tijelo *A* biti pozitivno električno ako ima manjak elektrona, dok će tijelo *B* biti negativno ako ima suvišak elektrona, slika 1.4.

Odvajanje elektrona od neutralne materije može se izvršiti na različite načine. Za elektrotehniku je osobito interesantno kada se pri tome svi od jednog tijela odvojeni elektroni predaju nekom drugom tijelu. Tada je jedno tijelo upravo toliko pozitivno električno, koliko je drugo tijelo negativno električno.



Sl. 1.4. Pozitivno i negativno električki nabijeno tijelo.

Kao primjer takvog elektriziranja materije mogu nam poslužiti iz fizike poznati pokusi. Ako se stakleni štap tare kožom koja je namazana amalgamom, postaje štap električki pozitivan, jer se od stakla odvajaju elektroni koji se predaju koži, pa će tako koža postati negativno električna. Štap od smole trenjem o vunenu krpu biva električki negativan, a vuna pozitivno električna.

Odvajanje elektrona od atomske zajednice može se izvršiti i na drugi način. Moguće je da se elektroni s jednog mjesta na jednom tijelu premjeste na koje drugo mjesto tog istog tijela. U tom slučaju bit će jedan kraj električki pozitivan, a drugi negativan.

Razmotrimo još energetske odnose pri nastajanju električki nabijenih tijela.

Da bi se elektron odijelio od svoje prvotne atomske zajednice i prenio atomu kojeg drugog tijela, potrebno je da se na tom putu savlada privlačna sila kojom

jezgra atoma privlači taj elektron. Iz fizike je, međutim, poznato da gibanje na nekom putu, uz savladavanje sile koja se protivi gibanju, predstavlja rad, a taj se ne može obaviti bez utroška energije.

Tako se, dakle, i električki nabijena tijela mogu dobiti samo potroškom koje druge vanjske energije.

Ova količina potrošene energije nije, međutim, izgubljena — ona nije nestala. Prema Mayerovu zakonu o održanju energije, njen ekvivalent je sadržan u kombinaciji tih električki nabijenih tijela. To znači da se ista količina energije ili rada može dobiti natrag ako se odvojeni elektroni vrata na ispražnjena mjesta.

Zbog toga kažemo da pozitivno i negativno nabijeno tijelo sadrži izvjesnu potencijalnu energiju, koju možemo nazivati električkom energijom.

1.4.

ELEKTRIČNA STRUJA

Uz pretpostavku da su pozitivno i negativno tijelo međusobno odijeljeni zrakom, neće elektroni u normalnim prilikama moći prijeći s negativnog tijela na pozitivno, jer im zrak ne dopušta gibanje.

Ako pak između oba tijela postoji za elektrone neki vodljiv put, omogućit će se elektronima da s mjesta gdje su u suvišku prijeđu na mjesta gdje postoji manjak elektrona, a to gibanje nazivamo električnom strujom.

Predmete koji omogućuju prolaz električne struje nazivamo električkim vodičima, dok materije koje ne provode električnu struju zovemo izolatorima.

Ako je vodič metalna žica, bit će električna struja ostvarena gibanjem samih elektrona. Tokom slijedećih razmatranja bit će, međutim, pojam električne struje još proširen u tom smislu da ćemo električnom strujom općenito smatrati svako gibanje elektriciteta bilo da je to, kao u metalima, gibanje samih elektrona, ili pak gibanje najsitnijih čestica materije, koje nose na sebi električke naboje, a to su prije spomenuti ioni, dakle električki nabijeni atomi. Gibanje iona predstavlja električnu struju u tekućinama i plinovima. No i veće materijalne čestice — skupine atoma i molekule — koje su električki nabijene pa i još veće čestice, npr. električki nabijena prašina, u gibanju su električna struja.

Za elektrotehniku je osobito važno da su uz pojavu električne struje vezani izvjesni učinci, koji nisu ništa drugo do pretvaranje one već spomenute potencijalne — električne energije — u neke druge oblike energije ili u neki rad. To onda praktička elektrotehnika iskorišćuje u spomenutim električkim aparatima: trošilima.

Budući da su trošila izrađena tako da nam obavljaju najrazličitije poslove, moglo bi se u prvi mah pomisliti da ima veoma mnogo različitih učinaka električne struje. Ta ona grije peći, tjera motore, njome se služimo za rasvjetu, za rad radio-aparata, televizije, služi nam u medicini itd. No ipak se točnijim ispitivanjem ustanovilo da postoje tri osnovna učinka električne struje i to: toplinski, kemijski i magnetski*). A sve ono šarenilo naših električkih potrošnih aparata koji nam

* Kao četvrti osnovni učinak električne struje moglo bi se ubrojiti i svjetlosni učinak što nastaje u svijetlećim cijevima.

obavljaju poslove samo je duhovito iskorišćivanje tih osnovnih učinaka električne struje ili kombinirano djelovanje tih učinaka, uz iskorišćivanje još mnogih drugih raznih fizikalnih učinaka.

Pogledajmo najprije samo kvalitativno te osnovne učinke električne struje, da bismo ih upoznali.

1.5.

UČINCI ELEKTRIČNE STRUJE

Toplinskim učinkom električne struje nazivamo pojavu zagrijavanja vodiča kroz koji prolazi električna struja. To grijanje uzrokovano je time što se čestice elektriciteta koje pri strujanju prolaze kroz vodič sudaraju s česticama materije vodiča, pa tim česticama predaju svoju energiju gibanja i tako povećavaju termičku energiju materije. Možemo dakle zamisliti da električna struja na svom prolazu kroz vodič nailazi na otpor, pri čemu se energija električnog strujanja pretvara u toplinu. Dobivanje ove topline vezano je, dakle, uz pojavu električkog otpora u vodiču. Ako struja na svom prolazu kroz vodič ne bi naišla na otpor, ne bi se stvarala toplina. Odavde se vidi, da bi se taj prvi osnovni učinak — toplinski učinak — mogao izbjeći kad bi se za prolaz struje odabrao idealno dobar vodič bez otpora. No kako u normalnim prilikama svaki, pa i najbolji vodič, pruža električnoj struji ipak neki otpor, stvarat će se u normalnim prilikama uvijek pri prolazu struje kroz vodiče stanovita količina topline.

Drugi osnovni učinak jest kemijski. To je iz fizike poznata pojava da se neki vodiči pri prolazu električne struje kemijski rastvaraju na sastavne dijelove. Ova pojava se zove elektroliza, što zapravo i znači rastvaranje električnom strujom. Tvari koje su izvrnute elektrolizi zovemo elektrolitima ili vodičima druge vrste za razliku od vodiča prve vrste, koji se kemijski ne mijenjaju kad kroz njih prolazi električna struja. Vodiči prve vrste su kovine i slitine, dok su vodiči druge vrste, odnosno elektroliti: vodene otopine ili taline soli, kiselina i lužina. Elektroliza se iskorišćuje za dobivanje različitih kemijskih supstancija iz kemijskih spojeva, pa se tako mogu iz soli izlučiti metali. Na primjer, iz otopine srebrnog nitrata, AgNO_3 , dobiva se elektrolizom čisto srebro. Budući da je ovaj drugi osnovni učinak električne struje vezan uz prolaz električne struje kroz određene materije, a to su vodiči druge vrste, i on se može izbjeći ako se za tok struje odabere materija koja se ne rastvara, dakle vodič prve vrste.

Treći osnovni učinak električne struje jest magnetski učinak. Očituje se u tome da se pri prolazu električne struje kroz vodič bilo koje vrste uvijek stvaraju oko vodiča (a i u njemu samome) magnetske sile, koje se mogu konstatirati po otklonu magnetske igle iz njenog normalnog položaja sjever-jug. Pri tome se opaža da je učinak magnetskih sila najjači u neposrednoj blizini vodiča, dok s udaljenošću slabi. No on postoji — iako vrlo oslabljen — i na velikim udaljenostima, a teoretski je jednak nuli tek na beskonačnoj udaljenosti od vodiča kroz koji protječe struja. Ipak se u praksi redovno ograničujemo samo na onaj dio prostora gdje je taj učinak toliki da ga možemo praktički iskoristiti. Taj prostor zovemo magnetskim poljem, pa kažemo da je treći osnovni učinak električne struje: stvaranje magnetskog polja. Pri tome valja istaknuti kao naročitu osobitost da je magnetski učinak nedjeljiv

pratilac električne struje. Može se dapače reći da se prvi i drugi osnovni učinak električne struje mogu nekako izbjeći odgovarajućim odabiranjem vodiča, dok se magnetski ne može normalno uopće izbjeći. Možemo ga jedino poništiti još jednom suprotnom strujom, jer je smjer magnetske sile ovisan o smjeru struje,

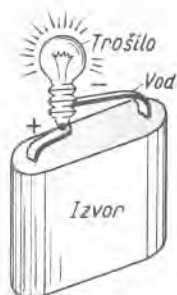
Nakon ovih općenitih informacija o električnoj struji i njezinim učincima, potrebno je sada pobliže upoznati zakone električnog strujanja.

2. STRUJNI KRUG ISTOSMJERNE STRUJE

2.1. JEDNOSTRUKO ZATVORENI STRUJNI KRUG

Da bismo dobili detaljniji uvid u fizikalna zbivanja u našim električkim uređajima i da dodemo do kvantitativnih odnosa i zakona kojima podliježe strujanje elektriciteta u tim uređajima, potrebno je na njima izvršiti niz pokusa i mjerenja. Sva, naime, dostignuća današnje nauke osnivaju se na ispitivanjima raznih problema, pa možemo reći da je temelj i izvor svakog znanja — pokus.

Tako ćemo i ovdje uzeti jedan, bili kakav, uređaj prema slici 1.1 i na njemu vršiti sva moguća ispitivanja. Da suviše ne zakompliciramo neka taj uređaj bude što jednostavniji, na primjer, svima poznata električna džepna svjetiljka. Iz te svjetiljke uzet ćemo, međutim, samo ono što je najbitnije da cio uređaj funkcionira, a to su baterija kao električki izvor i žaruljica kao trošilo. Neki posebni vod nije potreban, jer nam mjedene trake koje izlaze iz baterije služe kao spojni vod od izvora do trošila. A kao indikator za električnu struju poslužit će nam ovdje samo trošilo svojim funkcioniranjem, pa možemo reći: da struja doista teče iz izvora kroz trošilo znamo po tome, što vidimo da žaruljica svijetli.



Sl. 2.1. Na izvor priključena žaruljica svijetli.



Sl. 2.2. Zrak kao izolator ne provodi električnu struju i žaruljica ne svijetli.

I s ovim jednostavnim električkim uređajem prikazanim na slici 2.1 mogu se otkriti mnogi važni zakoni električne struje. U prvom redu može se doznati uz koje uvjete uopće dolazi u tom uređaju do električne struje. Lako se možemo uvjeriti da je pri tome potrebno da jedan kraj trošila bude dobro prislonjen na jedan pol izvora, a drugi kraj trošila na drugi pol izvora. Pokusom možemo također

potvrditi prije navedeno pravilo da struja prolazi samo kroz tzv. dobro vodljive tvari, kao što su npr. metali, a da kroz papir, staklo, zrak itd. ne prolazi. To se vidi ako između baterije i žaruljice na dodirnom mjestu stavimo komad papira ili stakla, ili ako odmaknemo žaruljicu od baterije da između njih ostane zrak. Žaruljica onda ne svijetli, dakle struja ne teče, slika 2.2. Zaključujemo da veza između izvora i trošila mora na cijeloj duljini biti dobro vodljiva ako želimo da struja teče i da nigdje ne smije biti prekida nekim slojem izolacije.

Vrlo lako se možemo uvjeriti da potpuno isti zahtjev kao za vod mora biti ispunjen i za ostale dijelove našeg električkog uređaja, ako želimo da u njemu teče struja.

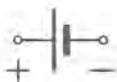
I trošilo mora, naime, biti na cijeloj dužini, od jednog kraja do drugoga, dobro vodljivo. Ako je žarna žica u žaruljici makar samo na jednom mjestu prekinuta ne može električna struja prolaziti i žarulja ne svijetli, ma da je sve ostalo u redu; kažemo da je žarulja pregorjela. Ni električki rešo ne grije ako je žarna žica spirale pretrgnuta. U ovom posljednjem primjeru možemo pogrešku sami popraviti: treba samo spiralnu žicu rešoa na prekinutom mjestu čvrsto sastaviti.

Tako isto treba da je i izvor struje u svojoj unutrašnjosti od jednog kraja do drugog, od jednog pola do drugog, električki dobro vodljiv. Ako bi, naime, unutar izvora makar samo na jednom mjestu bio prekid, ne bismo dobili električnu struju.

Iz ova tri opažanja možemo povući važni zaključak: električna struja teče uvijek u zatvorenim, električki dobro vodljivim linijama. Takva jedna zatvorena linija sastavljena od pojedinih električkih dijelova, od izvora, voda i trošila, zove se jednostavno zatvoren električki strujni krug.

Na prijašnjim slikama prikazani su pojedini dijelovi od kojih je sastavljen strujni krug, a i cijeli strujni krug onako, kako to u naravi vidimo. Da ne bismo uvijek crtali takve realne slike naših električkih uređaja, jer bi one bile često veoma komplicirane, služimo se u elektrotehnici redovno shematskim predočavanjem. Ono se sastoji u tome da se za pojedine elemente električkih uređaja uzimaju neki jednostavni, dogovorno odabrani znakovi ili simboli, koji se na crtežu međusobno povezuju linijama, onako kako su u naravi ti elementi spojeni žicama.

Tako je za bateriju, kao za električki izvor, odabran simbol



i on nam doista na najjednostavniji način prikazuje ono što je za izvor najbitnije, a to je da izvor svakako mora imati dva različita pola, + i -, na koje se nadovezuju aparati, trošila. Za rotacione generatore, koji su također električki izvori, uobičajen je simbol



koji može poslužiti i općenito kao oznaka svih vrsta izvora.

Trošilo, a to je u ovom primjeru žaruljica, označuje se ili simbolom



jer je opet najbitniji dio žarulje, ili rešoa, spiralizirana žarna žica koja pruža struji pri prolazu otpor pa se zato zagrijava ili, što je običnije, jednostavno simbolom



Vodovi, za koje se pretpostavlja da su veoma dobri vodiči električne struje, označuju se ravnim crtama.

Možemo, dakle, nacrtati shematski prikaz džepne svjetiljke na slici 2.3, koja nam ujedno prikazuje najjednostavniji električki uređaj: jednostruko zatvoreni električki strujni krug. Vidimo da su ravnim neprekinutim crtama povezani jedan kraj trošila s jednim polom izvora, te drugi kraj trošila s drugim polom izvora. U tom će dakle slučaju kroz trošilo (žarulju) prolaziti struja i žarulja će svijetliti.

Ako, međutim, želimo ugaziti žarulju, moramo dobro vodljivi strujni krug na jednom mjestu učiniti nevodljivim. Dakako da taj prekid nećemo učiniti u samom trošilu ili izvoru, već u vodu. To ćemo učiniti tako da na jednom mjestu, bilo kojem, vod prekinemo i umjesto dobro vodljivog materijala umetnemo loš vodič, tj. izolator. To može biti zrak, porculan ili kakva umjetna izolaciona masa.

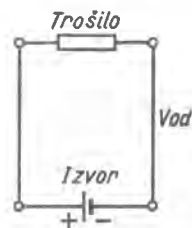
Funkciju prekidanja struje vrše tzv. sklopke, koje shematski označujemo simbolom



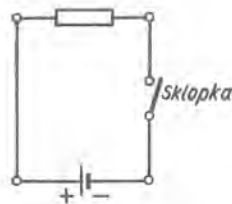
Slika 2.4 prikazuje kako je sklopka uključena u vod. Potpuno je svejedno gdje ćemo je uključiti u vod, jer se struja prekida ma gdje je vod prekinut.

Sve dosadašnje slike prikazuju najjednostavniji električki strujni krug, sastavljen samo od jednog izvora i jednog trošila. Ima međutim i složenijih strujnih krugova i kompliciranije sastavljenih električkih uređaja, no prilike i pojave u njima mogu se lako shvatiti ako se dobro zna kakve su prilike u jednostavnom električkom strujnom krugu.

Treba, dakle, sada pobliže razmotriti što se sve događa u jednostavnom električkom strujnom krugu. Pri tome nam je izvjesna poteškoća to da se elektricitet i njegovo gibanje u vodiču ne može vidjeti, a niti sam elektricitet neposredno osjetiti bilo kojim od naših osjetila.

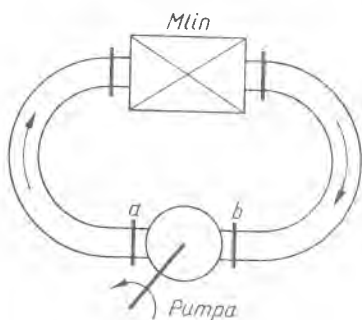


Sl. 2.3. Shematski prikaz jednostruko zatvorenog strujnog kruga.



Sl. 2.4. Sklopka uključena u strujni krug.

Mi vidimo, na primjer, kako voda teče, možemo to strujanje pratiti i lakše doći do osnovnih zakona toga strujanja. Zbog toga, da bismo dobili neku slikovitu



Sl. 2.5. Električkom strujnom krugu analogni strujni krug vode.

predodžbu o električnoj struji, često se služimo uspoređivanjem električne struje sa strujanjem vode. No tu valja biti oprezan, jer nije svako gibanje vode adekvatno električnoj struji u našem strujnom krugu. Ispravnu analognu predodžbu vodenog strujnog kruga prikazuje nam slika 2.5. Tu je kao izvor vodene struje uzeta sisaljka koja tjera vodu u neko trošilo, na primjer mlin, gdje se iskorićuje energija gibanja vode za obavljanje rada. Ono što povezuje izvor s trošilom jesu dovodna i odvodna cijev. One ne smiju imati nigdje zapreke, ako želimo da voda struji. Ako stavimo na neko mjesto zasun (ventil), možemo njime spriječiti vodeno strujanje isto onako kako smo sklopkom u električkom strujnom krugu spriječili električno strujanje.

2.2.

JAKOST ELEKTRIČNE STRUJE

Ono što je do sada bilo rećeno u elektricitetu i o električnoj struji, bilo je samo kvalitativno opisivanje pojava. Nauka i tehnika ne zadovoljavaju se međutim samim opisivanjem, one žele znati također kolika je promatrana pojava, da li je veća ili manja od druge istovrsne.

Zato treba one fizikalne velićine koje su mjerodavne za neku pojavu mjeriti i brojćano predoćiti. To je već istakao i veliki fizićar lord Kelvin, kad je rekao da o nećemu možemo nećto znati samo onda ako to možemo izmjeriti i izraziti numerićki.

Tako ćemo i mi u našem strujnom krugu provesti izvjesna mjerenja. No prije svega trebamo one velićine koje želimo mjeriti toćno definirati.

Prva elektrićka fizikalna velićina, koju ćemo razmatrati u našem strujnom krugu, jest jakost elektrićne struje, a oznaćit ćemo je slovom I . Makar da je to posve fizikalna velićina, ona je ipak nekako bliza i shvatljiva, dapaće i onima koji se ne bave fizikom i tehnićkim problemima, već samo iskoriććuju elektrićnu struju u praktićke svrhe. Često ćujemo kako i oni koji su neupuććeni u probleme elektrotehnike kaću da je elektrićna struja jaća ili slabija. Oni to ispravno zakljućuju prema tome da li, na primjer, žarulja svijetli jaće ili slabije, da li im elektromotor dobro vuće ili ne.

Pod pojmom jakosti elektrićne struje razumijeva se, dakle, jedna od fizikalnih velićina od koje će ovisiti ućinak elektrićne struje u našim trošilima. Budućić da je elektrićna struja gibanje elektrićkih ćestica, možemo shvatiti da će ućinak njihov biti to većić, što je intenzitet tog strujanja većić, a to znaćić što je veća kolićina elektriciteta u jednoj sekundi ušla iz izvora na ulaznoj stezaljki u trošilo da tamo obavi rad.

Na osnovi toga može se kao mjera za jakost električne struje na nekom mjestu strujnog kruga uzeti količina elektriciteta što je prošla u jedinici vremena (u sekundi) kroz presjek vodiča na tome mjestu.

Matematički može se, dakle, jakost električne struje ili intenzitet električkog strujanja izraziti jednadžbom

$$I = \frac{Q}{t}$$

gdje su I - jakost električne struje

Q - količina elektriciteta što je kroz presjek prošla u vrijeme t

t - vrijeme

To je u skladu i s analognom slikom vodenog strujanja. I tamo se može kao mjera za intenzitet (jakost) vodenog strujanja smatrati količina vode, koja je na nekom mjestu u sekundi protjecala kroz cijev:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Pri strujanju vode lako je ovu veličinu i izmjeriti; treba samo pustiti da neko vrijeme t (sekunda) voda teče u neko spremište i tamo izmjeriti ukupnu količinu vode Q (m^3) koja je za to vrijeme istekla. Ako sada podijelimo Q sa t dobivamo protjecanu količinu vode u jednoj sekundi, a to je baš intenzitet strujanja I .

Dok se dakle kod vodene struje može ovako mjerenje relativno lako provesti, pri određivanju jakosti električne struje nalazimo na poteškoće, jer se količina protjecanih električkih čestica ne može direktno opaziti niti prebrojiti.

Takvom direktnom metodom nemoguće je, dakle, provesti mjerenje jakosti električne struje, no to se može obaviti na drugi način. Vidjeli smo, naime, da je jakost struje I veličina o kojoj ovisi učinak električne struje, pa je onda lako shvatljivo da se jakost električne struje može odrediti indirektno, prema njezinu učinku. Pri tome je u principu svejedno koji će se učinak električne struje odabrati od ona tri osnovna, da se provede to mjerenje. Može se, kako je bilo već u prvim danima elektrotehnike uobičajeno, odabrati kemijski učinak. U tom slučaju kao mjera za jakost struje služi količina kemijske supstancije što je struja pri svom prolazu izluči iz elektrolita u jednoj sekundi.

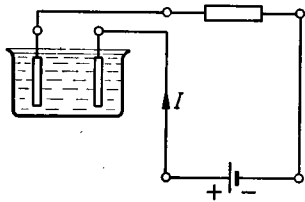
Ako bi, na primjer, jedna promatrana električna struja izlučila iz vodene otopine $AgNO_3$ dvostruko više srebra u jednoj sekundi nego koja druga struja, ona je i dvostruko jača. Ovakvo mjerenje, zapravo uspoređivanje jakosti struja, treba međutim provesti na način koji će punovažno vrijediti u svim zemljama. Zato je bilo potrebno odabrati jedinicu za mjerenje jakosti struje.

Prvotno je odlučeno da se kao jedinica za jakost struje uzme ona električna struja, koja je u stanju da iz vodene otopine $AgNO_3$ izluči u jednoj sekundi 1,1180 mg srebra*.

Ta jedinica naziva se amper, u počast fizičara Amperea, a njezina oznaka je A. Pripada jedinicama Giorgijeva sistema, odnosno jedinicama »Internacionalnog sistema« (SI).

* Poblje o jedinicama za mjerenje električkih veličina govori se u posebnom poglavlju.

Mjerenje jakosti električne struje na nekom mjestu strujnog kruga vrši se prema ovoj metodi tako, da se struja čija nas jakost zanima prisili da prolazi i kroz elektrolit AgNO_3 . Onda se vaganjem odredi količina izlučenog srebra i prema gornjem se izračuna broj ampera koji karakterizira kvantitativno jakost struje, slika 2.6.



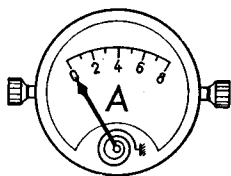
Sl. 2.6. Mjerenje jakosti električne struje na osnovi njenog kemijskog učinka.

Ako je, na primjer, mjerenje trajalo 10 sekunda i ako je za to vrijeme izlučena količina srebra na katodi iznosila 55,90 mg, onda je u jednoj sekundi bilo izlučeno $55,90/10 = 5,590$ mg srebra. Prema tome, jakost struje iznosi

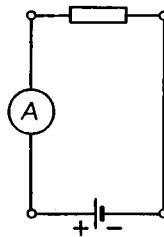
$$I = \frac{55,90}{1,1180} = 5 \text{ A}$$

Ovaj način mjerenja, ma da je potpuno ispravan, nije baš prikladan za praksu. Danas se za mjerenje jakosti struje općenito upotrebljavaju instrumenti koji djeluju na osnovi magnetskog učinka električne struje, jer je mjerenje pomoću njih mnogo jednostavnije.

Električna struja koju mjerimo prolazi kroz sistem instrumenta i tamo stvorena magnetska sila pomakne kazaljku, te se prema njenom odklonu na baždarenoj skali može odmah očitati broj ampera jakosti struje, slika 2.7. Ovi instrumenti zovu se ampermetri, a njihova je shematska slika A na sl. 2.8.



Sl. 2.7. Instrument za mjerenje jakosti struje, ampermetar.

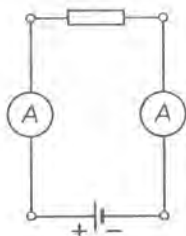


Sl. 2.8. Serijsko upakčanje ampermetra.

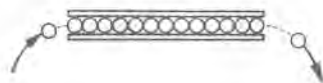
Ampermetri se upakčaju u strujni krug na ono mjesto električkog voda gdje želimo saznati kolika je jakost struje. Način upakčanja je potpuno isti kao da je uključena elektrolitska ćelija za mjerenje jakosti struje. Treba, naime, vod na tome mjestu prekinuti i tako dobivena dva slobodna kraja voda priključiti na stezaljke (priključnice) ampermetra. Time se struja prisiljava da prolazi i kroz instrument. Takav način upakčanja zovemo serijskim, slika 2.8.

Ako bismo sada prema slici 2.9 ukopčali u jednostavni strujni krug više ampermetara na raznim mjestima, mogli bismo lako konstatirati da svi oni pokazuju istu jakost struje. Ova eksperimentalno utvrđena činjenica upućuje nas na važan zaključak, da strujanje elektriciteta u vodičima treba smatrati nestlačivim strujanjem, kao što je i strujanje vode u cijevima nestlačivo. To znači da je količina elektri-

citeta koja je pri strujanju ušla u trošilo točno jednaka količini elektriciteta koja je u to vrijeme iz njega izašla. To vrijedi i za svaki element strujnog kruga, dapače i za svaku tačku našeg jednostavnog strujnog kruga. Slikovito se to može predložiti tako da električne čestice, u našem primjeru elektrone, smatramo nestlačivim



Sl. 2.9. U jednostruko zatvorenom strujnom krugu uključeni ampermetri pokazuju istu jakost struje.



Sl. 2.10. Slikovito predloženo nestlačivo strujanje elektriciteta.

kuglicama koje se pri strujanju u zatvorenoj cijevi pomiču tako da kad jedna kuglica uđe u cijev, istovremeno jedna na drugom kraju izađe, jer se zbog nestlačivosti kuglice ne mogu sakupljati (kumulirati) u zatvorenoj cijevi, slika 2.10.

Osim osnovnih i izvedenih jedinica internacionalnog sistema primjenjuje se u praksi još veće i manje jedinice, a dobivamo ih množenjem s faktorom koji je neka potencija broja 10. Te se jedinice označuju tzv. prefiksima.

Oznake dijelova i višekratnika jedinica

TABLICA I

Dio ili višekratnik	P r e f i k s	O z n a k a
10^{-18}	ato	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	piko	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	mikro	μ
10^{-3}	mili	m
10^3	kilo	k
10^6	mega	M
10^9	giga	G
10^{12}	tera	T

Npr. 1 pA (pikoamper) = 10^{-12} A

2.3. MJERENJE KOLIČINE ELEKTRICITETA I GUSTOĆE STRUJE

Iz definicije jakosti struje $I = Q/t$ slijedi da je količinu elektriciteta moguće izračunati pomoću jednadžbe

$$Q = I \cdot t$$

Budući da su nam jedinice za I i t , a to su amper i sekunda, već poznate, možemo prema gornjoj relaciji odrediti jedinicu za mjerenje količine elektriciteta. Ta jedinica jednaka je, naime, umnošku ampera i sekunde, pa se i naziva amper-sekunda i označuje As, a njezin kraći naziv je kulon, oznaka C, prema imenu poznatog fizičara Coulomba, koji je ispitivao sile među električkim nabojima.

Prema tome:

$$1 \text{ C} = 1 \text{ As}$$

Osim ove jedinice za količinu elektriciteta ili za električki naboj koja je osnovna u Giorgijevu sustavu jedinica, mnogo se upotrebljava u praksi i jedna veća jedinica, dobivena tako, da se za vrijeme t umjesto jedne sekunde uzme jedinica jedan sat, pa se dobije jedan ampersat, oznaka Ah. Vrijedi, dakle

$$1 \text{ Ah} = 3600 \text{ As} = 3600 \text{ C}$$

Najmanju količinu elektriciteta predstavlja naboj jednog elektrona. Točna mjerenja pokazuju da elektronu treba pripisati količinu negativnog elektriciteta od

$$- 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

Taj elementarni naboj često se označuje slovom e , pa je

$$e = - 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

Odgovarajuće je i najmanja količina pozitivnog elektriciteta, elementarni pozitivni naboj što ga posjeduje proton

$$+ 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

Prema tome, količinu elektriciteta od jednog kulona predstavlja $1/1,60 \cdot 10^{-19} = 6,24 \cdot 10^{18}$ elektrona. Ako, dakle, kroz vodič teče struja jakosti 1 A, znači da na jednom mjestu kroz okomiti presjek vodiča prolazi u 1 sekundi količina 1 C ili $6,24 \cdot 10^{18}$ elektrona.

U praktičkoj, a i u teoretskoj elektrotehnici, mnogo se koristi još jedna račun-ska veličina vezana uz električnu struju, a to je gustoća struje I . Ona je definirana kao jakost struje što otpada na jedinicu površine poprečnog presjeka vodiča kroz koji prolazi struja. Ili: to je količina elektriciteta koja u jedinici vremena prođe na promatranom mjestu kroz jedinicu površine okomitog poprečnog presjeka vodiča. Dakle

$$I = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{S \cdot t}$$

gdje je S površina presjeka.

Gustoća struje mjeri se u Giorgijevu sustavu jedinica brojem ampera na jedan kvadratni metar: A/m². No često se u praktičkim računima radije računa brojem ampera na kvadratni milimetar A/mm², jer su poprečne dimenzije naših vodiča (žica) reda veličine od nekoliko mm².

2.4.

TREKUTNA VRIJEDNOST JAKOSTI STRUJE

Pri definiciji jakosti struje I prema formuli $I = Q/t$ bilo je pretpostavljeno da je tokom vremena gibanje elektrona jednolično. To znači da je u jednakim vremenskim intervalima na promatranom mjestu vodiča prošla kroz okomiti presjek vodiča ista količina elektriciteta.

U tom je slučaju Q/t stalna veličina za bilo kako velik vremenski interval t , pa je i struja konstantne jakosti, i ta se konstantna jakost simbolički označuje velikim slovom I .

Lako možemo zamisliti da količina protjecanog elektriciteta tokom vremena nije jednolična, već da može biti promjenljiva. Tada struja neće biti konstantna, nego će se njena jakost mijenjati. U tom bi slučaju kvocijent količine elektriciteta Q , koja je kroz neko konačno vrijeme t protekla na jednom mjestu vodiča i vremena t , bio srednja vrijednost jakosti struje u tom vremenskom intervalu.

Budući da se u vremenu jakost takve struje mijenja zovemo tu struju promjenljivom, a označujemo je općenito malim slovom i . No i u tom se slučaju može za izračunavanje jakosti struje iskoristiti prvotna definiciona formula. Treba samo prema pravilu infinitezimalnog računa uzeti u promatranje tako kratke vremenske intervale dt za koje se može pretpostaviti da će tok količine elektriciteta dq biti jednoličan. I u tom će slučaju kvocijent dq/dt označavati jakost struje

$$i = \frac{dq}{dt}$$

u tom beskonačno kratkom (infinitezimalnom) vremenskom intervalu. A kako je beskonačno kratko vrijeme zapravo samo jedan trenutak, to nam kvocijent dq/dt predstavlja jakost struje baš samo u tom promatranom trenutku.

Zato se izraz

$$i = \frac{dq}{dt}$$

i naziva trenutna ili momentana vrijednost jakosti struje.

U daljnjim tumačenjima posebno su objašnjene različite vrste promjenljivih struja.

2.5.

SMJER ELEKTRIČNE STRUJE

U prijašnjim razlaganjima rečeno je da je u metalnim vodičima električna struja gibanje elektrona, što znači gibanje negativnog elektriciteta od minus pola izvora kroz trošilo prema plus polu izvora.

Do te spoznaje došlo je tek onda kada je nauka o sastavu materije unijela više svjetla u bit elektriciteta i tako objasnila šta je električna struja.

U prvim danima elektrotehnike fizičari su uzeli, prema analogiji sa strujanjem vode koja teče od mjesta višeg tlaka (+) prema mjestu nižeg tlaka (—), da je u

metalnim vodičima kao i općenito u strujnim krugovima smjer električne struje od (+) pola izvora kroz trošilo prema (−) polu izvora. Takav način označivanja smjera struje, usvojen u prošlom stoljeću, upotrebljava se općenito i danas u nauci i tehnici.

U našim električkim strujnim krugovima treba, dakle, razlikovati smjer električne struje od smjera gibanja elektrona.

Ovakvo usvajanje označivanja smjera struje, slika 2.11, od (+) pola izvora kroz trošilo prema (−) polu, u biti znači to da smjerom električne struje smatramo uvijek onaj u kojem bi se gibale pozitivne električne čestice od izvora kroz trošilo i natrag u izvor.



Sl. 2.11. Dogovorom usvojen način označivanja smjera struje I .

Da se pak pozitivnoj stezaljci izvora pripisuje + predznak nastalo je posve slučajno. Pozitivne stezaljke naših električkih izvora posjeduju naime isti polaritet električkog naboja kao što ga dobiva stakleni štap pri trenju s kožom. A još je iz vremena prije B. Franklina uobičajeno i općenito prihvaćeno da se elektricitetu stakla pridaje pozitivan predznak, dok je elektricitet što ga dobiva vunom natrt štap od smole dobio negativan predznak. Time se, naime, htjelo jedino naznačiti suprotnost karaktera elektriciteta stakla od onog što ga ima štap od smole.

Ovakvo dogovoreno definiranje smjera električne struje ništa ne smeta egzaktnosti pri tumačenju električkih pojava vezanih uz pojam jakosti struje. Kao dokaz tome može poslužiti eksperimentalno utvrđena činjenica da se baš pri onom učinku električne struje koji je njezina bitna oznaka, a to je magnetizam, dobiva identična magnetska sila bilo da je struja stvorena gibanjem negativnih električnih naboja u jednom smjeru, ili je pak stvorena gibanjem pozitivnog elektriciteta u suprotnom smjeru.

Osim toga, treba napomenuti da električna struja može biti realizirana gibanjem pozitivnog elektriciteta u jednom smjeru, uz istovremeno gibanje negativnog elektriciteta u suprotnom smjeru. Jakost struje bit će tada sastavljena od dva dijela, jedan uzrokuje gibanje pozitivnog elektriciteta, a drugi negativnog. Oba dijela se aritmetički sumiraju jer su, matematički gledano, istog predznaka, budući da je uz promjenu predznaka električkog naboja promijenjen istovremeno i predznak smjera gibanja.

Ako je jakost struje ostvarena na taj način da se u strujnom krugu električki naboji gibaju tokom vremena trajno u jednom te istom smjeru, nazivamo struju istosmjernom (ili jednosmjernom), a ako se naboji koji stvaraju struju gibaju naizmjenice sad u jednom, a sad u drugom smjeru, onda je struja izmjenična (ili naizmjenična).

2.6.

ELEKTRIČKI NAPON

Pri daljnjoj analizi električkog strujnog kruga samo nam se nameće pitanje kako bismo točno definirali uzrok zbog kojeg u strujnom krugu dolazi do strujanja elektriciteta i kako se može taj uzrok kvantitativno, dakle brojčano, izraziti.

Odgovor na ovo pitanje može se dobiti i iz analogne slike vođenog strujnog kruga. Lako se možemo uvjeriti da voda struji kroz cijevi i priključeni mlin zato, što su zbog djelovanja pumpe na krajevima cijevi, *a* i *b*, različiti tlakovi.

Na ulazu u cijev *a* nastao je neki pretlak, dok se na kraju *b* stvorio vakuum, pa voda uslijed te razlike tlakova teče od mjesta višeg tlaka prema mjestu nižeg tlaka.

Ako ovakvo tumačenje prenesemo na naš električki strujni krug, i za nj možemo kazati da će struja teći zato jer na polovima izvora postoji neka razlika električkih tlakova. Već nam je otprije poznato da na negativnom polu izvora postoji suvišak elektrona, dok pozitivni pol ima manjak elektrona. Ova razlika električkih stanja uzrokuje da se elektroni s minus pola pomiču kroz vod i trošilo prema plus polu. Prema elektrotehničkoj terminologiji, ova se razlika električkih stanja (+) i (–) pola izvora naziva električki napon. Možemo, dakle, kazati da je glavna i karakteristična osobina izvora upravo to da on posjeduje napon koji se pojavljuje među njegova dva pola. Oznaka za napon je slovo *U*.



Sl. 2.12. Paralelno priključivanje voltmetra.

Da bi se električni naponi mogli međusobno uspoređivati, treba ih mjeriti. Dogovoreno je da se jedinica za mjerenje napona naziva volt, a označuje slovom *V*. Tako je, na primjer, napon Voltina elementa, prvog stalnog električkog izvora što ga je talijanski fizičar Alessandro Volta pronašao oko godine 1800., oko 1 V. Tačnije se može ta jedinica definirati i ovako: napon Westonova normalnog elementa, koji služi baš za uspoređivanje napona, iznosi 1,0186 V. U poglavlju o jedinicama Giorgijeva sustava bit će i napon od 1 V posebno definiran, uz ostale električke jedinice.

Instrumenti pomoću kojih se mjeri napon zovu se voltmetri. Njihov je vanjski izgled sličan ampermetru: imaju kazaljku koja svojim otklonom na baždarenoj skali pokazuje odmah napon izražen brojem volta.

Kada želimo voltmetrom izmjeriti napon električkog izvora, moramo taj napon privesti mjernom sustavu voltmetra i tada će on svojim djelovanjem pomaknuti kazaljku instrumenta. Budući da je napon razlika električkih stanja dviju točaka, u našem slučaju obiju polova izvora, moramo ta dva električka stanja dovesti direktno od izvora do voltmetra. To znači da se obje stezaljke voltmetra spajaju direktno s polovima izvora, slika 2.12.

Takav način spajanja voltmetra zovemo paralelnim spajanjem, jer se voltmetar, prema slici, ukapča u spojnoj shemi usporedo s priključenim trošilom. Ovako će se općenito priključivati voltmetar uvijek kada treba izmjeriti napon bilo kojih

dviju točaka. Ako nas zanima, na primjer, napon nekog vodiča prema zemlji, priključit ćemo voltmetar direktno jednim krajem na vodič, a drugim na zemlju.

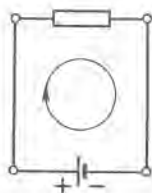
Postoji, prema tome, bitna razlika u načinima kako se uključuje ampermetar, a kako voltmetar. To je u vezi s činjenicom da o naponu općenito možemo govoriti uvijek s obzirom na dvije točke strujnog kruga, dok se jakost struje odnosi uvijek samo na jednu točku voda.

Osim osnovne jedinice za mjerenje napona, a to je volt, upotrebljavaju se još izvedene veće i manje jedinice, prema oznakama navedenim u tablici I.

2.7. UNUTARNJI ILI PROIZVEDENI NAPON, ELEKTROMOTORNA SILA

Pogledajmo još pobliže nastajanje napona na polovima ili stezaljkama električkih izvora. Otprije nam je poznato da kombinacija pozitivno i negativno nabijenog tijela posjeduje u sebi sakupljenu izvjesnu potencijalnu energiju. Zato se u nauci o elektricitetu različita električka stanja polova izvora, koja određuju koliki je napon izvora nazivaju potencijali. Tako se napon općenito definira kao razlika potencijala dviju točaka, u promatranom slučaju obiju polova izvora.

Nadalje je bilo objašnjeno da se električki pozitivna i negativna tijela dobiju na taj način da se odvoje elektroni od jednog atoma i prenesu nekom drugom atomu.



Sl. 2.13. Oznaka smjera djelovanja napona u strujnom krugu.

To odvajanje elektrona vrši se u električkim izvorima utroškom neke druge vrste energije i to tako, da se stranom silom svladava suprotstavljanje onih električkih sila koje drže u neutralnom atomu elektrone uz jezgru. Ta strana sila može se slikovito prozvati elektromotornom silom, koji naziv znači upravo to, da je ta sila uzrok pomicanju elektrona ili općenito električkih naboja.

Djelovanjem ove elektromotorne sile odvajaju se u unutrašnjosti izvora električki naboji i nastaje napon, koji zovemo unutarnjim ili proizvedenim naponom.

Mnogi taj napon prema njegovom uzroku nazivaju elektromotornom silom, što nas ne smije zavesti na misao da su električki napon i sila fizikalne veličine iste dimenzije.

Taj unutrašnji napon označuje se slovom E , ili također sa U_0 i on se dalje predaje stezaljkama izvora.

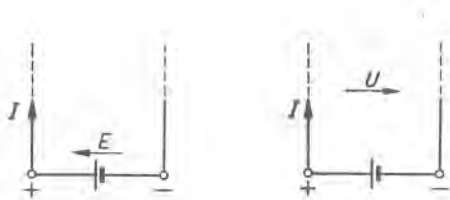
Ako se sva strana energija potrošena za stvaranje unutarnjeg napona E prenese bez gubitaka i na stezaljke, tj. polove izvora, bit će vanjski napon U jednak unutarnjem naponu E .

Pri objašnjenju prilika u strujnom krugu rečeno je da se kao smjer struje dogovorno uzima smjer od pozitivnog pola izvora kroz priključeno trošilo do negativnog pola izvora. Ako, dakle, na slici 2.13 označimo strelicom  smjer struje

u strujnom krugu, na osnovi toga možemo i naponu, kao uzroku struje, pripisati jedan smjer djelovanja. Razumljivo je da ćemo smjer djelovanja napona uzeti jednakim onome što ga ima i struja koju je napon potjerao. To označujemo uz simbol izvora strelicom, a ta ima unutar izvora smjer od negativnog pola prema pozitivnom. U tome, naime, smjeru strana sila, odnosno E , djeluje na odvajanje pozitivnog elektriciteta, pa zato i kažemo da struja kroz izvor prolazi od negativnog pola prema pozitivnom, sl. 2.14.

U onom pak dijelu strujnog kruga koji se od stezaljki izvora nastavlja dalje vodom do priključenog trošila djeluje vanjski napon U od pozitivnog pola prema negativnom polu. U tom će smjeru, kako je već rečeno, prolaziti struja kroz trošilo, a isto tako bi u tom smjeru prolazila struja i kroz bilo što, što bi omogućilo naponu U da potjera struju, dakle stavi u gibanje pozitivne električke naboje, od pozitivno označenog vodiča prema negativno označenom vodiču.

Smjer djelovanja vanjskog napona U možemo, dakle, označiti strelicom koja je izvan izvora usmjerena od pozitivnog pola prema negativnom, slika 2.14.



Sl. 2.14. Oznake smjera unutarnjeg i vanjskog napona.

Prema podacima sa slike 2.14 vidimo da postoje dva načina kako se, uz općenito prihvaćen smjer struje, može označiti u spojnim shemama smjer napona. Iako na prvi pogled izgledaju ta dva načina jedan suprotan drugome, ipak svaki od njih pri proračunima električkih strujnih krugova dovodi do istih točnih rezultata. Treba se, naime, točno pridržavati onoga što je prije rečeno, tj. treba znati da li se označena strelica napona odnosi na unutarnji napon (elektromotornu silu) E ili na vanjski napon U .

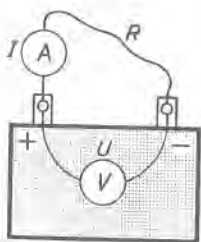
Ovo označivanje smjera struje i smjera napona nema neku veću važnost u jednostavnom slučaju, kao što je jednostruko zatvoren strujni krug. No u sastavljenim strujnim krugovima, gdje ima više različitih izvora i trošila i gdje prolazi više različitih struja, od bitne je važnosti da se pri analizi uzmu u obzir ovako definirani smjerovi, ako želimo ispravno računati.

Ova pravila o označivanju smjera struje i smjera napona prva su i osnovna pravila o smjerovima i na njih se nadovezuju sva ostala pravila o smjerovima u nauci o elektrotehnici.

3. OSNOVNI ZAKON ELEKTRIČKOG STRUJANJA

3.1. OHMOV ZAKON

Vidjeli smo da je električna struja posljedica napona, pa će prema tome i jakost struje ovisiti o veličini napona. Da bi se utvrdila kvantitativna ovisnost, potrebno je izvršiti niz pokusa i provesti mjerenja. Ta mjerenja pokazuju da jakost struje ne ovisi samo o naponu stezaljke izvora, već i o tome što je na stezaljke izvora priključeno kao vanjski dio strujnog kruga.



Sl. 3.1. Mjerenje napona i jakosti struje na priključenom otporu.

Da bi nam za prvo vrijeme prilike u strujnom krugu bile što jednostavnije i preglednije, pretpostavit ćemo da se cio strujni krug sastoji od izvora i trošila. Priključit ćemo, dakle, trošilo bez posebnog voda na izvor direktno, pa smo time isključili utjecaj voda. A kao trošilo možemo uzeti spiralu rešoa ili žarulju, što je u biti samo jedan vodič električne struje. Taj ćemo vodič priključivati redom na izvore raznih napona i prema slici 3.1 na instrumentima, voltmetru i ampermetru, očitavati vrijednosti ispitivanih veličina.

Pokusi pokazuju da će pri povećanom naponu porasti i jakost struje, dok će pri smanjenom naponu jakost struje biti manja. Ukoliko smo se pobrinuli da se temperatura vodiča pri mjerenjima ne mijenja, možemo konstatirati da će jakost struje biti direktno proporcionalna naponu.

No ako sada na jedan te isti stalni napon priključujemo različite vodiče, možemo vidjeti da će se jakost struje mijenjati, dakle da ovisi o priključenom trošilu.

Da bismo i kvantitativno izrazili utjecaj priključenog vodiča na veličinu jakosti struje, moramo i za vodiče uvesti jednu veličinu kojom će se izraziti prije spomenuta činjenica da kroz neke vodiče teče jača, a kroz neke slabija struja.

Ta električka veličina, koja će u električkom pogledu okarakterizirati vodič može se ovako definirati : vodič koji propušta slabiju struju ima veći električki otpor od onoga pri kojem je uz isti napon struja jača.

Tako uvedena veličina, električki otpor, označena slovom R , omogućuje nam da pomoću nje odgovorimo na pitanje o čemu ovisi jakost struje u promatranom strujnom krugu. Možemo, dakle, kazati da je jakost struje I direktno proporcio-

nalna naponu U , a obrnuto proporcionalna otporu R . To se matematički može izraziti jednačbom

$$I = k \cdot \frac{U}{R}$$

Faktor proporcionalnosti k ovisi o tome kako su odabrane sve jedinice kojima mjerimo električne veličine koje ulaze u ovu jednačbu.

Da bi računi bili jednostavni i da bi otpali parazitni faktori proporcionalnosti, mjerit ćemo sve veličine jedinicama Giorgijeva koherentnog sistema. U tom je, dakle, slučaju faktor $k = 1$, pa gornja relacija dobiva oblik

$$I = \frac{U}{R}$$

Prema gornjem zahtjevu odabrana jedinica za električki otpor naziva se, u počast fizičaru Ohmu, jedan om, a označuje se velikim grčkim slovom omega, Ω .

Otpor od 1Ω mogao bi se realizirati ovako: to je otpor što ga električnoj struji pruža stupac žive dug $106,25 \text{ cm}$, poprečnog presjeka 1 mm^2 , na temperaturi od 0°C .

U sklopu ostalih jedinica koherentnog Giorgijeva sistema izvodi se definicija jedinice 1Ω na osnovi relacije $I = U/R$, ako u nju uvrstimo jedinice, jer je njena važnost i tada ispunjena. Tako dobivamo

$$1 \text{ A} = \frac{1 \text{ V}}{1 \Omega}$$

odakle slijedi da će otpor od jednog oma imati onaj vodič koji uz napon od jednog volta uzima struju jakosti jedan amper: $\Omega = \text{V/A}$.

Osim osnovne jedinice 1Ω upotrebljavaju se u računima veće i manje jedinice s prije navedenim prefiksima. Tako, na primjer

$$10^3 \Omega = 1 \text{ k} \Omega \dots \text{kiloom} \quad 10^6 \Omega = 1 \text{ M} \Omega \dots \text{megaom}$$

Prijašnja jednačba $I = U/R$ može se prikazati i na druga dva matematički ekvivalentna načina, tako da postoje slijedeće tri relacije

$$I = \frac{U}{R} \quad (\text{I}); \quad R = \frac{U}{I} \quad (\text{II}); \quad U = I \cdot R \quad (\text{III})$$

Svaka od ovih relacija može se detaljnije razmatrati i svaka će nam dati novih spoznaja o električkom strujnom krugu.

3.2.

ELEKTRIČKI OTPOR

Pogledajmo najprije izraz (II): $R = U/I$.

Ova jednadžba u biti je matematički izraz za definiciju električkog otpora R i omogućuje da se uvijek mjerenjem odredi koliki je otpor nekog vodiča.

Prema gornjoj jednadžbi bit će taj otpor izražen u omima, jednak kvocijentu broja volta priključenog napona U i broja ampera struje I koja je prolazila kroz vodič.

Ukoliko se temperatura i ostale vanjske prilike u kojima se vodič nalazi ništa ne mijenjaju, može se uzeti, kako je pokazao fizičar G. S. Ohm, da će otpor R vodiča biti konstantna veličina, pa jednadžba (II) poprima oblik

$$R = \frac{U}{I} = \text{konst}$$

koji se naziva Ohmov zakon. To gotovo potpuno vrijedi za metalne vodiče na konstantnoj temperaturi i tada je doista jakost struje proporcionalna naponu

$$I = \text{konst} \cdot U$$

Drugim riječima to znači da je samo uz gornje uvjete veličina otpora R neovisna o priključenom naponu, odnosno o jakosti struje koja kroza nj prolazi, dok će općenito u naravi R ovisiti o struji. Ipak, kako je istaknuto, ako R nije konstantan i ako ovisi o jakosti struje, daje nam jednadžba II Ohmova zakona podatak koliki je otpor uz upravo primijenjeni napon i struju.

Primjenjujući, dakle, ovu metodu na mjerenje otpora R , možemo na osnovi niza pokusa saznati o čemu sve ovisi veličina R . Tako se pokazalo da otpor vodiča R ovisi

- o materiji od koje je izrađen vodič: ρ
- o duljini vodiča: l
- o poprečnom presjeku: S
- o temperaturi: ϑ

Pri tome je otpor R direktno ovisan o duljini l , dok je sa presjekom S u obrnutom omjeru. Utjecaj materijala uračunava se faktorom ρ , koji se zove specifični otpor materijala. Najkompliciraniji je utjecaj temperature ϑ . Da bismo taj utjecaj u prvom računu eliminirali, promatrat ćemo za prvo vrijeme sve prilike na jednoj stalnoj, nepromijenjenoj temperaturi i to na temperaturi sobe, za koju se uzima da je 20°C .

Uz ove pretpostavke dobit ćemo mjereni otpor baš za tu temperaturu, pa ga zato označujemo indeksom 20.

Spomenuta ovisnost može se, dakle, matematički predložiti jednadžbom

$$R_{20} = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

Materijalna konstanta ρ naziva se specifični otpor* ili otpornost dotičnog materijala od kojeg je izrađen vodič, a značenje te konstante dobiva se ako iz gornje jednadžbe izrazimo ρ . Dobivamo

$$\rho = R_{20} \cdot \frac{S}{l}$$

što znači da je ρ numerički broj oma što ga na 20 °C ima vodič izrađen od promatranog materijala, čiji su presjek i duljina jednaki jedinici.

Uzevši, dakle, u obzir da je jedinica za duljine u Giorgijevu sistemu 1 m, a jedinica površine 1 m², izlazi da se ρ u Giorgijevu sistemu mjeri u

$$\Omega \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{m}} = \Omega \cdot \text{m}$$

dakle u ommetrima.

U praksi se često za proračun otpora vodiča navode, u priručnim tablicama vrijednosti specifičnog otpora ρ koje su izražene u omima za 1 m duljine, ali za presjek žice od 1 mm². Te su vrijednosti veće od onih Giorgijeva sistema 10⁶ puta, jer je 1 m² = 10⁶ mm², pa je prema tome odnos jedinica

$$1 \Omega \text{ m} = 10^6 \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Ako se računa sa specifičnim otporom ρ izraženim u $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$, onda se u jednadžbu za proračun otpora R_{20} mora uvrstiti l izražen u metrima, ali presjek S u kvadratnim milimetrima.

U tablici II navedene su vrijednosti specifičnog otpora ρ nekih važnijih elektrotehničkih materijala, ne samo metala, koji su najbolji vodiči električne struje, nego i materijala za izradbu otpornika.

TABLICA II

Specifični električki otpor: ρ i temperaturni koeficijent otpora: α pri temperaturi 20 °C

N a z i v	Oznaka	Specifični električni otpor ρ	Specifična vodljivost κ	Temperaturni koeficijent otpora α
		$\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$	$\text{S} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$	1/°C
Aluminij	Al	0,0270	37	0,0040
Bakar (mek)	Cu	0,0172	58	0,0039
Bronca II	Bc	0,0278	35,8	0,004
Kositar	Sn	0,115	8,6	0,0042
Mjed	Mj	0,075	13,3	0,0016
Nikal	Ni	0,09	11	0,006
Olovo	Pb	0,208	4,8	0,0043
Srebro	Ag	0,0163	61,4	0,0041
Željezo (čisto)	Fe	0,098	10,1	0,0065
Živa	Hg	0,958	1,04	0,0009
Cekas		1,11	0,93	0,00019
Kanthal A ₁		1,45	0,7	0,000032
Manganin		0,48	2,14	0,000015
Konstantan		0,49	2,1	0,00005

* Latinska riječ species znači vrsta

Iz podataka u tablici vidi se da od svih materijala najmanji otpor električnoj struji pruža srebro. Odmah iza srebra dolazi bakar, koji ima tek nešto veći specifični otpor, a iza bakra aluminij.

Razumljivo je da se zbog skupoće srebro neće upotrebljavati za izradbu vodiča već će se najviše koristiti bakar i aluminij. Dobro je da se zapamte vrijednosti specifičnog otpora bakra i aluminijskog, jer se u praktičkim računima često moraju izračunavati otpori bakrenih i aluminijskih vodiča

$$\rho_{\text{Cu}} = 0,0172 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} \quad \rho_{\text{Al}} = 0,027 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$$

Iz osnovne jednadžbe za proračun otpora vodiča vidi se da izbor materijala bitno utječe na veličinu otpora. No ipak se i od različitih materijala mogu izraditi vodiči iste duljine, a da su im otpori jednaki. To će biti ispunjeno ako se presjeci S obaju vodiča odnose isto kao njihovi specifični otpori. To se vidi iz relacija

$$R_1 = \rho_1 \cdot \frac{l}{S_1}; \quad R_2 = \rho_2 \cdot \frac{l}{S_2}$$

a uz uvjet da je $R_1 = R_2$, slijedi $\rho_1/S_1 = \rho_2/S_2$ ili $S_1 : S_2 = \rho_1 : \rho_2$ pa je

$$S_1 = S_2 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Ako bi se, dakle, bakreni vodič morao zamijeniti s aluminijskim iste duljine, a da ima i jednak otpor, trebao bi presjek aluminijskog vodiča biti

$$\frac{\rho_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Cu}}} = \frac{0,027}{0,0172} = 1,56$$

dakle 1,56 puta veći od presjeka bakrenog vodiča.

Ima slučajeva kada želimo u električkim uređajima pružiti struji baš neki veći otpor. Tada ćemo za izradbu otpornih žica, ukratko otpornika, upotrijebiti materijal s većim specifičnim otporom ρ . Takvi otporni materijali su redovno legure ili slitine raznih metala.

Za elektrotermička grijala iskorišćuju se najčešće legure kroma i nikla, cekaš i kantal, jer osim što im je specifični otpor veći, još su i otporni protiv korozije na visokim temperaturama.

U daljnjem nizu materijala dolaze materijali sa sve većim specifičnim otporom, što su već izolacioni materijali. Oni se upotrebljavaju za izradbu dijelova u konstrukcijama elektrotehničkih aparata i uređaja koji treba da spriječe prolazak električnoj struji.

3.3.

UTJECAJ TEMPERATURE NA ELEKTRIČKI OTPOR

Utjecaj temperature na veličinu otpora pri metalnim vodičima je redovno takav da se s povišenom temperaturom povećava i otpor, dok se, obrnuto, sa smanjivanjem temperature otpor smanjuje.

Ako bismo, dakle, uzeli 20°C kao početnu, referentnu temperaturu i ako za neki vodič izmjerimo njegov otpor na 20°C , te otpor na povišenoj temperaturi ϑ , ako je dakle povišenje temperature jednako $\Delta\vartheta = \vartheta - 20^{\circ}$, mogli bismo konstatirati da je otpor R sada veći za iznos ΔR , pa je

$$R = R_{20} + \Delta R$$

Mjerenja pokazuju da je prirast otpora ΔR direktno proporcionalan prvotnom otporu R_{20} , nadalje povišenju temperature $\Delta\vartheta$, ali da ovisi i o vrsti materijala od kojeg je vodič izrađen, a to se uzima u račun tzv. temperaturnim koeficijentom otpora α_{20} , pa je

$$\Delta R = R_{20} \cdot \Delta\vartheta \cdot \alpha_{20}$$

Imamo, dakle

$$R = R_{20} + R_{20} \cdot \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta = R_{20} (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta)$$

ili

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} [1 + \alpha_{20} \cdot (\vartheta - 20)]$$

Ovim jednadžbama izraženo je ujedno i to da se smanjivanjem temperature smanjuje vrijednost otpora R vodiča. U tom, naime, slučaju izlazi $\vartheta - 20$ negativno, pa je uz pozitivno α_{20} promjena ΔR negativna.

Značenje i dimenzija temperaturnog koeficijenta otpora dobivaju se ako se iz gornje jednadžbe izračuna α_{20}

$$\alpha_{20} = \frac{\Delta R}{R_{20} \cdot \Delta\vartheta}$$

što znači da α_{20} numerički predstavlja iznos za koliko se oma mijenja svaki prvotni om (što ga ima vodič prije zagrijavanja) uslijed promjene temperature za 1°C . Iz ove jednadžbe slijedi i dimenzija, a ta je $1/^{\circ}\text{C}$ ili $(^{\circ}\text{C})^{-1}$.

Za područje gdje nisu prevelike razlike temperature može se smatrati da je temperaturni koeficijent otpora konstanta.

Za većinu čistih metala koeficijent α_{20} ima vrijednost između $3 \cdot 10^{-3}$ do $4 \cdot 10^{-4}$, a za žareni bakar 0,00393. Legure imaju redovno još manje vrijednosti, a to znači da se otpor legura pri promjeni temperatura mnogo manje mijenja nego što je to kod čistih metala.

U tablici II nalaze se uz vrijednosti specifičnih otpora i podaci o koeficijentu α_{20} .

Iz podataka u tablici vidi se da npr. legure manganin i konstantan imaju α_{20} tako malen da se njihov otpor na normalnim promjenama sobnih temperatura može smatrati praktički konstantnim. Ovakvi otpornici upotrebljavaju se tamo

gdje se zahtijeva da njihov otpor bude uvijek istog iznosa, kao što je to u aparatima i uređajima mjerne tehnike.

Jednadžba $R = R_{20} \cdot [1 + \alpha_{20} (\vartheta - 20)] = R_{20} [1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta]$ predstavlja (uz pretpostavku $\alpha_{20} = \text{konstanta}$) u koordinatnom sustavu (R, ϑ) pravac koji je nacrtan na slici 3.2. To slijedi iz razmatranja odnosa $dR/d\vartheta$, koji je jednak

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dR}{d\vartheta} = R_{20} \cdot \alpha_{20}$$

a koji geometrijski predstavlja u grafičkoj predodžbi za bilo koju točku funkcije $R = f(\vartheta)$ pripadni gradijent ili koeficijent smjera. Budući da su prema prijašnjoj pretpostavci R_{20} i α_{20} konstantne veličine, to je $\operatorname{tg} \beta = \text{konst}$, a $R = R_{20} [1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta]$ linearna jednadžba koja ima nul-točku, a to je vrijednost $R = 0$ na nekoj temperaturi τ . Grafički je to presjecište pravca s apscisnom osi, a vrijednost τ izračunava se iz relacije

$$R_{20} [1 + \alpha_{20} (\tau - 20)] = 0$$

odakle slijedi $1 + \alpha_{20} (\tau - 20) = 0$, pa je

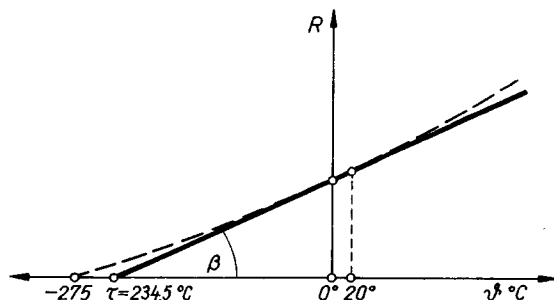
$$\tau = - \left(\frac{1}{\alpha_{20}} - 20 \right) ^\circ\text{C}$$

Za žareni bakar $\alpha_{20} = 0,00393$, pa izlazi da je

$$\tau = -234,5 ^\circ\text{C}$$

To znači da bi bakreni vodič računski trebao na temperaturi $\tau = -234,5 ^\circ\text{C}$ da bude bez otpora. Međutim mjerenja pokazuju da se baš pri vrlo niskim tempera-

turama pravac otpora iskrivljuje i crtkana krivulja predočuje promjenu otpora. Čisti metali pri apsolutnoj nuli ($-273 ^\circ\text{C} = 0 \text{ K}$) posjeduju tek neznatni (rezidualni) otpor.



Sl. 3.2. Ovisnost otpora metalnih vodiča o temperaturi.

Potpuno nestajanje otpora ($R = 0$) pri smanjivanju temperature opaženo je samo pri nekim metalima i nekim slitinama, a zbiva se već pri temperaturama nešto višim od apsolutne nule naglim prijelazom iz vodljivog stanja u tzv. supravodljivo stanje.

Dakako da se pravac nacrtan na slici 3.2 odnosi na promjenu otpora za bakar. Za druge metale dobili bismo nešto drugačiji pravac, jer je i α_{20} za druge metale nešto drugačiji.

No kao referentna temperatura umjesto 20°C mogla bi se uzeti i bilo koja druga, označimo je ϑ' . U tom se slučaju dakako neće promijeniti fizikalni odnos u pogledu ovisnosti otpora R o temperaturi, pa u koordinatnom sustavu (R, ϑ) ostaje isti pravac kao grafički prikaz ove ovisnosti.

U jednadžbi za izračunavanje otpora $R = f(\vartheta)$ morat će se onda uzeti drugi temperaturni koeficijent otpora: α' , koji upravo odgovara toj novoj referentnoj temperaturi ϑ' . Da je taj α' različiti od α_{20} slijedi iz gornje jednadžbe $\text{tg } \beta = \text{konst}$, koja kaže da je za pravac otpora bilo kojeg materijala umnožak otpora R' i temperaturnog koeficijenta α' za bilo koju referentnu temperaturu ϑ' konstantan. Može se, dakle, napisati jednadžba

$$\text{tg } \beta = \alpha_{20} \cdot R_{20} = \alpha' \cdot R' = \text{konst.}$$

Ako, prema tome, izračunamo za bilo koju temperaturu ϑ vrijednost otpora R mora se dobiti ista vrijednost uz referentnu temperaturu ϑ' kao i za 20°C , pa je

$$R = R_{20} \cdot [1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20)] = R' \cdot [1 + \alpha'(\vartheta - \vartheta')]$$

odakle uz

$$R' = R_{20} \cdot \frac{\alpha_{20}}{\alpha'}$$

dobivamo relaciju

$$\frac{1}{\alpha_{20}} - 20 = \frac{1}{\alpha'} - \vartheta'$$

To znači da je nul-točka pravca i u tom slučaju dobivena istom relacijom

$$\tau = - \left(\frac{1}{\alpha'} - \vartheta' \right) ^{\circ}\text{C}$$

Odavde se može općenito izračunati za svaku referentnu temperaturu njezin temperaturni koeficijent

$$\alpha' = \frac{1}{\vartheta' - \tau}$$

Za bakar bi, dakle, uz $\tau = -234,5$ bilo $\alpha' = \frac{1}{234,5 + \vartheta'}$, pa se npr. za temperaturu $\vartheta' = 100^{\circ}\text{C}$ dobiva

$$\alpha_{100} = \frac{1}{234,5 + 100} = 0,00299$$

Za elektrotehničku praksu od velike je važnosti poznavanje temperaturnog koeficijenta α , kako bi se mogla točnije izračunati vrijednost otpora na raznim temperaturama.

Budući da je α za metale relativno mala veličina bit će utjecaj temperature na veličinu otpora malen, ako promjene temperature nisu velike. No pri jakim zagrijavanjima, ako se postizavaju visoke temperature, može ΔR postati također vrlo veliko. Tako se npr. žarulji s volframovom niti ($\alpha = 0,004$), čiji je otpor u hladnom stanju, na 20°C , R_{20} , povećava otpor u užarenom stanju, ako je $\Delta\vartheta = 2250^\circ$ na vrijednost

$$R = R_{20} [1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta] = R_{20} \left[1 + \frac{4}{1000} \cdot 2250 \right]$$

$$R = R_{20} \cdot [1 + 9] = 10 \cdot R_{20}$$

Otpor vruće žarulje je dakle gotovo 10 puta veći nego otpor u hladnom stanju.

No i pri manjim zagrijavanjima postizavaju se često tolike promjene otpora vodiča, koje također treba uzeti u obzir.

Tako se bakrenim namotima električkih strojeva i transformatora, koji se smiju u pogonu trajno zagrijavati za oko 55 stupnjeva, povisuje otpor u toplom stanju prema otporu u hladnom stanju (20°C) na iznos

$$R = R_{20} [1 + 0,00393 \cdot 55] = R_{20} \left[1 + \frac{21}{100} \right]$$

$$R = 1,21 \cdot R_{20}$$

Prirast otpora izražen u postocima iznosi 21 %, što se dakako pri točnijim proračunima električkih strojeva mora uzeti u obzir.

3.4. MJERENJE TEMPERATURE ZAGRIJANOG NAMOTA

Općenita jednadžba za izračunavanje otpora može nam poslužiti da na osnovi mjerenja otpora odredimo povišenje temperature vodiča. To se primijenjuje na mjerenje temperature zagrijanog namota električkih strojeva i transformatora, gdje je teško u unutrašnjost namota staviti termometre.

Ako je na poznatoj početnoj temperaturi hladnog namota ϑ_1 otpor namota bio R_1 , a na nepoznatoj povišenoj temperaturi ϑ_2 iznosio R_2 , prema osnovnoj jednadžbi izlazi da je

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{20} \cdot [1 + \alpha_{20} (\vartheta_1 - 20)]}{R_{20} \cdot [1 + \alpha_{20} (\vartheta_2 - 20)]} = \frac{1 + \alpha_{20} (\vartheta_1 - 20)}{1 + \alpha_{20} (\vartheta_2 - 20)} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_{20}} - 20 \right) + \vartheta_1}{\left(\frac{1}{\alpha_{20}} - 20 \right) + \vartheta_2}$$

ili

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{-\tau + \vartheta_1}{-\tau + \vartheta_2} = \frac{234,5 + \vartheta_1}{234,5 + \vartheta_2}$$

odakle slijedi

$$\vartheta_2 = \frac{R_2}{R_1} (234,5 + \vartheta_1) - 234,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Utjecaj promjene temperature na promjenu električnog otpora nekog vodiča može se shvatiti i tako da se zbog promjene temperature promijenila vrijednost specifičnog otpora koja je prvotno dana za $20 \text{ } ^\circ\text{C}$ (pa je možemo označiti ρ_{20}). Tako za koju drugu temperaturu imamo

$$R = R_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta] = \frac{\rho_{20} \cdot l}{S} \cdot [1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta] = \frac{l}{S} \cdot [\rho_{20} (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)]$$

Prema takvom načinu računanja može se onda na kojoj drugoj temperaturi ϑ različitoj od $20 \text{ } ^\circ\text{C}$ specifičnom otporu pripisati vrijednost

$$\rho_\vartheta = \rho_{20} [1 + \alpha (\vartheta - 20)]$$

pa je

$$R = \rho_\vartheta \cdot \frac{l}{S}$$

Sva ova razmatranja o utjecaju temperature na veličinu otpora R izvedena su uz pretpostavku da je α konstantna veličina, pa je zato dobiven pravac kao graf funkcije $R = f(\vartheta)$. No kako je već spomenuto, ta je pretpostavka ispunjena doista samo za ograničeno, manje područje promjena temperatura.

Tako se može uzeti da se zaista linearan odnos dobiva za čiste metale samo u području temperatura $0 \text{ } ^\circ\text{C} < \vartheta < 200 \text{ } ^\circ\text{C}$. Na višim temperaturama mogu se mnogo točniji rezultati računski dobiti ako se krivulja $R = f(\vartheta)$ predoči jednadžbom

$$R = R_0 [1 + \alpha \vartheta + \beta \vartheta^2 + \dots]$$

gdje je R_0 otpor vodiča na $0 \text{ } ^\circ\text{C}$, dok se konstante $\alpha, \beta, \dots$ određuju eksperimentalno za svaki vodič.

3.5.

VOLTAMPERSKE KARAKTERISTIKE

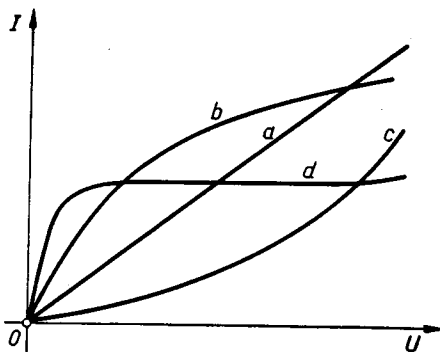
Pogledajmo sada kako se u koordinatnom sustavu (I, U) grafički prikazuje ovisnost struje i napona za razne vrste vodiča; to su tzv. voltamperske karakteristike.

Ako je $R = U/I = \text{konst}$, te za vodič vrijedi Ohmov zakon, bit će karakteristika $U = f(I)$ pravac, pa se takvi vodiči u pogledu otpora nazivaju linearni vodiči.

No u zbilji toga gotovo i nema jer se već zbog zagrijavanja vodiča pri prolazu struje otpor mijenja, pa će radi promjenljivosti otpora pri većoj jakosti struje (i višoj temperaturi) zbog povećanog otpora trebati za prolaz struje i nešto viši napon.

I bez obzira na zagrijavanje vodiča zbog prolaska struje, često je **otpor ovisan** o jakosti struje.

Tako će se umjesto pravca u koordinatnom sustavu (U , I) dobiti različite krivulje kao karakteristike, pa za takve vodiče kažemo da su nelinearni.



Sl. 3.3. Voltamperske karakteristike a) linearna karakteristika, b) žarulja s metalnom žarnom niti, c) žarulja s ugljenom niti, d) željezo u atmosferi vodika.

Na slici 3.3 prikazano je nekoliko karakterističnih krivulja: a) je linearna karakteristika, b) karakteristika žarulje s metalnom žarnom niti i c) karakteristika žarulje s ugljenom niti.

Naročito je interesantna karakteristika vodiča od čista željeza smještenog u cjevčici u atmosferi vodika. U jednom intervalu, koji odgovara temperaturama između 500 °C i 700 °C, jakost struje je neovisna o naponu koji je priveden vodiču. To se objašnjava time što se zbog strujne topline u području ovih temperatura otpor željeza linearno povećava, pa makar se napon povećava ostaje omjer U/R , a to je struja konstantnog iznosa, sl. 3.3 d.

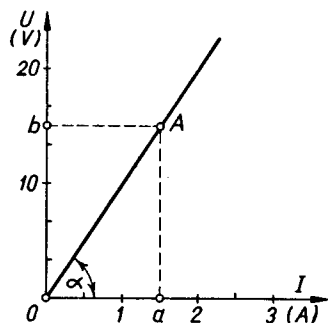
Pogledajmo još kako se može iz ovakvih grafički predloženih voltamperskih karakteristika odrediti iznos omskog otpora R .

Ako iz dijagrama na slici 3.4 za promatranu točku A očitamo vrijednosti U i I , možemo lako prema definiciji $R = U/I$ izračunati vrijednost otpora izraženu u omima. Pri tome se moraju u gornju jednadžbu za U i I uvrstiti brojčani iznosi broja volta i ampera.

Želimo li postupati grafički, tj. računati s dužinama apscise i ordinate, moramo uzeti u obzir još i mjerila s kojima u dijagramu mjerimo napone i struje. Tada će biti

$$R = \frac{U}{I} = \frac{k_U \cdot \overline{Aa}}{k_I \cdot \overline{Ab}} = \frac{k_U}{k_I} \cdot \frac{\overline{Aa}}{\overline{Ab}} = k_R \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Vidimo da je otpor R u grafičkom prikazu proporcionalan tangensu priklonog kuta α što ga spojnica OA čini s osi apscisa na kojoj mjerimo struje. Faktor proporcionalnosti k_R jednak je omjeru mjerila za napon k_U i mjerila za struje k_I .



Sl. 3.4. Određivanje omskog otpora iz voltamperske karakteristike.

Ta mjerila jesu

k_U broj volta što ih predočuje jedinica dužine npr. 1 cm,

k_I broj ampera što ih predočuje jedinica dužine npr. 1 cm.

Linearni otpornici kojima otpor ne ovisi o jakosti struje imaju voltampersku karakteristiku predočenu pravcem što izlazi iz ishodišta. Budući da je za sve točke tog pravca $\operatorname{tg} \alpha$ konstantan, i R je za sve struje i napone istog iznosa.

Nelinearni otpornici, naprotiv, koji imaju za karakteristiku neku krivulju, u svakoj će točki karakteristike imati drugačiju vrijednost otpora, jer se za pojedine točke dobiju dužine OA pod različitim kutovima.

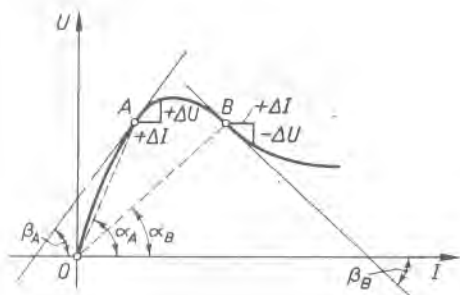
Ovako dobivena vrijednost otpora za neku točku zove se statički otpor (ili otpor pri konstantnoj istosmjernoj struji), jer se može mjerenjem odrediti upravo s nekom stalnom vrijednošću napona i stalnom strujom koje se, dakle, ne mijenjaju

$$R_{\text{stat}} = \frac{U}{I} = k_R \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

U promjenljivim okolnostima pogona, kada se U i I mijenjaju, pa je R_{stat} od točke do točke na karakteristici promjenljivo, važno je pogledati još u kolikoj se mjeri pri promjeni napona mijenja jakost struje. Uvid u to daje nam kvocijent dU/dI za promatranu točku krivulje. Taj kvocijent zove se diferencijalni ili dinamički otpor

$$R_{\text{dlt}} = \frac{dU}{dI} = k_R \cdot \operatorname{tg} \beta$$

Na slici 3.5 se vidi da je taj diferencijalni otpor proporcionalan tangensu kuta β , dakle gradientu krivulje, pa on može biti i negativan, dok je R_{stat} uvijek pozitivan. Negativne vrijednosti poprima R_{dlt} na onom dijelu karakteristike gdje se pri povećanju napona dobiva smanjivanje jakosti struje.



Sl. 3.5. Statički i dinamički (diferencijalni) otpor.

Kao uvid u to kako se računa faktor k_R i pomoću njega otpor R neka nam posluži karakteristika linearnog otpornika predočenog na slici 3.4. Tu su upotrijebljena slijedeća mjerila

$k_U = 10/3$, jer nam 3 cm predočuju napon od 10 V,

$k_I = 1/2$, jer nam 2 cm predočuju struju od 1 A, pa je

$$k_R = \frac{10}{3} : \frac{1}{2} = \frac{20}{3}$$

Pri izračunavanju otpora R treba još odrediti $\operatorname{tg} \alpha$ a taj je npr. uz pomoć točke A , jednak

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4,5 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 1,5$$

Prema tome je $R = k_R \cdot \operatorname{tg} \alpha = 20/3 \cdot 1,5 = 10 \text{ } \Omega$, što slijedi i onda ako računamo s voltima i amperima, jer je za točku A

$$U = 15 \text{ V}, \quad a \quad I = 1,5 \text{ A}, \quad \text{pa je} \quad R = \frac{15}{1,5} = 10 \text{ } \Omega$$

3.6.

PRAZNI HOD I KRATKI SPOJ IZVORA

Pogledajmo sada jednadžbu Ohmova zakona u obliku

$$I = \frac{U}{R}$$

Ona kaže da je struja* direktno proporcionalna naponu, a obrnuto proporcionalna otporu strujnog kruga. Ovu ćemo jednadžbu iskoristiti pri izračunavanju nepoznate struje, ali nam za to moraju biti poznati napon i otpor.

Uz pretpostavku da izvor na stezaljkama ima stalan napon U , bit će struja što je daje izvor u strujni krug ovisna samo o otporu R , koji je priključen na stezaljke. Tu se mogu promatrati sva moguća opterećenja izvora, no osobito su karakteristična dva opterećenja a koja dobivamo za granične vrijednosti otpora R .

Budući da je u praksi često napon naših izvora stalan, ima ovo razmatranje ne samo teoretsku, već i veliku praktičku važnost.

Granične vrijednosti unutar kojih se uopće može mijenjati otpor R jesu teoretski $R = 0$ i $R = \infty$. To bismo u realnosti mogli okarakterizirati ovako

- a) praktički vrlo mali otpori i
- b) vrlo veliki otpori

Ako je $R = \infty$, izlazi da je struja $I = U/\infty = 0$. To znači da ako na stezaljke izvora nije priključeno trošilo, ako dakle strujni krug nije vodljivo zatvoren, neće teći struja, pa takvo pogonsko stanje izvora nazivamo neopterećenim stanjem ili praznim hodom izvora, slika 3.6.

U praznom hodu, dakle, izvor posjeduje napon koji je spreman da potjera struju, no jer se između stezaljke nalazi izolator ($R = \infty$), struja ne teče.

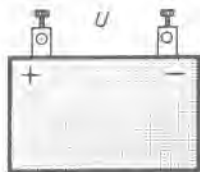
* U praksi se obično zbog jednostavnosti umjesto naziva jakost struje upotrebljava samo skraćeni naziv: struja.

Drugo granično opterećenje izvora imamo kad je otpor R jednak nuli, a tada je struja

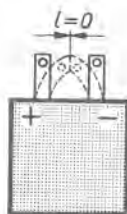
$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{0} = \infty$$

dakle beskonačno velika. Dakako da je beskonačna jakost struje samo teoretski podatak, jer otpora $R = 0$ u normalnim prilikama nema. No praktički bi svaki zanemarivo mali otpor uz stalan napon ipak uzrokovao golemu jakost struje.

Kako možemo zamisliti da se ovakvo opterećenje izvora može ostvariti? Da otpor na stezaljke izvora priključenog vodiča bude jednak nuli, izraz $R = \rho \cdot l/S$ treba da bude jednak nuli, što se može postići ako je duljina priključenog vanjskog vodiča jednaka nuli. To, dakle, znači da je strujni krug zatvoren tako da su njegove stezaljke na najkraćoj udaljenosti $l = 0$ međusobno direktno povezane. Kažemo da smo stezaljke kratko spojili, pa zato ovakvo pogonsko stanje izvora zovemo kratkim spojem, slika 3.7.



Sl. 3.6. Prazni hod izvora (neopterećeno stanje).



Sl. 3.7. Kratki spoj izvora.

Makar da se doista ne postizavaju u kratkom spoju beskonačno velike jakosti struja (jer u strujnom krugu uvijek postoji neki konačni otpor), ipak je sigurno da će jakost struje kratko spojena izvora biti najveća moguća što je izvor uopće može dati.

Pri svim ostalim opterećenjima, kada dakle na izvor priključujemo otpore $0 < R < \infty$, imat će struja što je daje izvor neku jakost koja je određena jednadžbom

$$I = \frac{U}{R}$$

Dakako da se izvori ne smiju opteretiti prejakom strujom, jer znamo da struja u strujnom krugu prolazi i kroz izvor pa bi ga, ako je prejaka, mogla i oštetiti. Zato konstruktor izvora treba da označi vidljivo na samom izvoru kolika je maksimalno dopuštena jakost struje što je izvor može trajno davati, a da pri tome sam ne strada.

Budući da se ta vrijednost struje mora na natpisnoj pločici izvora naznačiti uz ostale karakteristične podatke, zovemo je nazivnom ili nominalnom jakošću struje I_n .

3.7.

NAZIVNE VELIČINE U ELEKTROTEHNICI

I druge veličine koje su vezane uz konstrukciju, a za neku električku napravu su od bitne važnosti, moraju se označiti na natpisnoj pločici, pa se i one zovu nominalne vrijednosti.

Trošila su također konstruirana tako da mogu u trajnom pogonu podnositi samo neku maksimalno dopuštenu struju. Budući da struja trošila ovisi o naponu na koji će ono, npr. sijalica, biti priključeno, redovno se na trošilima široke potrošnje ne naznačuje kao nominalni podatak jakost struje, već napon. Nestručnjaci i onako ne bi mogli mjerenjem provjeravati jakost struje, pa zato za njih taj podatak nije interesantan. Međutim će korisnici električke energije koji svoja trošila priključuju na izvor ove energije redovno ipak poznavati napon, jer se baš za priključak trošila široke potrošnje primijenjuje samo ograničen broj raznih napona.

Tako se prema propisima nominalnim naponima za priključak trošila smatraju slijedeći brojevi volta (navodimo neke najvažnije)

$$1,5; 2; 3,5; 4; 6; 8; 12; 24; \dots 42; \dots 110; 220; 380^*$$

Danas je gotovo svagdje gradska (odnosno zemaljska) mreža napajana naponom 220 V, pa se trošila široke potrošnje konstruiraju tako da uz priključak na taj napon kroz njih prolazi dopuštena jakost struje.

Korisnici drugih izvora, npr. akumulatorskih baterija u automobilima, znadu koliki je napon njihove baterije, pa trošila nabavljaju za taj napon.

Dakako da će na trošilima koja su u pogonu pod nadzorom stručnjaka, a to su npr. elektromotori u industrijskim postrojenjima, naznačena biti i nominalna struja, jer su u takvim većim instalacijama redovno ukopčani i ampermetri za kontrolu jakosti struje.

3.8. PAD ILI POTROŠAK NAPONA I ELEKTRIČKI PROTUNAPON

Treći oblik jednadžbe Ohmova zakona

$$U = I \cdot R$$

koristi se u proračunima onda kada treba odrediti koliki mora biti napon izvora U , da bi kroz zadani otpor R potjerao struju zadane jakosti I .

No ta nam jednadžba može još mnogo više reći o naponskim prilikama u zatvorenom strujnom krugu.

Ako se naime — prema slici 3.8 — osim voltmetra V_1 koji mjeri napon izvora U ili E , uključi još jedan voltmetar V_2 na stezaljke otpornika R , što smo ga direktno vezali na izvor, mjerit će taj drugi voltmetar napon stvoren na otporniku U_R .

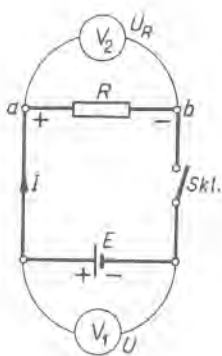
* Detaljnije podatke vidi: D. Kaiser, Elektrotehnički priručnik.

Pokus pokazuje da je napon U_R po broju volta točno jednak naponu izvora. Vrijedi, dakle, jednačba

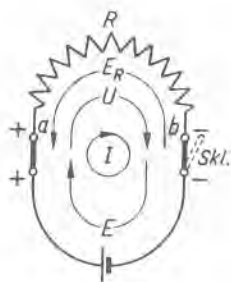
$$U_R = U \quad \text{a jer je} \quad U = I \cdot R \quad \text{slijedi} \quad U_R = I \cdot R$$

Postojanje toga napona U_R na stezaljkama otpornika možemo, dakle, prema jednačbi $U_R = I \cdot R$ pripisati baš prolasku struje kroz otpornik. A o tome se lako možemo uvjeriti tako da sklopom prekinemo tok struje, jer čim nestane struje, nestat će i napon U_R .

No ipak, makar smo ovako matematički formalno pripisali nastajanje napona U_R prolasku struje I kroz otpor R , ne smijemo zaboraviti da se je — fizikalno gledano — napon na stezaljkama otpornika R pojavio baš zato što su direktnim priključkom otporniku na njegove krajeve privedena ista električna stanja (potencijali) koja ima izvor na svojim stezaljkama.



Sl. 3.8. Potrošak napona za prolaz struje kroz otpor.



Sl. 3.9. Protunapon i pad napona na omskom otporu.

Pogledajmo sada još detaljnije taj napon na otporniku R s obzirom na njegov polaritet i s obzirom na smjer njegova djelovanja, slika 3.9.

Priključkom na izvor postala je stezaljka a otpornika električki pozitivna, a stezaljka b negativna, pa zbog te razlike električkih stanja postoji napon. Taj napon potjerat će struju kroz priključeni otpornik u smjeru od a prema b , pa naponu stezaljki a i b pridajemo smjer od a prema b , kako je u slici naznačeno, jer smatramo otpornik R vanjskim dijelom strujnog kruga.

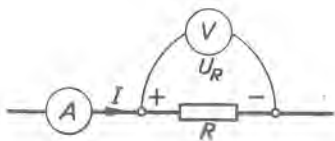
No pojava različitih električkih stanja na stezaljkama a i b otpornika R daje nam pravo da unutar zatvorene konture strujnog kruga smatramo ovu razliku kao u unutrašnjosti samog otpornika stvoreni unutarnji napon E_R .

Taj napon ima, kao i svi stvoreni naponi, u strujnom krugu smjer od $(-)$ pola prema $(+)$ polu. Na slici se vidi da je smjer djelovanja ovako definiranog napona E_R suprotan smjeru elektromotorne sile izvora E , pa možemo napisati jednačbu

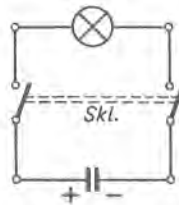
$$E_R = -E$$

Zbog toga se može napon stvoren pri prolazu struje kroz otpor smatrati om-
skim protunaponom, pa se značenje jednadžbe $E + E_R = 0$ može fizikalno formu-
lirati ovako:

U zatvorenom strujnom krugu suma aktivnog napona izvora i protunapona
stvorenog na otporu jednaka je nuli, što znači da se sav unutarnji napon izvora
 E potrošio za svladavanje protunapona E_R , odnosno potrošio za svladavanje ot-
pora na koji nailazi struja pri prolazu kroz otpornik R .



Sl. 3.10. Određivanje polariteta pada
napona na otporu.



Sl. 3.11. Izbijanjem kondenzatora kroz
sijalicu nestaje napon.

Oba napona, E i E_R , su međusobno uravnoteženi, a ta ravnoteža se naziva
dinamička ravnoteža, jer je uvjetovana gibanjem elektriciteta kroz otpornik, dakle
strujom.

Ako bismo, naime, zamislili da je napon E_R po iznosu nešto manji od E ,
onda diferencija $E - E_R$ ne bi bila jednaka nuli, već bismo imali neki suvišak
aktivnog napona izvora, zbog kojeg će se struja dodatno povećati do onog iznosa,
dok se ne postigne ravnoteža E i E_R .

Iako smo razmatranja o naponu stvorenom na otporniku R izveli prema
slici 3.8 za jednostavni zatvoreni strujni krug, ipak jednadžbe

$$U_R = I \cdot R$$

$$E_R = - I \cdot R$$

vrijede, kako pokusi pokazuju, općenito, pa možemo reći: kad god kroz neki ot-
pornik otpora R , makar kakvog električkog uređaja, prolazi struja jakosti I , po-
javit će se na njegovim krajevima napon koji je po iznosu jednak umnošku struje
i otpora, slika 3.10. *Stezaljka na koju struja ulazi je pozitivna, a izlazna je stezaljka
negativna.*

Dakako da se pri numeričkom izračunavanju vrijednosti napona prema gornjim
jednadžbama moraju koristiti jedinice koherentnog Giorgijeovog sistema. Ako je,

na primjer, zadano $R = 0,25 \text{ M}\Omega$, $I = 4 \text{ mA}$, ne smije se naprosto pomnožiti $0,25 \cdot 4$, nego valja računati ovako

$$U_R = 0,25 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 1000 \text{ V}$$

Da se doista u strujnom krugu troši napon za prolaz struje kroz otpore, pokazuje primjer na slici 3.11. Nabijena lajdenska boca može protjerati struju kroz priključenu sijalicu samo kratak trenutak, jer čim se potroši njezin napon struja više ne teče i sijalica ne svijetli.

Činjenica da nam naši električki izvori mogu stalno dobavljati struju makar se i njihov napon troši objašnjava se time što su ti izvori takve električke naprave u kojima se napon, a to je razlika električkih potencijala njihovih polova, stalno obnavlja. To se vrši, kako je već uvodno spomenuto, utroškom različitih vrsta energija koje se u izvoru pretvaraju u električku energiju.

U nizu različitih vrsta električkih izvora koje ćemo upoznati u daljnjim razmatranjima, mogli bismo ovdje samo informativno spomenuti da se transformacija strane energije u električku može u izvoru vršiti na taj način, da se u izvoru dobije neki određeni konstantni unutarnji napon (elektromotorna sila) E , pa takve izvore u idealnom slučaju nazivamo naponskim izvorima. No moguće je u principu i drugi idealizirani način transformacije, naime, da se u unutrašnjosti izvora stvara konstantan tok elektriciteta. Takvi idealni izvori zovu se strujni izvori.

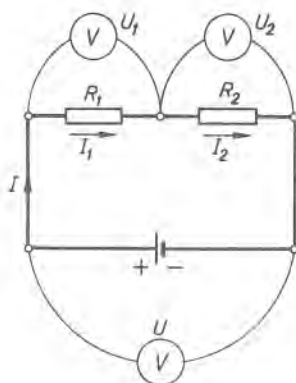
4. SASTAVLJENI STRUJNI KRUGOVI ISTOSMJERNE STRUJE

U daljnjoj analizi električkih strujnih krugova treba razmotriti i one koji su sastavljeni tako da je na jedan električki izvor priključeno više otpornika.

Pri tome su u principu moguća dva osnovna spoja: serijski i paralelni spoj otpornika. Dakako da se mogu oba ova načina spajanja kombinirati, pa se tako dobivaju najrazličitije spojne sheme otpornika.

4.1. SERIJSKI SPOJ OTPORA. UPLIV OTPORA DOVODA

Pogledajmo najprije serijski spoj dvaju otpornika na jedan izvor struje. Slika 4.1 prikazuje takav spoj, gdje se vidi da je dobiven pri tome jedan jednostruko zatvoren električki strujni krug u kojem,



Sl. 4.1. Serijski spoj dvaju otpora priključen na jedan izvor struje.

prema prije spomenutom principu nestlačivog strujanja elektriciteta, mora biti struja na svakom mjestu strujnog kruga jednake jakosti. To bi se, dakako, moglo i mjerenjem potvrditi, ako se u strujni krug uključe tri ampermetra koji će pokazati da su struje kroz otpornike R_1 i R_2 jednake struji I koju izvor daje ovome spoju.

S druge strane, može se mjerenjem pomoću tri voltmetra utvrditi da će zbroj napona U_1 i U_2 koji se troše za prolaz struje kroz otpornike biti točno jednak naponu izvora U . I u tom složenom primjeru troši se, dakle, također sav napon izvora na ono što je na stezaljke izvora priključeno.

Prema tome mogu se strujne i naponske prilike za ovaj serijski spoj otpornika prikazati s ovim jednadžbama

$$I = I_1 = I_2$$

$$U = U_1 + U_2$$

Za svaki napon na otporniku vrijedi međutim jednadžba (III) Ohmova zakona, koja općenito glasi $U = I \cdot R$, pa imamo

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = I \cdot R_1$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = I \cdot R_2$$

Naponska jednadžba može se, dakle, prikazati u obliku

$$U = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = I \cdot (R_1 + R_2)$$

a ako se cijela jednadžba podijeli sa I dobiva se

$$\frac{U}{I} = R_1 + R_2$$

Tu nam na lijevoj strani jednadžbe kvocijent U/I predoduje omjer napona izvora i struje izvora, a to je prema općenitoj definiciji otpor R onog dijela strujnog kruga koji je priključen na stezaljke izvora. U promatranom primjeru taj je otpor sadržan u serijskoj kombinaciji dvaju otpornika, pa je vrijednost U/I jednaka rezultatnom otporu R ove kombinacije

$$R = R_1 + R_2$$

Rezultantni otpor serijskog spoja dvaju otpornika jednak je, dakle, sumi obaju otpora.

Analognim izvođenjem dobili bismo da je za serijski spoj bilo koliko n uključenih otpornika vrijednost rezultatnog otpora jednaka

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

gdje je R_i otpor i -tog otpornika.

Riječima se, dakle, ova jednadžba može izraziti ovako: rezultatni otpor serijski uključenih otpornika jednak je zbroju otpora svih pojedinih otpornika.

Iz jednadžbe $U/I = R_1 + R_2 = R$ slijedi da je

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad \text{dakle} \quad I = \frac{U}{R}$$

Svako novo dodavanje serijski uključenih otpornika smanjuje pri stalnom naponu izvora jakost struje, jer se zbog povećanja nazivnika smanjuje vrijednost razlomka.

Pogledajmo osnovnu naponsku jednadžbu $U = U_1 + U_2$. Prema prijašnjem kada je na izvor bio priključen samo jedan otpornik, imamo sada u pogledu naponskih prilika slijedeću razliku: dok je prije sav napon izvora bio predan u punom

iznosu samo jednom otporniku, pa su voltmetri pokazali da je $U = U_R$, sada je $U = U_1 + U_2$, što znači da se napon izvora podijelio na pojedine otpornike. Budući da smo u gornjoj jednadžbi uzeli U_1 i U_2 istog predznaka kao i U , smatramo U_1 i U_2 dijelovima napona izvora, pa ih zovemo komponentama cijelog napona U . Ako bismo računali s omskim protunaponima u otpornicima R_1 i R_2 , dakle s veličinama E_1 i E_2 , mogli bismo napisati jednadžbu

$$E_1 + E_2 = -E$$

Gornja osnovna naponska jednadžba matematički izražava činjenicu da će se uvijek cio napon izvora podijeliti na dijelove koji se predaju pojedinim otpornicima, no ova jedna jednadžba sama ne može još pokazati koliki su ti pojedini naponi. Pri izračunavanju ovih dviju nepoznanica druga potrebna jednadžba dobiva se iz Ohmova zakona

$$U_1 = I \cdot R_1$$

$$U_2 = I \cdot R_2$$

odakle slijedi

$$U_1 : U_2 = R_1 : R_2$$

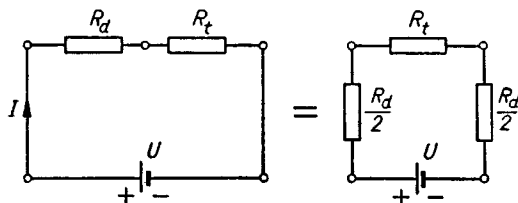
Prema tome će otpornik većeg broja oma preuzeti odgovarajuće veći dio napona izvora.

Slične jednadžbe dobile bi se za više serijski ukopčanih otpornika na jedan izvor napona U . Tada bismo imali

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$U_1 : U_2 : \dots : U_n = R_1 : R_2 : \dots : R_n$$

Na osnovi prijašnjih relacija moguće je sada korigirati prvotno postavljenu pretpostavku da je vod kojim povezujemo izvor s trošilom bez otpora. U zbilji svaki vod posjeduje neki otpor, a kako je cio vod sastavljen od dva usporedno postavljena dovodna vodiča jednake duljine, možemo smatrati da je ukupni otpor voda R_d jednak



$$R_d = 2 \cdot \rho \cdot \frac{l}{S}$$

Sl. 4.2. Uračunavanje utjecaja dovodnih žica.

Polovica $R_d/2$ otpada dakle na jedan vodič, a druga polovica na drugi vodič, slika 4.2.

Ako sada u nadomjesnoj shemi označimo sa R_t otpor trošila, a R_d je otpor voda (slika 4.2), onda imamo opet osnovnu spojnu shemu dvaju serijski ukopčanih otpora. Primjenjujući na ovu shemu prije dobivene rezultate možemo vidjeti kako će sada u pogonu raditi trošilo.

Tu su moguća dva načina razmatranja koja, dakako, moraju dati iste rezultate.

Prvo ćemo upotrijebiti naponsku jednadžbu, u kojoj napone umjesto indeksima 1 i 2 označimo indeksima d (dovod) i t (trošilo).

Imamo, dakle

$$U = U_t + U_d$$

pa je

$$U_t = U - U_d$$

a jer je

$$U_d = I \cdot R_d,$$

slijedi

$$U_t = U - I \cdot R_d$$

Oдавде се види да је трошћлу приведени напон U_t за износ потрошеног напона у воду U_d мањи од напона извора U . Ако би, дакле, извор имао сталан напон који је једнак номиналном напону трошћла, па ако би се морао узети у обзир и отпор вода, трошћло у погону не би радило пуним номиналним напонем, већ смањеним, због чега би јакост струје, па и учинак трошћла, били мањи. Да би трошћло ипак путем вода добило свој номинални напон за који је израђено, извор треба да има за износ пада напона у воду већи напон од напона трошћла

$$U' = U_t + I \cdot R_d$$

Taj pad napona u vodu računa se opet kao umnožak otpora voda sa strujom u vodu.

Umjesto da računamo tako da smanjenu struju u trošћlu pripisujemo smanjenom privedenom naponu trošћла U_t , možemo i na drugi način odreditи ovu smanjenu struju zbog otpora voda. Prema Ohmovu zakonu struju u trošћlu određujemo kao struju cijelog strujnog kruga, a ona је sada мања, јер се укупни отпор круга повећао због отпора вода

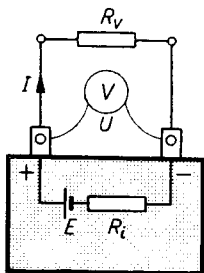
$$I = \frac{U}{R_t + R_d}$$

Vidimo, дакле, да ће се у пракси трошћлу приведени напон обично нешто разликовати од његовог номиналног напона. Ипак сматрамо да трошћло може још правилно радити у погону ако се њему приведени напон не разликује много од предвиђеног номиналног. Prema propisima сматра се да трошћло још може правилно функционирати ако се приведени напон од номиналног разликује за одређени постотак од номиналног напона. Тако су за жеруље ове толеранције око $\pm 4\%$, док се за motore допуштају и нешто веће вриједности.

4.2. VANJSKA KARAKTERISTIKA REALNIH NAPONSKIH IZVORA

Na sličan se način uračunava i utjecaj unutarnjeg otpora samog izvora. Moramo, naime, imati na umu da su i izvori izrađeni od realnih materijala koji posjeduju izvjesni električki otpor. U točnijim proračunima treba i taj otpor uzeti u obzir.

U elektrotehničkoj praksi vrlo često imamo takve električke izvore u kojima se transformacija strane energije u električku vrši na taj način da se pri tome dobije konstantan unutarnji napon E (elektromotorna sila). Pri opterećenju, kad izvor daje struju trošilu, imamo tok struje i kroz materiju samog izvora, pa možemo zamisliti da je i unutarnji otpor izvora protjecan istom strujom koja prolazi kroz priključeno trošilo. Na slici 4.3 možemo prema tome nacrtati nadomjesnu shemu realnog izvora tako da u seriji s idealnim naponskim izvorom, koji ima jedino elektromotornu silu E , serijski povežemo unutarnji otpor izvora R_i .



Sl. 4.3. Nadomjesna shema realnog naponskog izvora.

Kada, dakle, na stezaljke izvora priključimo trošilo s vodom, možemo zamisliti da će u zatvorenom strujnom krugu biti na napon E priključena u serijskom spoju dva otpora i to unutarnji otpor izvora R_i i vanjski priključeni otpor R_v , a taj je rezultatni otpor od trošila i voda.

I ovdje možemo iskoristiti osnovne jednadžbe serijskog spoja dvaju otpora na jedan izvor napona E , a taj je sada unutarnji napon izvora.

Imamo, dakle

$$I = \frac{E}{R_i + R_v}$$

a dalje je $E = I \cdot R_v + I \cdot R_i$, pri čemu je $I \cdot R_v$ napon priveden vanjskom dijelu strujnog kruga. Budući da je taj dio priključen baš na stezaljke izvora, označujemo $I \cdot R_v$ opet kao napon stezaljki slovom U , pa je

$$E = U + I \cdot R_i$$

s odavde slijedi da je vanjski napon ili napon stezaljki realnog izvora

$$U = E - I \cdot R_i$$

gdje je $I \cdot R_i = \Delta E$ potrošeni napon ili pad napona u samom izvoru.

Uz pretpostavku da su E i R_i konstantne veličine, predstavlja nam jednadžba

$$U = f(I)$$

vanjsku karakteristiku izvora, sl. 4.4. U koordinatnom sustavu (U, I) predoduje nam v graf ove jednadžbe kako se s promjenom struje I mijenja vanjski napon

na stezaljkama izvora. Za praksu je od osobite važnosti da se znade kakvi se naponi dobivaju na stezaljkama izvora pri raznim priključenim trošilima, jer je baš taj napon važan za ispravan rad trošila.

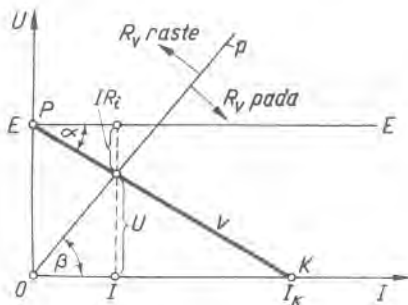
Linearnu jednadžbu

$$U = E - R_i I$$

prikazuje u koordinatnom sustavu (U, I) pravac v , koji ima fizikalni smisao samo u prvom kvadrantu od početne točke P do krajnje točke K .

Za bilo koju struju I , koju nanosimo kao opscisu, dobivamo napon na stezaljkama U kao ordinatu do pravca v , dok će preostali dio od v do horizontale E predstavljati pad napona u izvoru $I \cdot R_i$.

Struja I u ovom prikazanom spoju može se mijenjati samo promjenom otpora R_v onog dijela strujnog kruga koji je izvana priključen na stezaljke izvora. Budući da je napon stezaljki U upravo predan tom vanjskom otporu, struja i napon povezani su također relacijom $U = I \cdot R_v$, koja predstavlja Ohmov zakon za vanjski dio strujnog kruga.



Sl. 4.4. Vanjska karakteristika naponskog izvora.

U koordinatnom sustavu U, I , u kojemu je prikazana vanjska karakteristika izvora v , moguće je ucrtati još i pravac p , koji prema jednadžbi $U = R_v \cdot I$ predstavlja karakteristiku vanjskog priključenog otpora R_v . Taj pravac izlazi iz ishodišta pod kutom β , čiji je $\text{tg } \beta :: R_v$.

Kako je napon U jedan te isti, bilo da ga promatramo kao ordinatu vanjske karakteristike v , bilo kao ordinatu pravca p , to će uz neki zadani $R_v = k_R \cdot \text{tg } \beta$ sjecištem oba pravca v i p biti određeno pogonsko stanje izvora opterećenog vanjskim otporom R_v .

Ako se mijenja R_v mijenja se nagib pravca p , a time i presjecište kao radna točka na vanjskoj karakteristici.

Točki P karakteristike pripada struja $I = 0$, pa prema tome P odgovara praznom hodu izvora. U tom slučaju je vanjski napon na stezaljkama U jednak unutarnjem naponu (elektromotornoj sili) E . Dakle je $U_0 = E$ ako indeksom 0 označimo vrijednosti koje se odnose na prazan hod. Ta činjenica omogućuje nam da mjerenjem odredimo u unutrašnjosti izvora stvoreni napon, jer se u praznom hodu taj unutrašnji napon pojavljuje u punom iznosu na stezaljkama izvora.

Druga krajna točka dijagrama predstavlja ono pogonsko stanje kad je napon na stezaljkama jednak nuli: $U = 0$. To stanje je kratak spoj stezaljki izvora kad je strujni krug zatvoren bez vanjskog otpora, odnosno kad je $R_v = 0$. U tom pogonskom stanju struji pruža otpor samo unutarnji otpor izvora R_i , pa je struja (oznaka kratkog spoja je indeks k)

$$I_k = \frac{E}{R_i}$$

Ovu jednadžbu dobili bismo i iz naponske jednadžbe vanjske karakteristike ako stavimo za $U = 0$. Tada je

$$0 = E - I_k \cdot R_i$$

pa je $E = I_k \cdot R_i$, što znači da se u kratko spojenom izvoru sav stvoreni unutarnji napon potroši u samom unutarnjem otporu.

Struja I_k je najveća koja može teći u realnom izvoru. Ona je redovno mnogo puta veća od dopuštene nominalne struje I_n , pa je zato kratki spoj izvora opasan za izvor.

Na osnovi prijašnjih izvoda vidimo da bi se glavni parametri nekog realnog izvora, a to su E i R_i , mogli teoretski odrediti na osnovi podataka koje bismo dobili mjerenjem napona U_0 u praznom hodu i struje I_k u kratkom spoju izvora. Te dvije jednadžbe jesu

$$E = U_0 \quad \text{i} \quad R_i = \frac{U_0}{I_k}$$

Razumljivo je da prazan hod nije opasan za sam izvor, pa se podatak U_0 lako može izmjeriti, no mjerenje u kratkom spoju redovno se u praksi ne provodi jer bi prejak struja oštetila izvor. Budući da pri određivanju dviju traženih veličina, E i R_i , moramo svakako imati dvije jednadžbe, možemo dobiti na osnovi mjerenja pri bilo koja dva različita opterećenja (koja su još za izvor dopustiva) dvije jednadžbe iz kojih slijede traženi parametri izvora. To se obavlja tako da se raznim priključenim vanjskim otporima dobiju različite struje I_1 i I_2 i izmjere naponi U_1 i U_2 . Onda iz

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= E - I_1 \cdot R_i \\ U_2 &= E - I_2 \cdot R_i \end{aligned} \right\} \quad \text{slijedi} \quad E \text{ i } R_i$$

Koji puta kad je moguće u izvoru uz nepromijenjenu vrijednost R_i mijenjati iznos unutarnjeg stvorenog napona E (npr. pri rotacionim generatorima), može se uz pokus praznog hoda, dapače i tzv. pokusom kratkog spoja, dobiti druga potrebna jednadžba. Taj pokus kratkog spoja* vrši se tako da se uz kratko spojene stezaljke unutarnji napon E postepeno povisuje od nule samo do takvog iznosa da se dobije još upravo dopuštena nominalna jakost struje I_n . Taj smanjeni napon E_k naziva se napon kratkog spoja. Iz ovako provedenih mjerenja dobiva se

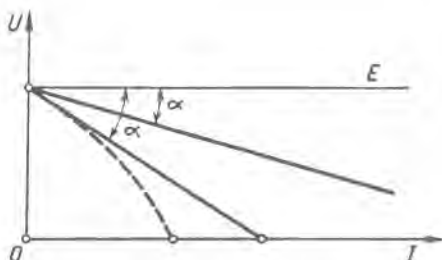
$$R_i = \frac{E_k}{I_n}$$

Iz dijagrama gdje je prikazana vanjska karakteristika izvora može se vidjeti utjecaj unutarnjeg otpora R_i na položaj ove karakteristike. Jednadžba $U = E - R_i \cdot I$ je jednadžba pravca, gdje je $R_i = k_R \cdot \tan \alpha$, pa je prikloni kut α to veći, što je R_i veće. Pravac v naglije pada što je R_i veće. To znači da će promjena napona U s promjenom opterećenja biti to veća, što je R_i veće, dok će pri malim vrijednostima R_i napon stezaljki biti manje ovisan o struji opterećenja. U idealnom napon-skom izvoru, gdje bi bio $R_i = 0$, a E konstantno, vanjska će karakteristika biti

* Treba, dakle, razlikovati fiktivni kratki spoj pri punom naponu E od pokusa kratkog spoja koji se vrši smanjenim E_k .

horizontalan pravac ($\alpha = 0$), pa je teoretski napon U stalan za sva opterećenja. Kako je točka kratkog spoja dana na vanjskoj karakteristici kao presjecište karakteristike s apscisnom osi, u ovom idealnom slučaju bila bi struja $I_k = \infty$, sl. 4.5.

U ovom razmatranju o vanjskoj karakteristici izvora pretpostavljeno je da su E i R_i konstantni parametri, što u naravi neće biti uvijek ispunjeno, pa tada karakteristika neće biti pravac, već neka krivulja, koja je na slici 4.5 predložena crtkano.

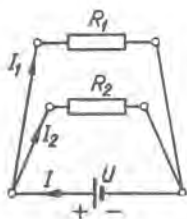


Sl. 4.5. Utjecaj unutarnjeg otpora na vanjsku karakteristiku izvora.

4.3.

PARALELNI SPOJ OTPORA

U nastavku razmatrat ćemo drugi karakteristični način spajanja otpornika, naime paralelni spoj dvaju otpornika na jedan zajednički izvor za koji pretpostavljamo da ima stalan napon stezaljki U . Na slici 4.6 prikazana je shema spoja otpornika R_1 i R_2 , odakle se vidi da je ovim načinom objema priključenim otpornicima priveden isti napon U . Možemo, dakle, za naponske prilike napisati jednadžbu



Sl. 4.6. Paralelni spoj dvaju otpora na jedan izvor struje.

$$U_1 = U_2 = U$$

Uslijed napona izvora prolazi kroz otpornik R_1 struja I_1 , a kroz otpornik R_2 struja I_2 . Prema tome u ovom primjeru imamo dva strujna kruga kojima je izvor zajednički, pa će struja izvora I biti jednaka sumi obiju struja I_1 i I_2 , dakle

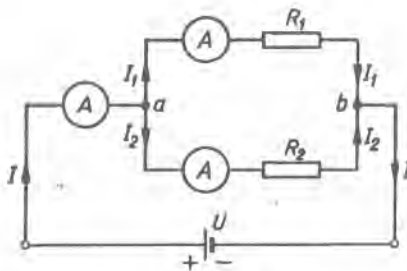
$$I = I_1 + I_2$$

Ukoliko je paralelni spoj oba otpornika na izvor vezan još nekim vodom, slika 4.7, i dijelovi voda pripadaju objema strujnim krugovima, pa i kroz vod prolaze obje struje, dakle ukupna struja izvora, što potvrđuju i ukopčani ampermetri.

Iz ovih jednadžba s kojima su karakterizirane strujne i naponske prilike

$$U = U_1 = U_2$$

$$I = I_1 + I_2$$



Sl. 4.7. Razdvajanje struje na dvije komponente i sastavljanje dviju struja u resultantnu struju.

slijedi, uz primjenu Ohmova zakona za pojedine struje, da je ukupna struja

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Ako ovu cijelu jednadžbu podijelimo sa U dobit ćemo

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Pri tome je $I/U = 1/R$, gdje je R veličina otpora svega što je na stezaljke izvora priključeno. R je dakle rezultatni otpor paralelnog spoja dvaju otpora, pa je

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Ako bismo umjesto dva paralelno vezana otpornika imali više njih — općenito n otpornika paralelno povezanih — dobili bismo analogan izraz, koji se može prikazati u obliku

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

Vidimo da je u paralelnom spoju više otpornika recipročna vrijednost rezultatnog otpora jednaka sumi recipročnih vrijednosti pojedinih otpora.

Taj recipročni odnos otežava numeričko proračunavanje rezultatnog otpora R . Već je izraz rezultatnog otpora pri paralelnom spoju dvaju otpornika dan složenijom formulom nego što je jednostavni izraz pri serijskom spoju. Tako dobijemo za R_1 i R_2 da je

$$\frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$$

a rezultatni otpor

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

dok bi rezultat kod tri paralelna otpornika bio još kompliciraniji, naime

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

4.4.

ELEKTRIČKA VODLJIVOST

Ipak se račun i u paralelnom spajanju otpornika može pojednostavniti ako umjesto otpora već od početka uvedemo u račun recipročnu vrijednost otpora kao vodljivost trošila

$$G = \frac{1}{R}$$

U tom slučaju bit će za veći broj paralelno vezanih trošila rezultatna vrijednost ukupne vodljivosti jednaka sumi vodljivosti pojedinih trošila

$$G = G_1 + G_2$$

ili općenito

$$G = \sum_{i=1}^n G_i$$

Za mjerenje ove novouvedene veličine, dakle za električku vodljivost, usvojena je jedinica koja se u počast Siemensu zove simens, a označuje slovom S. Iz jednadžbe $G = 1/R$ slijedi da će vodič imati vodljivost 1 S ako mu je otpor točno 1 Ω .

U vezi s uvođenjem pojma električke vodljivosti može se izvesti i jednadžba za proračun vodljivosti nekog vodiča. Iz

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \quad \text{slijedi} \quad G = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{S}{l}$$

pa se umjesto specifičnog otpora ρ računa sa specifičnom vodljivošću materijala

$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$

Tako možemo jednadžbe za R i G pisati i u obliku

$$R = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{S} \quad \text{i} \quad G = \kappa \cdot \frac{S}{l}$$

Promatrajući kako općenito na rezultatni otpor utječe svako novo priključivanje otpornika, lako možemo vidjeti da će u serijskom spajanju rezultatni otpor biti to veći što je više otpornika uključeno u strujni krug, dok će u paralelnom spoju dodavanjem sve više trošila rezultatni otpor bivati sve manji. Može se dakle utvrditi da će u serijskom spoju rezultatni otpor R uvijek biti veći od najvećeg ukopčanog otpora, dok će u paralelnom spoju rezultatni R biti manji od najmanjeg ukopčanog otpora.

Obrnute odnose imali bismo razmatrajući umjesto otpora vodljivosti.

Naročito je interesantno ako su svi pojedinačni otpori međusobno jednaki

$$R_1 = R_2 = R_3 = \dots = R_n$$

Tada je u spoju od n jednakih otpora za serijski spoj

$$R = n \cdot R_1$$

a za paralelni spoj

$$R = \frac{1}{n} R_1$$

Ako, na primjer, dva jednaka otpornika spojimo u seriju rezultatni je otpor dvostruko veći, dok je u paralelnom spoju rezultatni otpor samo polovica vrijednosti jednog otpora.

Jednadžbe Ohmova zakona, koje smo dosada pisali računajući s otporom R priključenim na napon U , možemo sada pisati i tako da umjesto otpora uzmemo vodljivost G . Te jednadžbe glase

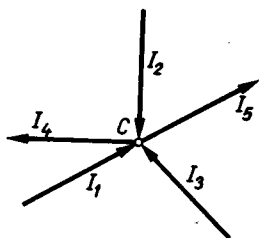
$$I = U \cdot G; \quad G = \frac{I}{U}; \quad U = \frac{I}{G}$$

4.5.

PRVI KIRCHHOFFOV ZAKON

Ako pobliže analiziramo strujne prilike za čvor a na slici 4.7, vidimo, da se u toj točki sastaju tri struje: I_1 , I_2 i I . Za te struje vrijedi jednadžba

$$I = I_1 + I_2$$



koja se riječima može objasniti ovako: struja koja u točku a dolazi (I), jednaka je zbroju struja koje iz te točke odlaze ($I_1 + I_2$). Isto tako strujna jednadžba za čvor b kaže da je zbroj struja koje dolaze ($I_1 + I_2$) jednak struji I koja iz toga čvora odlazi.

To, međutim, vrijedi i općenito za bilo koliko struja koje se u nekoj točki (čvoru) sastaju. Ako, na primjer, prema slici 4.8 u neku točku c dolaze struje I_1 , I_2 , i I_3 , a odlaze I_4 i I_5 , opet vrijedi odnos

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$$

Sl. 4.8. Čvor s više struja (uz I Kirchhoffov zakon).

Ova jednadžba može se napisati i u obliku

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

što se matematski jednostavnije piše simbolički

$$\text{alg} \sum_{i=1}^5 I_i = 0$$

I općenito za bilo koliko struja vrijedit će jednačdba

$$\text{alg} \sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Ovo je matematički izraz zakona koji se naziva I Kirchhoffov zakon, a riječima se može kazati da je algebarska suma svih struja koje se u jednoj točki sastaju jednaka nuli.

Pri tome izraz »algebarska« suma znači to da ćemo struje koje dolaze ka čvoru uzeti s jednim predznakom, a one koje iz njega odlaze uzet ćemo u sumiranju s protivnim predznakom.

U prijašnjem primjeru uzeli smo struje koje dolaze s pozitivnim predznakom, a one koje odlaze s negativnim. No mogli bismo raditi i obratno: struje koje odlaze uzeti s pozitivnim predznakom, a onda bi one koje dolaze trebale imati negativan predznak. Tada bi strujna jednačdba imala oblik

$$-I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

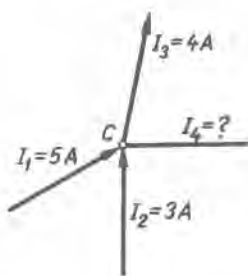
što također slijedi iz osnovnog izraza

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5.$$

Prvim Kirchhoffovim zakonom izražena je fizikalna činjenica da strujanje elektriciteta u strujnim krugovima ima karakter nestlačivog strujanja, pa pri strujanju elektriciteta mora u svakom trenutku iz promatrane točke toliko električkog naboja otići, koliko ga je tu u točku došlo.

Pomoću jednačdbe I Kirchhoffovog zakona može se izračunati jedna nepoznata struja, ako su sve ostale struje koje se sastaju u jednom čvoru poznate.

Neka su na slici 4.9 zadane struje $I_1 = 5 \text{ A}$, $I_2 = 3 \text{ A}$ koje dolaze u čvor, te struja $I_3 = 4 \text{ A}$ koja odlazi iz čvora. Osim toga je u tom čvoru priključen i vod četvrte struje I_4 koja je nepoznata i treba je odrediti. Da bismo za njeno proračunavanje postavili jednačdbu I Kirchhoffova zakona treba najprije po volji pripisati jednom smjeru struje pozitivan predznak i načiniti algebarsku sumu svih struja time, da minus predznak dobiju struje protivnog smjera. Budući da u jednačdbu mora ući i nepoznata struja, a kako joj ne znamo još ne samo iznos, već ni smjer, pretpostavit ćemo da ona ima jedan smjer. Ako u rezultatu dobijemo

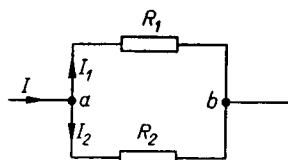


Sl. 4.9. Brojčani primjer za ilustraciju I Kirchhoffovog zakona.

uz traženu struju pozitivan predznak znači da smo dobro odabrali njezin smjer, a ako je dobiven predznak minus, znači da je smjer tražene struje suprotan onome koji smo pretpostavili.

Ako, dakle, u ovom primjeru odaberemo za struje koje dolaze predznak (+), a za one koje odlaze predznak (−), te ako pretpostavimo da će nepoznata struja I dolaziti ka čvoru, onda i njoj dajemo predznak (+). Primjenjujući I Kirchhoffov zakon dobivamo jednadžbu

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0$$



ili brojčano $5 + 3 - 4 + x = 0$ odakle je nepoznanica

$$x = 4 - 5 - 3 = -4$$

dakle je

$$I_4 = -4$$

Sl. 4.10. Određivanje komponenata I_1 i I_2 struje I koja se u čvoru grana u dvije grane:

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

što znači da tražena struja u jakosti od 4 A iz čvora odlazi, a ne ulazi u čvor, kako je to pretpostavljeno.

Ako na slici 4.10 promotrimo sa slike 4.7 izdvojen dio spojne sheme, možemo konstatirati da će za taj spoj vrijediti jednadžba I Kirchhoffova zakona $I = I_1 + I_2$. Fizikalno to znači da će se struja I , koja ulazi u kombinaciju dvaju paralelno povezanih otpornika, rastaviti na dvije komponente, I_1 i I_2 .

Da bismo odredili te struje potrebna nam je, osim gornje jednadžbe, još jedna, a tu dobivamo ako iskoristimo obje jednadžbe Ohmova zakona

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2}$$

koje podijeljene daju relaciju

$$I_1 : I_2 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2}$$

ili

$$I_1 : I_2 = R_2 : R_1$$

$$I_1 : I_2 = G_1 : G_2$$

To znači da se pri razdvajanju obje struje odnose obrnuto nego otpori pripadnih grana, ili direktno proporcionalno pripadnim vodljivostima.

I pri većem broju paralelno vezanih otpornika dobivaju se slično građene jednadžbe. Tako bismo npr. za tri otpornika, R_1 , R_2 i R_3 , imali

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 : I_2 = R_2 : R_1$$

$$I_3 : I_2 = R_2 : R_3$$

odakle se, uz zadane vrijednosti I , R_1 ; R_2 i R_3 , mogu odrediti tražene komponente I_1 , I_2 i I_3 .

Ovaj postupak primijenit će se općenito i na kompliciranije sheme ako treba odrediti komponente na koje se rastavlja neka zadana struja I .

Uspoređujući osnovne jednadžbe koje opisuju strujne i naponske prilike u serijskom i paralelnom spajanju trošila na jedan naponski izvor lako možemo vidjeti upotrebljivost jednog i drugog načina spajanja.

Kada želimo više trošila priključiti na jedan izvor, a da pri tome svakom trošilu bude osiguran isti pogonski napon, neovisno o tome da li će se neko trošilo iskopčati ili pak neko novo još prikopčati, upotrijebit ćemo paralelni spoj. Pri tome moraju, dakako, trošila sva biti građena za napon koji ima izvor, pa će onda i struja svakog trošila biti njegova nominalna.

Naprotiv, ukapčanje i iskapčanje nekih trošila u serijskom spoju više trošila na jedan izvor stalnog napona uzrokovalo bi zbog promjene resultantnog otpora promjenu struje, što bi onemogućilo ispravan rad trošila.

Ipak se može priključiti i više trošila u serijskom spoju na jedan izvor, ali pri tom moraju biti ispunjeni izvjesni uvjeti. U prvom redu, zbog strujne jednadžbe serijskog spoja

$$I_1 = I_2 = I_3 = \dots$$

moraju sva trošila biti građena za istu jakost struje, a napon izvora mora biti jednak sumi potrošenih napona svih ukopčanih trošila. Najjednostavniji je primjer ako su sva trošila jednaka, pa se onda n jednakih trošila može u serijskom spoju kao cjelina priključiti na napon izvora U , gdje je

$$U = n \cdot U_1$$

a U_1 napon jednog trošila.

Iako se u praksi zbog ovih ograničenja serijski spoj više trošila na jedna izvor rijetko susreće, ipak ima serijsko spajanje pojedinih dijelova u električkim strujnim krugovima veliku primjenu. Kao primjer spomenut ćemo serijsko ukopčanje promjenljivih otpornika, pomoću kojih se može u strujnom krugu regulirati jakost struje na neku željenu vrijednost.

Primjer: Sijalica za nominalni napon 220 V i nominalnu jakost struje od 0,5 A ne smije se direktno priključiti na napon od 380 V, jer bi zbog prejake struje za kratko vrijeme pregorjela. No ako joj dodamo u serijskom spoju određeni otpornik otpora R_d u kojem će se potrošiti suvišak napona, možemo je ipak priključiti na 380 V. Veličinu dodatnog otpora R_d određujemo tako da se u njemu pri prolazu struje 0,5 A mora potrošiti napon $380 - 220 = 160$ V. Dakle iz $0,5 \cdot R_d = 160$ slijedi vrijednost predotpora

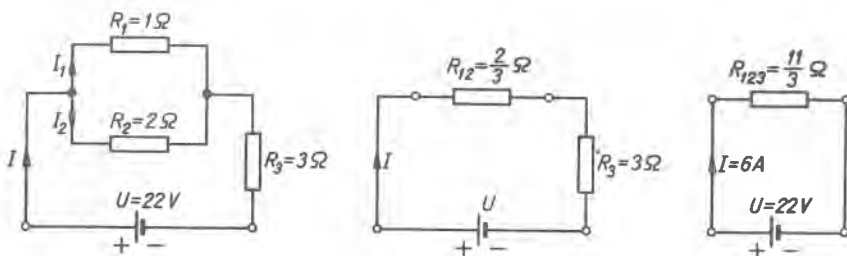
$$R_d = \frac{160}{0,5} = 320 \Omega$$

4.6.

KOMBINIRANO VEZANI OTPORI

Na jedan izvor mogu se priključiti otpornici koji su ne samo serijski ili samo paralelno, nego i kompliciranije međusobno povezani, a otpor što će ga »osjetiti« izvor na svojim stezaljkama kao rezultatni ovisit će baš o tome kako su otpornici spojeni.

Pri proračunavanju rezultatnog otpora R nastojat ćemo primijeniti oba osnovna pravila koja su izvedena za određivanje rezultatnog otpora serijski i paralelno vezanih otpornika. Jedna općenita formula ne može se dati za sve različite načine spajanja, već pri tome treba postepeno svoditi zadanu kompliciranu shemu na pojednostavnjene, tipične osnovne sheme.



Sl. 4.11. Brojčani primjer kombinirano vezanih otpora.

Kao primjer neka nam posluži spoj prikazan na slici 4.11, gdje su na izvor napona U priključeni otpornici R_1 , R_2 i R_3 , koji su povezani tako da je u seriju s otpornikom R_3 vezana paralelna kombinacija otpornika R_1 i R_2 .

Iz prikazanih pojednostavnjenih shema vidimo da se najprije može kombinacija paralelno spojenih otpornika R_1 i R_2 nadomjestiti rezultatnim R_{12} , a onda taj otpor R_{12} s otporom R_3 u serijskoj vezi daje konačno rezultatni otpor cijele kombinacije $R = R_{123}$. Uz slike su navedeni i numerički rezultati za pojedine nadomjesne otpore.

Izvor dakle, osjeća, cijelu ovu kombinaciju kao da je na nj priključen jedan jedini otpornik, čiji je otpor $R = 11/3 \Omega$. Zato će iz izvora poteći struja

$$I = \frac{U}{R} = \frac{22}{\frac{11}{3}} = 6 \text{ A}$$

a ta se u čvoru a dijeli na dva dijela: I_1 i I_2 , koji prolaze kroz otpornike R_1 i R_2 . Prema pravilu o razdvajanju struje mogu se izračunati jakosti tih struja i one iznose

$$I_1 = 4 \text{ A} \quad \text{a} \quad I_2 = 2 \text{ A}.$$

U čvoru b obje se struje sastaju i kroz R_3 prolazi struja I_3 , koja je jednaka zbroju $I_1 + I_2$, a to je baš struja I , koja se vraća u izvor

$$I_3 = I_1 + I_2 = I = 6 \text{ A}$$

Naponske prilike mogu se sada također točno odrediti, jer poznajemo sve struje i sve otpore. Tako se može provesti i kontrola potroška napona, jer znamo da ukupni potrošeni napon u otporima mora biti jednak naponu izvora

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 4 \cdot 1 = 4 \text{ V}$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ V}$$

$$U_3 = I_3 \cdot R_3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ V}$$

Ako bismo površno računali i naprosto zbrojili sve ove potrošene napone učinili bismo pogrešku, jer vidimo da je takav zbroj, tj. 26 V, veći od napona izvora koji je $U = 22 \text{ V}$, a to je nemoguće.

No ako pogledamo spojnu shemu, vidimo da je napon između čvorova a i b U_{ab} jedan te isti, bilo da ga označimo kao napon otpornika R_1 sa U_1 , ili kao napon otpornika R_2 sa U_2 . Budući da je taj napon zajednički za oba otpornika ne smijemo ga uzeti u račun dva puta, već samo jednom. Ispravnim računanjem dobivamo da je ukupni potrošeni napon

$$U_{ab} + U_3 = U_1 + U_3 = 4 + 18 = 22 \text{ V}$$

a to je upravo toliko koliko iznosi napon izvora, $U = 22 \text{ V}$.

4.7.

SERIJSKI SPOJ VIŠE IZVORA

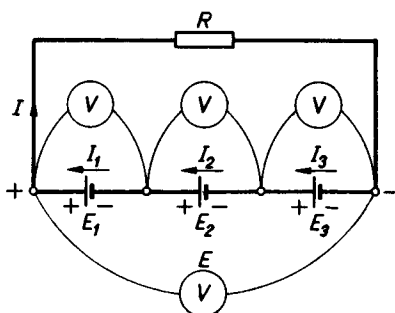
U strujnim krugovima koje smo do sada razmatrali imali smo uvijek različito spojene otpornike priključene samo na jedan izvor. Vidjeli smo da je moguće sve što je priključeno na izvor nadomjestiti jednim rezultatnim otporom, pa se tako svodila zadaća na rješavanje strujnog kruga sastavljenog od jednog izvora i jednog otpornika.

Može se, međutim, u praksi desiti da nam jedan izvor sam nije u stanju pravilno snabdijevati trošila bilo da mu je napon premalen, bilo da je njegova nominalna struja — dakle maksimalno dopuštena — manja od one koju zahtijeva priključeno trošilo. U takvim prilikama možemo ipak trošilima dobiti potrebni napon i struju ako ih napajamo električkom energijom iz više izvora, koje onda na razne načine povezujemo u zajedničku cjelinu.

Ako bismo u tu svrhu iskoristili kemijske izvore električke energije, onda spajanjem više takvih elemenata dobivamo takozvane baterije.

Promotrimo najprije serijski spoj više izvora, npr. tri, koji imaju unutarnje napone E_1 , E_2 i E_3 . Serijski spoj dobiva se tako da se, kako je na slici 4.12 naznačeno, pozitivni pol jednog izvora spoji s minus polom susjednog izvora, a pri tome onda preostali slobodni pozitivni pol prvog izvora i negativni pol posljednjeg izvora predstavljaju (+) i (−) pol cijele baterije. To su, dakle, priključne stezaljke na koje se veže vanjski dio strujnog kruga, koji neka ima otpor R .

Iz spojne sheme (sl. 4.12), gdje su ucrtani smjerovi djelovanja pojedinih napona E_1 , E_2 i E_3 , vidi se da svi ti naponi u strujnom krugu djeluju u istom smjeru, a kako se u krugu nadovezuju jedan na drugog, bit će ukupni napon baterije E jednak sumi svih ovih pojedinih napona. O tome bismo se lako mogli uvjeriti i mjerenjem pomoću voltmetra. Dakle



$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

U prvom razmatranju nećemo uzeti u račun unutarnje otpore izvora, pa će napon U na stezaljkama baterije biti jednak ovom rezultatnom unutarnjem naponu E .

Pod utjecajem toga napona dobiva se struja trošila

Sl. 4.12. Baterija sastavljena od tri elemenata u serijskom spoju.

$$I = \frac{U}{R}$$

a jer je u ovome spoju strujni krug jednostruko zatvoren, bit će struja I jednaka na svakom mjestu strujnog kruga. To znači da će i kroz svaki izvor prolaziti ista struja kao i kroz trošilo R . Ako označimo struje koje prolaze kroz izvore odgovarajućim indeksima, možemo napisati strujnu jednadžbu

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

Razmatrajući, dakle, na osnovi gornjih jednadžbi strujne i naponske prilike u ovome spoju, možemo lako vidjeti da će se serijski spoj više izvora upotrijebiti onda kad želimo postići viši napon od onoga što ga ima jedan izvor. Međutim strujna jednadžba, iako nam u pogledu strujnih prilika ne kaže ništa nova, važno je upozorenje da makar smo serijskim spojem, povećali napon, ne smijemo od baterije uzeti za trošila struju jaču nego što je maksimalno dopuštena (nominalna) jednog izvora. Ukoliko su izvori različitih nominalnih struja, moramo se ravnati prema onom izvoru čija je nominalna struja najmanja, kako taj ne bi stradao.

Ako bismo ovako serijski povezali općenito bilo koliko izvora, bio bi rezultatni napon

$$E = \sum_{i=1}^n E_i.$$

4.8.

SERIJSKI PROTUSPOJ I KOMPENZACIJA NAPONA

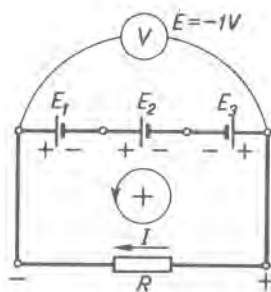
Za razliku od spoja prikazanog na slici 4.12, mogli bismo sastaviti bateriju opet od tri izvora u serijskom spoju, ali tako da je jedan izvor, npr. treći, obrnuto povezan s ostala dva.

Tako dobivamo nov spoj prema slici 4.13, gdje sada napon E_3 djeluje suprotno naponima E_1 i E_2 . No možemo reći i obratno: naponi E_1 i E_2 djeluju u smjeru protivnom naponu E_3 .

I ovdje će resultantni napon E biti stvoren od napona svih uključenih izvora, samo zbog različitih smjerova njihovog djelovanja treba umjesto aritmetičke sume uzeti algebarsku sumu svih pojedinih napona.

U općenitom slučaju za serijski spoj izvora vrijedi, dakle, jednadžba

$$E = \text{alg} \sum_{i=1}^n E_i$$



Sl. 4.13. Serijski protuspoj elementa 3.

Ovo algebarsko sumiranje provodit ćemo na taj način da odaberemo po volji smjer u kojem ćemo vršiti sumiranje napona i taj smjer smatramo pozitivnim. Idući od jednog kraja baterije prema drugome, treba pri zbrajanju napone čiji se smjer djelovanja poklapa sa smjerom sumiranja uzeti s pozitivnim predznakom, a one druge s negativnim.

Ako u rezultatu za ukupni napon baterije dobijemo pozitivni predznak, znači da je i smjer resultantnog napona E onaj koji smo u strujnom krugu odabrali kao pozitivan. Ukoliko bi predznak rezultante E bio negativan, znači da ona djeluje u suprotnom smjeru od pozitivno odabranog smjera.

Jedan brojčani primjer objasniti će najbolje ovo važno pravilo o računanju smjera napona. Neka su pojedini naponi na slici 4.13 zadani: $E_1 = 3 \text{ V}$, $E_2 = 2 \text{ V}$, i $E_3 = 6 \text{ V}$. Budući da je E_3 suprotna smjera od E_1 i E_2 , treba sumirati algebarski. Kao pozitivan smjer pri sumiranju odaberemo smjer suprotan kazalu na satu.

Budući da se smjerovi napona E_1 i E_2 podudaraju sa smjerom sumiranja, dobivaju ovi naponi predznak (+), dok će napon E_3 imati predznak (−). Dakle

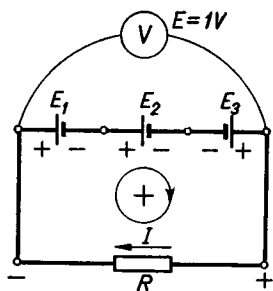
$$E = 3 + 2 - 6 = -1 \text{ V}$$

To znači da je resultantni napon E od jednog volta usmjeren suprotno od smjera sumiranja, pa će na slici 4.13 lijeva stezaljka biti negativan pol, a desna pozitivan. Struja I prolazi, dakle, kroz trošilo u naznačenom smjeru.

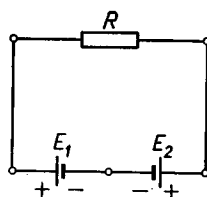
Međutim, isti bi se rezultat dobio i kad bismo pozitivni smjer pri sumiranju odabrali obratno, u smjeru kazala na satu. U tom bi slučaju, slika 4.14, trebalo u algebarskoj sumi uzeti E_1 i E_2 negativno, a E_3 pozitivno, pa bismo dobili

$$E = -3 - 2 + 6 = +1 \text{ V}$$

što znači da se smjer rezultantnog napona poklapa s pozitivno odabranim smjerom, a to je u ovom primjeru smjer kazala na satu. Na slici je i sada desna stezaljka pozitivan pol baterije, a lijeva negativan, dakle potpuno jednako kao što je dobiveno i prethodnim načinom.



Sl. 4.14. Serijski protuspoj elementa 1 i 2.



Sl. 4.15. Kompenzacija napona u serijskom protuspoju izvora.

Naročito je zanimljiv spoj dvaju izvora u serijskom protuspoju kao što je onaj na slici 4.15. Tu je algebarska suma obaju napona jednaka njihovoj diferenciji, pa za taj slučaj dobivamo jednadžbe

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R} = \frac{\Delta E}{R} = \frac{E}{R}$$

$$E = \Delta E = E_1 - E_2$$

Do djelovanja u strujnom krugu dolazi, dakle, pri serijskom protuspoju dvaju izvora samo njihova diferencija, a to znači da će viši napon najprije potpuno poništiti djelovanje nižeg napona i tek će s onim preostatom potjerati u strujnom krugu struju — dakako, prema Ohmovu zakonu.

Tu se, dakle, susrećemo s pojavom kompenzacije napona, koja će ako oba napona nisu jednaka po apsolutnim vrijednostima, biti tek djelomična. Ako su pak naponi E_1 i E_2 po apsolutnim iznosima jednaki nastat će potpuna kompenzacija napona, pa je

$$E = E_1 - E_2 = 0 \quad \text{i također} \quad I = \frac{E}{R} = 0.$$

Iako imamo u serijskom protuspoju dva dobra izvora sa ma kako visokim naponima, ako su oni po apsolutnim iznosima jednaki ne mogu dati struju, jer se oba napona potpuno poništavaju.

Princip kompenzacije napona iskorišćuje se u mnogim električkim sklopovima, osobito pri raznim preciznim mjerenjima.

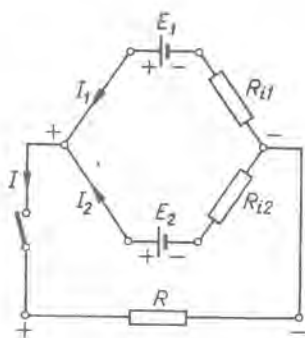
4.9.

PARALELNO VEZANI IZVORI

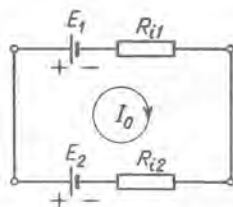
Drugi osnovni načini povezivanja izvora jest paralelni spoj. Taj se dobiva ako se, npr. za dva izvora, pozitivni pol jednoga spoji s pozitivnim polom drugog izvora, a negativni pol jednoga s negativnim polom drugog izvora. Zajednički pozitivni i negativni polovi predstavljaju pozitivni i negativni pol cijele baterije, slika 4.16.

Na slici se vidi da će u tom slučaju pri opterećenju nekim vanjskim trošilom, npr. otpornikom R , struja trošila I biti sastavljena od dvije komponente, tj. od struje I_1 što je daje prvi izvor i od I_2 drugog izvora. Primjenjujući na jednu stezaljku prvi Kirchhoffov zakon, dobivamo strujnu jednadžbu

$$I = I_1 + I_2$$



Sl. 4.16. Baterija sastavljena od dva paralelno vezana izvora napaja trošilo R .



Sl. 4.17. Baterija paralelno vezanih izvora u praznom hodu.

Što se tiče naponskih prilika, očito je da će naponi U_1 i U_2 na stezaljkama oba izvora biti točno jednaki, jer su im istopolne stezaljke međusobno direktno spojene. A kako su to i stezaljke cijele baterije, bit će to isto i napon cijele baterije, pa tako dobivamo naponsku jednadžbu

$$U = U_1 = U_2$$

Budući da su unutarnji naponi (elektromotorne sile) izvora E_1 i E_2 oni koji u biti stvaraju napone na stezaljkama, treba još pobliže ispitati i njihov utjecaj na rad tako složene baterije.

Pogledajmo najprije sastavljenu bateriju u praznom hodu, slika 4.17. Vidimo da je već sama baterija jedan zatvoren strujni krug u kojem djeluju unutarnji naponi izvora E_1 i E_2 , a u kojem su sadržani jedini otpori, unutarnji otpori izvora: R_{i1} i R_{i2} .

U promatranom strujnom krugu unutar same baterije oba napona su u serijskom protuspoju, pa dok još ni trošilo nije priključeno, može unutar baterije teći neka struja

$$I_0 = \frac{E_1 - E_2}{R_{i1} + R_{i2}} = \frac{\Delta E}{R_i}$$

Ovo je naročito važno za one baterije koje su sastavljene od pojedinih izvora čiji je unutarnji otpor veoma malen, kao što je to npr. kod akumulatora. Već mala razlika u naponima ΔE mogla bi kroz neznatni otpor $R_i = R_{i1} + R_{i2}$ potjerati veoma jaku struju I_0 što je, dakako, nepoželjno.

Da bismo se osigurali od te struje treba da je $\Delta E = 0$, pa zato pri paralelnom spajanju akumulatora (i ostalih kemijskih izvora) unutarnji naponi E_1 i E_2 moraju biti međusobni jednaki

$$E_1 = E_2$$

Pri opterećenju bit će, dakako, u ovome spoju strujne prilike definirane spomenutom jednadžbom I Kirchhoffova zakona, dok će za naponske prilike vrijediti jednadžba jednakosti napona stezaljki

$$U = U_1 = U_2$$

Kako pri tome za svaki izvor vrijedi poznata jednadžba vanjske karakteristike

$$U_1 = E_1 - I_1 \cdot R_{i1}$$

i

$$U_2 = E_2 - I_2 \cdot R_{i2}$$

uz gore navedeni zahtjev $E_1 = E_2$ i činjenicu da je uvijek $U_1 = U_2$, slijedi

$$I_1 \cdot R_{i1} = I_2 \cdot R_{i2}$$

što se može prikazati razmjerom

$$I_1 : I_2 = R_{i2} : R_{i1}$$

Prema tome će struje koje daju pojedini izvori biti obrnuto proporcionalne unutarnjim otporima izvora.

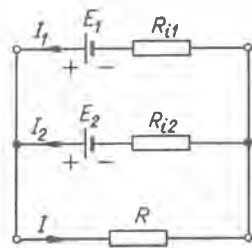
Vidimo, dakle, interesantnu činjenicu da iako su često unutarnji otpori izvora vrlo mali, oni igraju upravo bitnu ulogu u tome kako će se struja trošila I razdijeliti na pojedine izvore, jer sama jednadžba prvog Kirchhoffovog zakona nije dovoljna za određivanje struja I_1 i I_2 .

Ako bismo imali teoretski idealne izvore bez unutarnjih otpora, razdioba struja ne bi bila definirana i to bi bio neke vrsti matematički neodređen zadatak.

Gore prikazani razmjer, s kojim je određena razdioba struje I na pojedine izvore, vrijedi uz pretpostavku da su unutarnji naponi E_1 i E_2 paralelno vezani izvora jednaki.

Ako pak E_1 ne bi bilo jednako E_2 razdiobu ne bi određivali samo unutarnji otpori izvora, već bi i raznolikost unutarnjih napona također utjecala na iznos pojedinih komponenta I_1 i I_2 , slika 4.18.

I u tom slučaju moguće je odrediti iznose struja I_1 i I_2 , a i ukupnu struju trošila I , na osnovi prvotno postavljenih jednadžbi, a te kažu da je ukupna struja trošila I jednaka zbroju komponenta I_1 i I_2 , te da naponi na stezaljka-
ma paralelno vezanih izvora moraju biti jednaki baš onome naponu koji je priveden trošilu R . Imamo, dakle, tri jednadžbe za tri nepoznane: I , I_1 i I_2 , koje se mogu izračunati ako su zadani unutarnji naponi E_1 , E_2 i svi otpori, R_{i1} , R_{i2} i R . Te jednadžbe glase



Sl. 4.18. Razdioba struje trošila na pojedine paralelno vezane izvore.

$$I = I_1 + I_2$$

$$E_1 - I_1 \cdot R_{i1} = E_2 - I_2 \cdot R_{i2}$$

$$E_1 - I_1 \cdot R_{i1} = I \cdot R$$

I ovakav spoj trošila na dva različita izvora koji su paralelno povezani također se susreće u elektrotehničkoj praksi, pa će biti u daljnjim tumačenjima još detaljnije razmatran.

4.10. POTENCIJAL KAO POMOĆNA RAČUNSKA VELIČINA

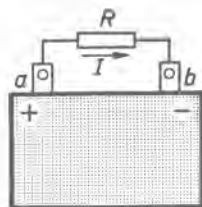
Iako će potencijal, kao važna fizikalna veličina, biti poslije detaljnije objašnjen, primijenit ćemo ovdje potencijal kao pomoćnu veličinu kojom ćemo često moći u analizi strujnih krugova naponske prilike prikazati znatno jednostavnije.

Pri definiciji napona već je rečeno da se općenito kao napon koji vlada među dvije točke treba smatrati razlika potencijala tih točaka, slika 4.19.

Možemo, dakle, za napon U_{ab} između točaka a i b napisati relaciju

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$$

gdje nam znače φ_a - potencijal točke a
 φ_b - potencijal točke b



Sl. 4.19. Napon izvora definiran kao razlika potencijala njegovih stezaljki.

Odavde se odmah vidi da je jedinica za mjerenje potencijala volt, dakle ista kao i za napon.

Budući da će nas konačno uvijek interesirati naponi, pa prema tome razlike potencijala, nije bitno koliki je numerički iznos samog potencijala pojedine točke. U razlici dvaju potencijala neće se, naime, ništa opaziti ako vrijednosti potencijala svih točaka za isti iznos povećamo ili za isti iznos smanjimo. Zato smijemo jednoj po volji odabranoj točki promatranog strujnog kruga pripisati da ima vrijednost potencijala jednaku nuli.

Na osnovi toga možemo dati za sada ovu jednostavnu definiciju: potencijal φ_a neke promatrane točke a jednak je naponu koji postoji između te točke i neke po volji odabrane referentne točke O , za koju pretpostavljamo da ima potencijal jednak nuli

$$U_{ao} = \varphi_a - \varphi_o = \varphi_a - 0 = \varphi_a$$

Obično se u spojnim shemama referentna točka koja ima potencijal nula spaja sa zemljom, što simbolički označujemo znakom $\perp$.

Dogovoreno je da smjerom napona smatramo onaj u kojem teče struja, slika 4.19, dakle u kojem se gibaju pozitivni električki naboji. Slikovito je to na shemi naznačeno strelicom, a iz definicione jednadžbe slijedi da će U_{ab} biti onda pozitivno, ako je $\varphi_a > \varphi_b$, pa je

$$\varphi_a = \varphi_b + U_{ab}$$

Vidimo, dakle, da pozitivni pol ima prema negativnom polu veći potencijal i to upravo za iznos napona koji vlada između promatranih točaka a i b .

Na temelju ove osnovne spoznaje možemo u strujnim krugovima prikazati naponske prilike pomoću potencijala, a za to treba prethodno utvrditi kako se, idući od točke do točke, mijenja potencijal u pojedinim elementima od kojih je sastavljen strujni krug.

Pogledajmo najprije sam naponski izvor. Prema rečenome slijedi da će se idući od $(-)$ pola kroz izvor do $(+)$ pola potencijal povećati za iznos unutarnjeg napona E . Ako bismo prolazili kroz izvor u obrnutom smjeru, dakle od $(+)$ pola do $(-)$ pola, potencijal bi se smanjio za iznos E .

Omski otpornik R protjecan strujom I ima, kako otprije znamo, na svojim stezaljkama napon $U = I \cdot R$. Ulazna stezaljka ima pozitivni polaritet, a izlazna negativni. Ako, dakle, želimo odrediti promjenu potencijala od jedne stezaljke otpornika do druge, moramo uzeti u obzir i smjer struje, slike 4.19 i 3.10.

Idući u smjeru struje kroz otpornik potencijal pada za iznos $I \cdot R$, dok će za isti iznos potencijal narasti ako se ide kroz otpornik protiv smjera struje.

Ako u nekom dijelu strujnog kruga nema potroška napona (jer je otpor toga dijela zanemariv ili kroza nj ne teče struja), onda na tom dijelu nema promjene potencijala i on na cijelom tom dijelu zadržava istu vrijednost.

Dok porast ili pad potencijala na otporniku ovise o smjeru struje, promjena potencijala na izvoru napona E bit će neovisna o tome da li kroz izvor prolazi struja u jednom ili u drugom smjeru, jer izvor napona drži svoj napon i njegov polaritet

stalnim. U kompliciranijim strujnim krugovima može se doista dogoditi da pod utjecajem drugog izvora, koji ima viši unutarnji napon, teče struja kroz izvor manjeg napona u protivnom smjeru nego što bi tekla pod utjecajem vlastitog napona (npr. u serijskom protuspoju jednog izvora).

4.11.

POTENCIJALNI DIJAGRAM

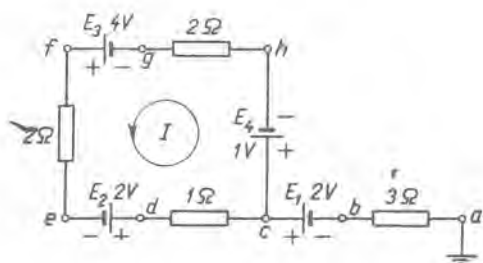
Ako grafički prikažemo u koordinatnom sustavu (φ , x) kako se počev od jedne točke mijenja potencijal idući kroz sve elemente od kojih je sastavljena spojna shema, dobivamo takozvani potencijalni dijagram zadane sheme.

Zbog ilustracije svega što je gore izneseno nacrtat ćemo potencijalni dijagram za spoj prikazan na slici 4.20. Da bismo odredili promjene potencijala u otpornicima, potrebno je poznavati struje koje teku kroz otpore. Za nacrtani zatvoreni strujni krug jakost struje jest

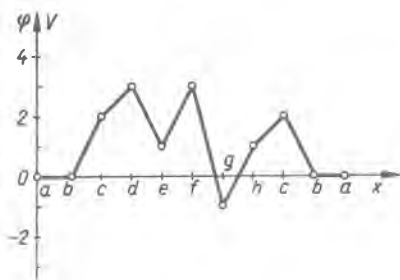
$$I = \frac{5 \text{ V}}{5 \Omega} = 1 \text{ A}$$

i ona prolazi u smjeru nacrtane strelice.

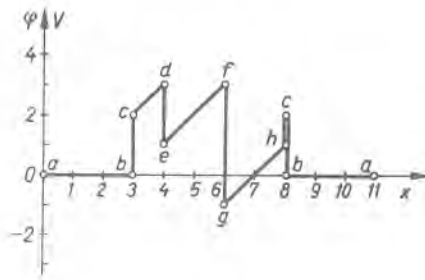
Na apscisnu os x nanosimo u izvjesnim razmacima točke $a, b, c, d \dots$ sve do točke h tako, da konačno nakon prolaza kroz izvor E_4 opet dođemo u točku c , čime je strujni krug zatvoren.



Sl. 4.20. Spojna shema izvora i otpora za koju su potencijalni dijagrami predočeni u slici 4.21 i 4.22.



Sl. 4.21. Potencijalni dijagram spojne sheme sa slike 4.20.



Sl. 4.22. Modificirani potencijalni dijagram spojne sheme slike 4.20.

Na ordinatu nanosimo, mjereno u voltima, potencijale pripadne ovim točkama, pretpostavljajući da jedna točka, na primjer početna točka a , koja je vezana na zemlju, ima potencijal nula, slika 4.21.

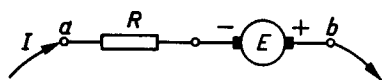
Budući da kroz otpornik od $3\ \Omega$ idući od a do b ne prolazi nikakva struja, i točka b ima isti potencijal kao i a , dakle nula. Međutim, od b do c potencijal naraste za iznos 2 V , koliko iznosi unutarnji napon izvora E_1 . Dalje ucrtavamo sve promjene potencijala prema prijašnjim pravilima, uzevši u obzir da (u ovom primjeru) pri obilaženju od točke do točke u smislu abecede prolazimo protiv smjera struje I . Konačno dolazimo opet do točke c , koja dakako, i nakon obilaženja cijelog kruga mora imati isti potencijal kao i na početku.

Potencijalni dijagram koristi se često pri analizi električkih sklopova gdje otpore predstavljaju vodiči koji služe za razdiobu električke energije. Kako su ti vodiči u prostoru od jednog izvora do drugog različito dugački, pripadni otpori proporcionalni su tim duljinama, pa se i razmaci na apscisnoj osi uzimaju proporcionalni duljinama vodiča među izvorima. Izvore smatramo koncentriranim na jednome mjestu, pa tako obje stezaljke izvora padaju na apscisnoj osi zajedno. Uz ovakve pretpostavke potencijalni dijagram izgledao bi nešto drugačije, onako kako je prikazano u slici 4.22.

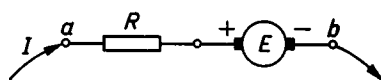
Iz nacrtanog potencijalnog dijagrama moguće je odrediti napon bilo kojih dviju točaka spojne sheme. Taj napon je prema definiciji jednak razlici potencijala tih promatranih točaka. Pri tome će pozitivni polaritet imati ona točka čiji je potencijal viši. U našem primjeru je napon $U_{fc} = \varphi_f - \varphi_c = 3 - 2 = 1\text{ V}$, točka f je pozitivna, a c negativna.

4.12. OHMOV ZAKON ZA ELEMENAT STRUJNOG KRUGA

Primjenom potencijala mogu se riješiti mnogi problemi strujnih krugova a da se i ne crta cijeli potencijalni dijagram. Ako se tako promatra dio strujnog kruga



Sl. 4.23. Jedan dio strujnog kruga sastavljen od izvora i otpora.



Sl. 4.24. Dio strujnog kruga kao u slici 4.23 s promijenjenim smjerom djelovanja napona izvora E .

između točke a i b prema slikama 4.23 i 4.24 moguće je izraziti potencijale φ_a i φ_b baš pomoću parametara samog promatranog dijela strujnog kruga:

- a) kada struja I ima smjer kao i unutarnji napon izvora E :

$$\varphi_b = \varphi_a - I \cdot R + E$$

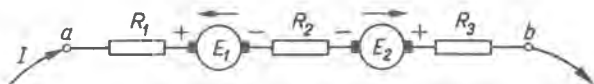
- b) ako uključeni napon izvora E ima smjer protivan od smjera struje I

$$\varphi_b = \varphi_a - I \cdot R - E$$

Iz ovih relacija slijedi dalje izraz za napon U_{ab} i to za

$$a) U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = I \cdot R - E$$

$$b) U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = I \cdot R + E$$



Sl. 4.25. Dio strujnog kruga sastavljen od više izvora i otpora.

I općenito za više izvora i otpora koji su između točaka a i b serijski spojeni možemo izvesti jednadžbe Ohmova zakona. Na osnovi spojne sheme na slici 4.25 dobivamo

$$\varphi_b = \varphi_a - I \cdot R_1 - E_1 - I \cdot R_2 + E_2 - I \cdot R_3$$

pa je

$$I \cdot (R_1 + R_2 + R_3) = \varphi_a - \varphi_b - E_1 + E_2$$

što se može prikazati jednostavnije

$$I \cdot \sum_{i=1}^n R_i = U_{ab} + \text{alg} \sum_{i=1}^m E_i$$

a odatle slijede jednadžbe

$$I = \frac{U_{ab} + \text{alg} \sum_{i=1}^m E_i}{\sum_{i=1}^n R_i}$$

$$U_{ab} = I \cdot \sum_{i=1}^n R_i - \text{alg} \sum_{i=1}^m E_i$$

U algebarskoj sumi imaju pozitivan predznak oni unutarnji naponi E čiji se smjer djelovanja podudara sa smjerom struje I , dok će negativni predznak imati oni naponi E kojih je smjer suprotan smjeru struje.

Spomenimo još i to da je $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$ napon gledan od točke a , prema točki b . Ako bismo sada računali djelovanje napona od b prema a , dakle napon U_{ba} mogli bismo to prikazati na sličan način matematičkom relacijom

$$U_{ba} = \varphi_b - \varphi_a = -(\varphi_a - \varphi_b)$$

iz koje slijedi da je

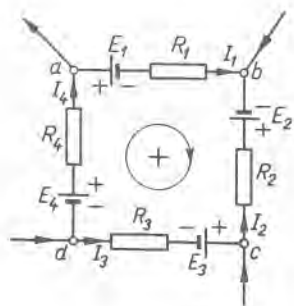
$$U_{ba} = -U_{ab}$$

Vidimo da promjena smjera u kojem računamo napon dovodi do promjene predznaka, a to smo već imali pri objašnjavanju resultantnog napona kod serijskog protuspoja izvora.

4.13.

DRUGI KIRCHHOFFOV ZAKON

Naponske prilike u jednom zatvorenom strujnom krugu bilo kako sastavljene spojne sheme mogu se općenito prikazati pomoću II Kirchhoffova zakona.



Sl. 4.26. Zatvoreni strujni krug kao dio bilo kako sastavljene spojne sheme.

Na slici 4.26 prikazan strujni krug sastavljen je od četiri grane. U općenitom slučaju svaka će grana imati izvor napona i otpornik. Kroz otpornike teku struje koje mogu biti zbog dovodenja i odvođenja struja u točkama a, b, c, d iz ostalih dijelova spojne sheme različite ne samo po jakosti, već i po smjeru.

Ako su nam poznate sve električke veličine pojedinih grana, naponi, otpori i struje, možemo napisati za potencijale točaka a, b, c, d , ove jednadžbe

$$\varphi_b = \varphi_a - E_1 - I_1 \cdot R_1$$

$$\varphi_c = \varphi_b + E_2 + I_2 \cdot R_2$$

$$\varphi_d = \varphi_c - E_3 + I_3 \cdot R_3$$

$$\varphi_a = \varphi_d + E_4 - I_4 \cdot R_4$$

odakle zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned} & \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d = \\ & = \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d - E_1 + E_2 - E_3 + E_4 - I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 \end{aligned}$$

Dalje je

$$-E_1 + E_2 - E_3 + E_4 = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4$$

što se matematičkom simbolikom može prikazati općenito

$$\text{alg} \sum_{i=1}^n E_i = \text{alg} \sum_{i=1}^n I_i \cdot R_i$$

Ova jednadžba se naziva drugi Kirchhoffov zakon. Njeno fizikalno značenje može se riječima objasniti ovako: u zatvorenom strujnom krugu, koji može biti dio ma kakve spojne sheme, algebarska suma svih unutarnjih napona izvora jednaka je algebarskoj sumi svih potrošenih napona u otporima. Pri tome oznaka »algebarska« suma znači opet to da se kod sumiranja unutrašnjih napona E_i moraju uzeti u obzir i smjerovi djelovanja tih napona, kao što se kod sumiranja potrošenih napona moraju uzeti u obzir smjerovi struja. Odabere se dakle po volji jedan smjer kao pozitivan i u tom smjeru vrši se sumiranje, pa se oni naponi E_i čiji se smjer djelovanja poklapa sa smjerom obilaženja uzimaju s pozitivnim, a oni drugi s negativnim predznakom. Umnošci $I_i \cdot R_i$, čiji je smjer struje jednak odabranome, dobivaju predznak plus, a oni suprotna smjera dobivaju predznak minus.

Oba Kirchhoffova zakona osnova su za rješavanje električkih strujnih krugova. Prvi se odnosi na struje koje se sastaju u jednoj točki (čvoru), a drugi na napone jedne zatvorene konture. Naročito treba istaknuti da će oba zakona samo onda imati ispravno značenje, ako se uvažava prije navedena pravila o računanju smjerova.

I Ohmov zakon samo je specijalan slučaj II Kirchhoffova zakona. Ako, naime, u jednoj zatvorenoj konturi imamo samo jedan naponski izvor i jedan otpor, onda jednadžba II Kirchhoffova zakona poprima jednostavniji oblik

$$E = I \cdot R$$

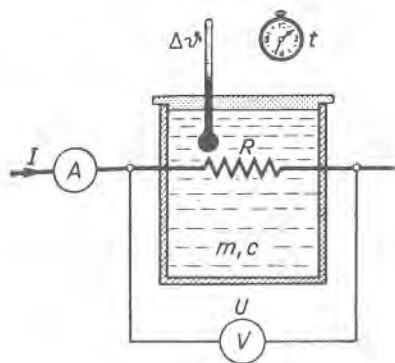
a to je treći oblik Ohmova zakona.

5. JOULEOV ZAKON, ELEKTRIČKA ENERGIJA I SNAGA

5.1. JOULEOVA TOPLINA

Promotrit ćemo najprije toplinski učinak električne struje. Već je u uvodu spomenuto da je taj učinak u biti transformacija električke energije u toplinsku, a uzrokovan je pojavom električkog otpora što ga prolasku električne struje pruža svaki realni vodič.

Da bismo osim ovog posve kvalitativnog objašnjavanja dobili uvid i u kvantitativne odnose, a to znači da saznamo koliku toplinu dobivamo od električke energije moramo, dakako, mjeriti. Treba, dakle, s jedne strane mjeriti toplinske veličine, a s druge sve potrebne električke veličine. U tu svrhu uzet ćemo kalorimetričnu bombu i u nju smjestimo vodič otpora R , slika 5.1.



Sl. 5.1. Mjerenje proizvedene Jouleove topline pomoću kalorimetrične bombe.

Prolaskom struje I kroz otpornik R stvara se toplina Q , koja će tekućinu (ulje ili vodu) u boci zagrijati za $\Delta\theta$ °C.

Prema pravilima termodinamike može se lako odrediti kolika je toplina Q što je od otpornika R predana tekućini tokom vremena t dok je prolazila struja. Ako je prirast temperature $\Delta\theta$ °C, te ako je masa tekućine m , a njezina specifična toplina c , onda je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta$$

U električkom strujnom krugu koji dobavlja električku energiju otporniku R mjeri se ampermetrom jakost struje I , voltmetrom privedeni napon U , a vrijeme prolaska struje t satom.

Pokusi pokazuju da proizvedena toplina Q ovisi direktno proporcionalno o

naponu	U V
struji	I A
vremenu	t s

Ova riječima izražena međusobna ovisnost može se matematički formulirati u jednadžbi

$$Q = k \cdot U \cdot I \cdot t$$

gdje je k faktor proporcionalnosti koji služi tome da se brojčano povežu u jednoj jednadžbi veličine različitih mjernih sustava.

Ako bismo, kao što je gore navedeno, napon, struju i vrijeme mjerili jedinicama Giorgijeva sustava (V, A, s), a toplinu u kalorijama (cal), onda bi faktor proporcionalnosti iznosio $k = 0,239$, pa je

$$Q_{\text{cal}} = 0,239 \cdot U \cdot I \cdot t$$

Moguće je, međutim, toplinu kao jedan oblik energije izraziti također numerički jedinicom džul (J), koja kao jedinica za energiju pripada Giorgijevu sistemu. Tada je, dakako, faktor $k = 1$, pa je

$$Q = U \cdot I \cdot t$$

Usporedbom ovih dviju jednadžbi vidimo da je odnos jedinica

$$1 \text{ J} = 0,239 \text{ cal}$$

odnosno

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$$

Budući da je ovdje trošilo u kojem se transformira energija otpornik R , iskoristivši Ohmov zakon $U = I \cdot R$ i $I = U/R$ možemo dobiti još dva oblika gornje jednadžbe, tako da imamo

$$Q = U \cdot I \cdot t$$

i

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t$$

$$Q = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

Sva ova tri oblika predočuju matematičku formulaciju jednog te istog fizičnog zakona prema kojem se vrši pretvorba električke energije u toplinu. U počast fizičaru Jouleu taj zakon se zove Jouleov zakon, a tako (u otporu R) proizvedena toplina naziva se i Jouleova toplina.

Pogledajmo što možemo saznati o Jouleovoj toplini iz ovih jednadžbi. Posljednje dvije jednadžbe kažu da je proizvedena toplina Q u jednom stalnom otporu R kvadratično ovisna o naponu U , odnosno o struji I , dok je prema prvoj jednadžbi ta toplina ovisna u prvoj potenciji o naponu i struji.

Ovo može, međutim, samo pri površnom promatranju izgledati kao neki nesklad. Ako i u prvom slučaju

$$Q = U \cdot I \cdot t$$

pretpostavimo da je R konstantna iznosa, onda će se s promjenom napona proporcionalno promijeniti i jakost struje, pa će umnožak $U \cdot I$ opet dati kvadratičnu ovisnost o naponu, kao što će i promjena struje u stalnom otporu biti vezana uz proporcionalnu promjenu napona, pa će se i u tom slučaju dobiti kvadratična ovisnost o jakosti struje.

Danas za proizvod topline pomoću električne struje postoji mnoštvo najrazličitije konstruiranih elektrotermičkih aparata kojima je bitni element električki grijač — otpornik. Da bi se pri prolazu struje I postigla tražena količina topline otpor R treba da bude odgovarajućeg iznosa, a da takvi grijači izdrže visoko zagrijavanje, upotrebljavaju se za njihovu izradu materijali koji imaju ne samo velik specifični otpor, već su otporni i protiv korozije. To su u prvom redu legure od kroma i nikla, koje u trgovinu dolaze pod raznim imenima, npr. cekas, kanthal, a od njih se izrađuju žice za grijače spirale. Za industrijske peći upotrebljavaju se i štapovi od silicijeva karbida (silita).

5.2. ZAGRIJAVANJE VODIČA ELEKTRIČNOM STRUJOM

Jouleova toplina ne stvara se međutim, samo u elektrotoplinskim aparatima gdje je želimo dobiti, već svugdje gdje struja prolazi kroz neki otpor. A svi naši vodiči i žice električkih instalacija, te svi električki vodljivi dijelovi električkih uređaja i aparata, imaju sigurno neki otpor, pa će se u pogonu pri prolazu struje zagrijavati, što je većinom nepoželjno. Zbog visoke temperature koja pri tome može nastati postoji opasnost da izgori izolacija, jer se za izolaciju u električkim aparatima pretežno upotrebljavaju razne materije organskog kemijskog sastava. Električke vodove, a i ostale električke naprave treba, dakle, tako dimenzionirati da se u trajnom pogonu pri nominalnoj struji ne zagriju iznad maksimalno dopuštene temperature koju izolacija može još izdržati.

Osim toga preveliko zagrijavanje dijelova električkih uređaja opasnost je i zbog mogućnosti požara.

Vidimo da je i zagrijavanje električkih naprava i vodova Jouleovom toplinom također jedan od problema koji valja pravilno riješiti pri projektiranju električkih uređaja.

Razumljivo je da će nas osobito zanimati do koje će se maksimalne temperature, $\vartheta_{\max}$, zagrijati vodič koji je u pogonu trajno protjecan električnom strujom, a to možemo saznati iz slijedećih razmatranja. Pri prolazu struje I razvija se u otporu R tokom vremena t toplina

$$Q = 0,24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t$$

a zbog nje se povisuje temperatura vodiča od početne vrijednosti ϑ_0 na sve veće vrijednosti ϑ , tako da povišenje iznosi

$$\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_0$$

Budući da vodič ima sada višu temperaturu nego što je temperatura okoline (a to je početna temperatura ϑ_0), jedan će dio proizvedene topline iz tijela vodiča prelaziti na okolišni zrak. Ta količina topline koja s toplijeg tijela prelazi na hladniju okolinu računa se općenito prema jednadžbi

$$Q = h \cdot S_h \cdot \Delta\vartheta \cdot t$$

gdje su

S_h - rashladna površina tijela,

$\Delta\vartheta$ - razlika temperatura toplijeg tijela prema hladnijoj okolini,

h - faktor hlađenja ili koeficijent prijelaza topline koji kaže koliko će topline od tijela prijeći na okolinu kroz 1 m^2 površine u 1 sekundi, ako je razlika temperatura 1°C ,

t - vrijeme.

Odavanje topline od zagrijanog tijela na okolinu bit će to intenzivnije što je zagrijavanje tijela veće, pa je očito da će na nekoj dovoljno povećanoj vrijednosti $\Delta\vartheta_{\max}$ okolišnom zraku predana količina topline biti upravo tolika, kolika je u tijelu proizvedena. U tom slučaju kažemo da je nastala termička ravnoteža, jer je u tijelu proizvedena količina topline jednaka iz tijela odvedenoj, a ništa ne ostaje u tijelu da bi se iskoristilo za daljnje povišenje temperature. Tada je, dakle, postignuto maksimalno zagrijavanje

$$\Delta\vartheta_{\max} = \vartheta_{\max} - \vartheta_0$$

Uvjet za to je

$$0,24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t = h \cdot S_h \cdot \Delta\vartheta_{\max} \cdot t,$$

odakle slijedi

$$\Delta\vartheta_{\max} = 0,24 \cdot \frac{I^2 \cdot R}{h \cdot S_h}$$

Ako uzmemo u obzir da je otpor vodiča $R = \rho \cdot l / S$, a da je rashladna površina okruglog vodiča $S_h = 2 r \pi \cdot l$, dobivamo

$$\Delta\vartheta_{\max} = 0,24 \cdot \frac{I^2 \cdot \rho \cdot l}{S \cdot h \cdot 2 \pi r \cdot l} = 0,12 \frac{\rho}{h} \cdot \frac{I^2}{S \cdot \pi r}$$

a to je dalje jednako

$$\Delta\vartheta_{\max} = 0,12 \cdot \frac{\rho}{h} \cdot I^2 \cdot r$$

gdje je $I = \frac{I}{S} = \frac{I}{r^2 \cdot \pi}$ gustoća struje kroz promatrani (okrugli) presjek vodiča čiji je radijus r .

Ako, dakle, želimo da se vodič u pogonu ne zagrije iznad još dopuštene temperature $\vartheta_{\max}$, treba da je ispunjena jednačba

$$\vartheta_{\max} = \vartheta_0 + 0,12 \cdot \frac{\rho}{h} \cdot I^2 \cdot r$$

Međutim se u praksi pri tačnim proračunima ovom jednačbom gotovo i ne možemo koristiti, jer je nemoguće tačno znati koliki je faktor hlađenja h , čija vrijednost ovisi o slučajnim prilikama u kojima se nalazi instalirani vodič.

Ipak nam gornja jednačba daje veoma važne podatke o tome kako zagrijavanje vodiča ovisi o pojedinim faktorima. Vidimo da $\Delta\vartheta_{\max}$ ovisi kvadratično o gustoći struje (I), nadalje ovisi i o materijalu od kojeg je izrađen vodič (ρ), o uvjetima hlađenja (h), ali i o radijusu poprečnog presjeka vodiča (r). Radi ovakve međusobne ovisnosti mogu se pri istom dopuštenom zagrijavanju vodiči manjeg radijusa (dakle općenito manjeg presjeka) opteretiti većom gustoćom struje nego što je to dopušteno za vodiče većeg presjeka.

U praksi se termički proračun vodiča za instalacije vrši uz pomoć tabličnih podataka dobivenih na osnovi dugogodišnjeg iskustva ali, dakako, u skladu s gornjim relacijama. U tim tablicama daju se, već prema načinu instaliranja vodiča (čime je uzet u obzir h), za pojedine standardizirane presjeke vodiča maksimalno dopuštene jakosti struje. Time je termički proračun, barem za vodiče električkih instalacija, veoma pojednostavljen.

5.3.

ENERGIJA I RAD ELEKTRIČNE STRUJE

Ispitivanja koja su obavljana da bi se provjerio Jouleov zakon pokazuju da je pri prolazu struje kroz otpornik u posudi kalorimetričke bombe dobivena od električke energije posredstvom električne struje — samo toplina i ništa drugo. To znači da se sva električka energija privedena otporniku R u potpunosti pretvorila u toplinsku energiju. Na osnovi toga možemo reći da jednačba

$$Q = U \cdot I \cdot t$$

matematički izražava jednakost obiju energija.

Budući da je na lijevoj strani jednačbe toplinska energija Q , zaključujemo da izraz na desnoj strani jednačbe predstavlja otporniku privedenu električku energiju.

Možemo, dakle, električku energiju prikazati jednačbom

$$W = U \cdot I \cdot t$$

što znači da se otporniku privedena električka energija izračunava tako da se jakost struje koja krozi nj prolazi pomnoži s vremenom i naponom koji je pri toj struji otporniku priveden na njegove stezaljke.

Tu treba odmah istaknuti slijedeće: iako je izraz za proračun električne energije dobiven u ovom posebnom slučaju kad smo promatrali iskorišćenje električne energije u termičke svrhe, ta ista jednadžba vrijedi općenito pri proračunu električne energije za bilo kakvo trošilo.

Na osnovi gornje relacije možemo jedinicu džul za mjerenje energije izraziti i pomoću osnovnih električnih jedinica Giorgijeva sustava. Vidimo da vrijedi jednadžba

$$J = V \cdot A \cdot s$$

pa kažemo da je džul jednak voltampersekundi, a budući da se umnožak $V \cdot A =$ voltamper skraćeno zove vat $= W$, izlazi da je džul jednak vatsekundi

$$J = Ws$$

Ta jedinica je vrlo mala, pa se za mjerenje većih količina energije upotrebljavaju veće jedinice, a prvo povećanje je dobiveno da je za vrijeme t umjesto sekunde uzet sat $= h$

1 h = 3600 s, pa je tako dobivena jedinica vatsat

$$1 Wh = 3600 Ws = 3600 J$$

Od ove jedinice izvedene su još veće jedinice, a u praksi se najviše upotrebljavaju

$$1 kWh = \text{kilovatsat} = 3,6 \cdot 10^6 J$$

$$1 MWh = \text{megavatsat} = 3,6 \cdot 10^9 J$$

a katkada i ostale sa sufiksima prema tablici I.

Ako je sva u trošilo privedena električna energija iskorištena za neki koristan rad, računa se i taj rad A po jednadžbi

$$A = U \cdot I \cdot t$$

Uvrstimo li u jednadžbu $W = U \cdot I \cdot t$ umjesto umnoška $I \cdot t$ njegov ekvivalent Q , tj. količinu elektriciteta, možemo napisati da je $W = Q \cdot U$, a oдавde slijedi

$$U = \frac{W}{Q}$$

Taj izraz može se iskoristiti i za definiciju napona, pa možemo reći da je napon između dvije točke, npr. između polova izvora, brojčano jednak izvršenom radu što ga dobivamo od izvora kada se količina elektriciteta $+ 1$ kulon prenese od pozitivnog pola izvora na njegov negativni pol.

Jedinicu 1 V imat će onaj napon kod kojeg je tako pri prijenosu $+ 1$ C dobiven rad od 1 J

$$1 V = \frac{1 J}{1 C}$$

Promotrimo još malo detaljnije energetske odnose u našem jednostavnom električkom strujnom krugu, imajući na umu definicionu jednadžbu koja kaže da je električna energija direktno proporcionalna jakosti struje, vremenu prolaska struje i naponu.

U našem strujnom krugu prema slici 3.8 definirali smo i u račune uveli slijedeće napone

$E \dots$ kao unutarnji u izvoru stvoreni napon, koji se naziva i elektromotorna sila,

$U \dots$ kao razlika potencijala na stezaljkama izvora, a to je i napon koji je vodičima priveden na stezaljke trošila,

$E_R \dots$ kao protunapon zbog kojeg se u trošilu mora protrošiti privedeni napon.

Uz istu jakost struje I strujnog kruga tokom vremena t predstavlja umnožak sa svakim od ovih napona neku energiju i to

$E \cdot I \cdot t \dots$ ukupnu energiju stvorenu u izvoru,

$U \cdot I \cdot t \dots$ energiju koja je od stezaljki izvora, a putem voda, predana trošilu,

$E_R \cdot I \cdot t \dots$ energiju koja je u aparatu potrošena i pretvorena u rad (mehanički, toplinski, kemijski).

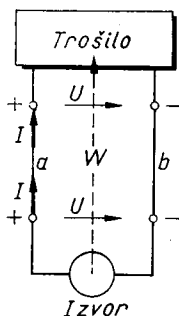
5.4.

SMJER TOKA ENERGIJE

U našem idealnom strujnom krugu je energija

$$W = U \cdot I \cdot t$$

jedna te ista, bilo da je promatramo kao energiju koja iz izvora izlazi, ili kao energiju koja iz strujnog kruga ulazi u trošilo. Bit će, međutim, korisno da ovu razliku u pogledu smjera strujanja energije na neki način i formalno istaknemo. U tu svrhu označit ćemo na slici 5.2, koja predodžuje naš jednostavni strujni krug, crtkanom strelicom tok energije.



Sl. 5.2. Određivanje smjera toka energije.

Vidimo da ta strelica smjera energije iz izvora izlazi, a u trošilo ulazi. Oba suprotna pojma, ulaz i izlaz, mogu se označiti različitim predznacima.

Ako sada energiji koju prima trošilo po volji pripisemo pozitivan predznak, onda iz izvora u strujni krug predana energija ima negativan predznak. Ovu razliku u predznacima možemo i matematički opravdati ako uvažimo da su strelice kojima su označeni smjerovi napona U i struje I drugačije međusobno orijentirane na izlaznim stezaljkama izvora nego na ulaznim stezaljkama trošila.

Promatrajući sliku 5.2 dolazimo do zaključka da ako struja ulazi na pozitivnu stezaljku u dio strujnog kruga, onda je taj dio trošilo koje prima energiju, a ako struja izlazi sa pozitivne stezaljke promatranog dijela strujnog kruga, onda je taj dio izvor, i on predaje energiju u strujni krug.

Ova definicija izvora i trošila energije izvedena je doduše za najjednostavniji strujni krug, no ona ima općenitu vrijednost, što je pri energetske analizi u mnogim električkim uređajima od osobite važnosti. Jedan te isti sastavni dio električkog uređaja može, naime, u nekom slučaju vršiti funkciju izvora, dok će u izmijenjenim okolnostima rada biti trošilo.

Tako, na primjer, električki rotacioni stroj može raditi kao motor i tada prima električku energiju iz mreže, a ako ga pokrećemo nekim pogonskim strojem (turbinom) daje energiju u mrežu, pa kažemo da radi kao generator. Akumulatori pri pražnjenju rade kao izvori, jer daju energiju priključenim trošilima, a kad ih punimo, uzimaju energiju iz nekog stranog izvora.

Da bismo što bolje shvatili ovo važno pravilo uzet ćemo jedan brojčani primjer, pa ćemo u strujnom krugu predloženom na slici 5.3 odrediti sve energije.

Zbog serijskog protuspoja obaju izvora teći će pod utjecajem razlike napona $6 - 4 = 2 \text{ V}$ u strujnom krugu otpora 1Ω struja jakosti 2 A u smjeru koji je označen strelicom.

Energiju predaje u strujni krug samo izvor napona 6 V , jer strelica smjera struje odlazi od njegove pozitivne stezaljke, a njen iznos je tokom vremena od npr. 5 s

$$W_1 = -6 \cdot 2 \cdot 5 = -60 \text{ J}$$

Otpornik R prima energiju

$$W_R = +2 \cdot 2 \cdot 5 = +20 \text{ J}$$

jer struja ulazi u njegovu pozitivnu stezaljku, a isto tako će i izvor napona U_2 primiti energiju

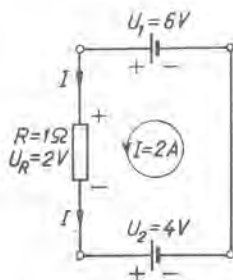
$$W_2 = +4 \cdot 2 \cdot 5 = +40 \text{ J}$$

jer struja ulazi i na njegovu pozitivnu stezaljku.

Iako je i ovo jedan električki izvor, izvor napona U_2 , on je ipak u ovom spoju trošilo električke energije, jer se za prolazak struje protiv djelovanja njegovog napona (serijski protuspoj!) mora dio napona U_1 potrošiti isto onako kao i za prolaz struje kroz otpornik.

Ispravnost računanja možemo uvijek provjeriti koristeći Mayerov zakon o održanju energije. Bilanca energija primijenjena na naš zatvoreni sustav kaže da je algebarska suma svih energija jednaka nuli

$$\begin{aligned} W_1 + W_R + W_2 &= 0 \\ -60 + 20 + 40 &= 0 \end{aligned}$$

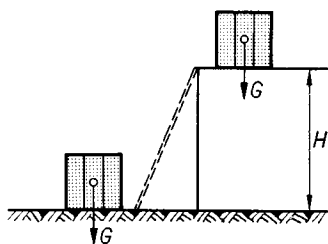


Sl. 5.3. Brojčani primjer za određivanje toka energije.

5.5.

ELEKTRIČKA SNAGA ISTOSMJERNE STRUJE

Osim samog iznosa energije W , koja se u električkim napravama bilo proizvodi, bilo iskorišćuje, veliku važnost ima još jedna fizikalna energetska veličina, naime snaga, koju označujemo slovom P . Da bi se pojam snage pravilno shvatio objasniti ćemo ga na jednom jednostavnom primjeru.



Sl. 5.4. Objašnjenje pojma snage.

Iz mehanike je poznato da se obavljeni rad pri savladavanju sile na nekom putu izračunava kao umnožak sile i puta: $A = F \cdot l$. Da bi se izvršio rad potrebno je potrošiti energiju koja je točno jednaka veličini izvršenog rada, $W = A = F \cdot l$.

Želimo li npr. prenijeti izvjesnu količinu opeka sa zemlje na visinu H , potrebno je za to utrošiti energiju

$$W = A = G \cdot H$$

gdje su

G -ukupna težina opeka, dakle sila,

H -put u smjeru sile, slika 5.4.

Taj rad mogao bi obavljati čovjek prenoseći jednu po jednu opeku, a kad posljednju opeku prenese na visinu H ukupni izvršeni rad bit će $G \cdot H$.

No ipak će se mnogo brže obaviti taj posao pomoću dizalice koja može svu količinu opeka zahvatiti i odjednom prenijeti na visinu H . I tada će izvršeni rad biti jednak $G \cdot H$.

Makar da je oba puta izvršen isti rad i potrošena ista količina energije, ipak postoji razlika u načinu kako se obavlja rad u jednom, a kako u drugom slučaju. Očito je da će stroj obaviti taj rad za kraće vrijeme nego čovjek, pa kažemo da stroj ima veću brzinu vršenja rada nego čovjek ili, stroj ima veću snagu nego čovjek.

Za vrijeme vršenja rada raste ukupni iznos obavljenog rada i u istom se odnosu povećava i količina potrošene energije, tako da je brzina vršenja rada jednaka brzini promjene energije.

Matematički se brzina promjene neke veličine izražava kvocijentom te promjena i vremena u kojem je izvršena promjena. Moguće je, dakle, i snagu P kao brzinu vršenja rada prikazati za jednoličan rad kvocijentom

$$P = \frac{W}{t}$$

gdje je W tokom vremena t potrošena energija, ili obavljen rad. Pri jednoličnom radu snaga P je konstantna.

Ako se rad obavlja nejednolično, što znači ako u jednakim vremenskim intervalima nije obavljen jednak iznos rada, nije snaga konstantna, već promjenljiva

veličina. U tom slučaju izračuna se trenutna vrijednost snage kao diferencijalni kvocijent

$$p = \frac{dW}{dt}$$

Iz ovih relacija slijede obrnuto još i jednadžbe za proračun energije, ako nam je poznata snaga pa tako za jednoličan rad tokom vremena t uz konstantnu snagu P imamo

$$W = P \cdot t$$

Pri promjenljivoj snazi izračuna se najprije energija za infinitezimalno kratko vrijeme dt po jednadžbi

$$dW = p \cdot dt$$

a za konačno vrijeme t ukupna energija jest

$$W = \int_0^t p \cdot dt$$

Primijenimo li ove općenite jednadžbe za proračun snage na naše električke uređaje, tada uz poznatu energiju $W = U \cdot I \cdot t$ dobijemo za električku snagu izraz

$$P = \frac{W}{t} = \frac{U \cdot I \cdot t}{t} = U \cdot I$$

Vidimo da je električka snaga jednaka umnošku napona i jakosti struje, pa je osnovna jedinica za mjerenje snage voltamper, koju kraće nazivamo vat, W, a to je također jednako kvocijentu džul/sekunda

$$W = \frac{J}{s} = V \cdot A$$

Veće i manje jedinice za mjerenje snage dobiju se kao umnošci osnovne jedinice s potencijama broja 10, prema tablici I.

Ako, dakle, želimo izračunati snagu koja se odnosi na neki dio u strujnom krugu, moramo pomnožiti jakost struje što prolazi kroz taj promatrani dio s naponom koji pri toj struji postoji na njegovim krajevima.

Ako je taj dio elektrotermički otpornik ili bilo kakav vodič omskog otpora R možemo, primijenjujući jednadžbe Ohmova zakona, dobiti još slijedeće izraze za snagu

$$P = \frac{W}{t} = \frac{I \cdot U \cdot t}{t} = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

a za energiju ili rad

$$W = A = P \cdot t = U \cdot I \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t$$

U složenijim spojnim shemama, gdje je na jedan izvor ukopčano više trošila, bit će suma potrošenih energija svih trošila jednaka u izvoru proizvedenoj energiji, pa će prema tome i suma snaga trošila biti jednaka snazi izvora. Ovo slijeđi i iz strujnih i naponskih jednadžbi za serijski i paralelno povezana trošila, pa tako imamo za serijski spoj

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= U_1 \cdot I_1 = U_1 \cdot I \\ P_2 &= U_2 \cdot I_2 = U_2 \cdot I \end{aligned} \right\} U = U_1 + U_2$$

$$P_1 + P_2 = U_1 \cdot I + U_2 \cdot I = (U_1 + U_2) \cdot I = U \cdot I = P$$

a za paralelni spoj

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= U_1 \cdot I_1 = U \cdot I_1 \\ P_2 &= U_2 \cdot I_2 = U \cdot I_2 \end{aligned} \right\} I = I_1 + I_2$$

$$P_1 + P_2 = U \cdot I_1 + U \cdot I_2 = U \cdot (I_1 + I_2) = U \cdot I = P$$

5.6. KORISNOST ILI KOEFICIJENT ISKORISTIVOSTI

Samo u idealiziranim prilikama možemo zamisliti da se transformacija energije vrši tako da je sva električka energija pretvorena u trošilu u koristan rad. U realno izrađenim uređajima redovno će samo dio energije koja nam stoji na raspolaganju biti iskorišten za rad za koji je trošilo konstruirano, dok će se ostatak potrošiti pri procesu transformacije u samom uređaju zbog njegove nesavršenosti.

Tako npr. već sam prijenosni vod zbog omskog otpora troši pri prolazu struje od izvora do trošila jedan dio energije izvora, pa će zato privedena energija trošilu biti za taj iznos manja. Cijeli uređaj ne iskorišćuje, dakle, stopostotno proizvedenu energiju izvora, pa je korisnost uređaja umanjena.

Iako se energija ne može izgubiti ili nestati, ipak onaj dio energije koji nije iskorišten u trošilu za rad koji želimo dobiti nazivamo gubitkom energije, pa tako možemo napisati relaciju

$$W_g = W_u - W$$

gdje su

W_g - gubitak energije

W_u - ukupna energija

W - korisna energija

Općenito se koeficijent iskoristivosti ili korisnost nekog uređaja η definira kao omjer korisno upotrijebljene energije prema ukupnoj energiji koja je upotrijebljena pri procesu transformacije

$$\eta = \frac{W}{W_u} = \frac{W}{W + W_g}$$

Ako je vrijeme t u svim izrazima za energiju jedno te isto, možemo gornji razlomak u brojniku i nazivniku podijeliti sa t pa dobivamo korisnost izraženu pomoću omjera snaga

$$\eta = \frac{P}{P + P_g}$$

gdje su

$$P = \frac{W}{t} \dots \text{korisna snaga}$$

$$P_g = \frac{W_g}{t} \dots \text{snaga gubitaka}$$

Ovako izračunata vrijednost koeficijenta η jest broj manji od 1, a samo bismo u idealnim prilikama imali $P_g = 0$ i $\eta = 1$.

No obično se korisnost izražava u %, a tu vrijednost dobivamo ako pomnožimo sa 100 vrijednost razlomka, dakle

$$\eta_{\%} = \frac{P}{P + P_g} \cdot 100$$

5.7.

PREDZNAK SNAGE. NAZIVNA SNAGA TROŠILA

Kao što smo energiji dali neki predznak i time je dobila određeno značenje, možemo sada i snazi pripisati predznak, ako želimo označiti da li se snaga odnosi na izvor ili na trošilo.

Ako, dakle, kao prije odredimo predznak snage prema smjeru struje I i pozitivnom polu napona U , imat će pozitivni predznak snaga trošila, a negativni snaga izvora, (slika 5.2).

Možemo, međutim, postupiti drugačije, naime da struji I pridružimo unutarnje napone (elektromotorne sile) E , tako da njihove predznake uzmemo prema smjeru djelovanja unutar konture strujnog kruga. U tom slučaju dobivamo za snagu izvora $E \cdot I$ pozitivan predznak jer su, kako je bilo objašnjeno, E i I istog smjera, dok će snaga trošila $E_R \cdot I$ imati negativni predznak, jer je protunapon E_R suprotan struji I .

Vidimo da su ovako snage izvora i trošila predznacima označene baš obratno nego prijašnjom metodom. Dakako da je svejedno kojim se načinom služimo, jer će nam i jedan i drugi pravilno primijenjen, dati isti rezultat. Redovno se ipak računa prvim načinom, jer se želi da energija predana trošilu ima pozitivan predznak.

Budući da je količina izvršena rada nekog trošila ovisna, osim o vremenu, još i o snazi, bit će u praktičkoj upotrebi trošila od osobitog interesa da se znade najveća dopuštena vrijednost snage s kojom može trošilo u pogonu trajno raditi, a da pri tome ne strada.

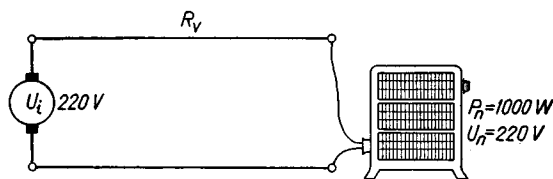
Ta vrijednost zove se nominalna ili nazivna snaga P_n i ona se prema propisima mora vidljivo označiti na svakom trošilu (a i na generatorima), uz ostale nominalne podatke.

Prema tome je nominalna snaga samo jedan podatak koji je u vezi s konstrukcijom, što ne znači da će trošilo uvijek raditi svojom nominalnom snagom. Kolika će doista biti snaga u pogonu ovisi o tome koliki su u konkretnom slučaju napon i jakost struje, jer o njima ovisi snaga.

Objašnjenju neka posluži primjer. Na natpisnoj pločici električke peći naznačeno je da je nominalna snaga $P_n = 1000 \text{ W}$, a nominalni napon $U_n = 220 \text{ V}$. Taj podatak znači da će peć doista prema svojoj konstrukciji razviti snagu od 1000 W , ako je priključena na napon 220 V . Odavde se dalje može izračunati i nominalna vrijednost jakosti struje: $I_n = 1000/220 = 4,54 \text{ A}$. Budući da je po svojoj konstrukciji električka peć omski otpornik, može se izračunati i njegov otpor kao osnovni konstruktivni podatak o peći

$$R_p = \frac{U_n}{I_n} = \frac{220}{4,54} = 48,4 \, \Omega$$

jer nam je poznat par vrijednosti napona i struje koje istovremeno imamo u trošilu.



Sl. 5.5. Priključak električke peći na izvor.

Ako sada priključimo tu peć na izvor stalnog napona $U_i = 220 \text{ V}$ pomoću voda koji za oba vodiča ima otpor $R_d = 1,6 \, \Omega$, onda će pri prolazu struje kroz vod doći do pada napona, pa peć neće dobiti puni napon 220 V , već nešto manji.

Da odredimo kolika je sada pogonska snaga peći, trebamo na osnovi spojne sheme sa slike 5.5 odrediti najprije jakost struje. Vidimo da napon izvora mora osim otpora peći savladati i otpor voda.

Iako će se radi smanjenog napona i struje peć nešto slabije zagrijati nego u nominalnom pogonu, ipak zbog neznatnog temperaturnog koeficijenta otpora α za cekas-žicu smijemo u ovom računu uzeti da je otpor peći stalno nepromijenjena iznosa, $R_p = 48,4 \, \Omega$.

Kroz ukupni otpor $R = R_d + R_p$ strujnog kruga bit će jakost struje

$$I = \frac{U_i}{R_d + R_p} = \frac{220}{48,4 + 1,6} = \frac{220}{50} = 4,4 \text{ A}$$

Privedeni napon na priključnice peći $U = I \cdot R_p = 4,4 \cdot 48,4 = 213 \text{ V}$, a snaga peći je $P = U \cdot I = I^2 \cdot R_p = 213 \cdot 4,4 = 938 \text{ W}$.

U vodu se troši napon $U_a = I \cdot R_a = 4,4 \cdot 1,6 = 7 \text{ V}$ i time u vezi imamo potrošak snage $P_a = I^2 \cdot R_a = 4,4^2 \cdot 1,6 = 31 \text{ W}$, tako da je ukupna snaga izvora $P_i = U_i \cdot I = 220 \cdot 4,4 = 969 \text{ W}$, a to je i zbroj obiju snaga, peći i voda $P_i = 938 + 31 = 969 \text{ W}$.

Moguće je još izračunati i korisnost cijelog uređaja

$$\eta_{o/s} = \frac{P}{P + P_a} \cdot 100 = \frac{938}{938 + 31} \cdot 100 = 96,9 \%$$

5.8.

PRILAGOĐIVANJE

Ako na stezaljke realnog izvora, čiji je unutarnji napon E , a unutarnji otpor R_i priključimo vanjsko trošilo predočeno otporom R_t , bit će struja u strujnom krugu za razne vrijednosti otpora trošila R_t određena prema Ohmovu zakonu jednadžbom

$$I = \frac{E}{R_i + R_t}$$

Pri tome će i snaga trošila $P_t = U \cdot I = I^2 \cdot R_t$ (gdje je U vanjski napon na trošilu) ovisiti o broju oma trošila R_t . Uvidom u vanjsku karakteristiku na slici 4.4 vidimo da je u praznom hodu $I = 0$, a napon U maksimalan, dok je u kratkom spoju napon $U = 0$, a struja maksimalna. Vanjska snaga je, dakle, jednaka nuli u oba krajna slučaja opterećenja. Zbog neprekinutosti funkcije unutar intervala prazni hod ÷ kratki spoj mora snaga P_t imati ekstremnu vrijednost i to maksimum.

Pogledat ćemo sada koliki mora da bude vanjski otpor R_t da snaga uz zadane parametre izvora postigne maksimalnu vrijednost. Treba, dakle, naći uvjet za ekstremnu vrijednost izraza

$$P_t = I^2 \cdot R_t = \left(\frac{E}{R_i + R_t} \right)^2 \cdot R_t = \frac{E^2 \cdot R_t}{(R_i + R_t)^2}$$

koji je funkcija samo variable R_t . To se dobiva iz uvjeta da je

$$\frac{\partial P_t}{\partial R_t} = 0$$

Dalje je

$$\frac{\partial P_t}{\partial R_t} = \frac{E^2 \cdot (R_i + R_t)^2 - E^2 \cdot R_t \cdot 2(R_i + R_t)}{(R_i + R_t)^4}$$

a da taj izraz bude jednak nuli, mora da bude

$$E^2 \cdot (R_i + R_t)^2 = E^2 \cdot 2 R_t \cdot (R_i + R_t)$$

što će biti ispunjeno ako je

$$R_i = R_t$$

Uvjet da izvor preda trošilu maksimalno moguću snagu jest, dakle, da je otpor trošila jednak unutarnjem otporu izvora. Ako je to doista ispunjeno, kažemo da je trošilo svojim otporom prilagođeno unutarnjem otporu izvora.

Pogledajmo sada kolika je u slučaju prilagođenja ta trošilu predana snaga, kolika je ukupna snaga izvora, te konačno kolika je korisnost η . Sve veličine za prilagođenje označit ćemo crticom.

Budući da je $R'_t = R_t$, bit će struja $I' = E/2R_t$ pa je

$$P'_t = \frac{E^2}{4 \cdot R_t} \cdot R_t = \frac{E^2}{4 \cdot R_t}$$

To je također i snaga potrošena u otporu izvora i nju smatramo gubitkom P_g , jer nije iskorištena u trošilu. Ukupna snaga izvora može se naći kao umnožak napona E i struje I'

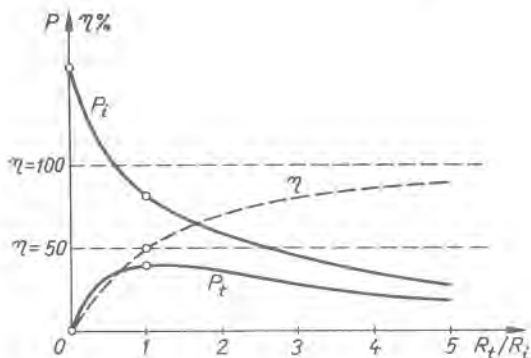
$$P'_i = \frac{E}{2R_t} \cdot E = \frac{E^2}{2 \cdot R_t}$$

što se dobiva također kao suma snaga u oba otpora

$$P'_i = P'_t + P'_g = \frac{E^2}{4 \cdot R_t} + \frac{E^2}{4 \cdot R_t} = \frac{E^2}{2 \cdot R_t}$$

Korisnost uz prilagođeno trošilo iznosi, dakle

$$\eta' = \frac{P'_t}{P'_i} = \frac{P'_t}{2 \cdot P'_t} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ ili } 50\%$$



Prema tome je samo 50% ili polovica ukupno proizvedene snage izvora iskorištena u trošilu, jer se druga polovica troši u otporu R_t izvora.

Ako pak trošilo nije prilagođeno otporu izvora, ako je, dakle

$$R_t \neq R_i$$

imat ćemo drugačije odnose snaga i drugačije vrijednosti koeficijenta η .

Sl. 5.6. Dijagram snage trošila P_t , snage izvora P_i i korisnosti η za razne vrijednosti omjera $R_t : R_i$

Osobito zorno vide se ovi energetske odnosi ako sve promatrane veličine prikazemo grafički kao funkcije promjenljivog otpora trošila. Na slici 5.6 nanese se na apscisi vrijednosti otpora R_i (odnosno vrijednosti omjera R_i/R_t), a na ordinati snage i to snaga trošila P_i , snaga otpora izvora P_g i ukupna snaga izvora P_t . Ujedno je prikazana i korisnost η , koja kao kvocijent P_i/P_t ima naročito karakterističnu ovisnost o načinu kako je izvor opterećen.

S time u vezi možemo kazati da će se prilagođivanje unutarnjem otporu izvora koristiti u telekomunikacionim uređajima, gdje želimo da se aparatima koji će primati signale preda što veća snaga kako bi prenesena informacija bila što bolje i vjernije registrirana. Iako je pri tome relativno slaba korisnost ($\eta = 50\%$) nije to velik gubitak energije u apsolutnom iznosu, jer se u tehnici slabe struje pri prijenosu informacija radi općenito sa znatno manjim snagama nego u tehnici jakih struja.

Naprotiv će elektroenergetski, dakle jakostrojni uređaji, raditi u onom području na prikazanom dijagramu, gdje je korisnost η po mogućnosti što veća. To je zbog toga što je svrha tih uređaja da velike količine električke energije prenesu potrošačima uz što manje gubitke energije, dakle što ekonomičnije. Iz dijagrama vidimo da ćemo takve prilike imati ako su unutarnji otpori izvora znatno manji u odnosu na otpore trošila.

5.9. MJERENJE SNAGE I RADA ELEKTRIČNE STRUJE

Mjerenje snage može se pri istosmjernoj struji obaviti prema jednadžbi $P = U \cdot I$ na taj način da se ampermetrom izmjeri jakost struje, a voltmetrom napon, pa je onda umnožak broja volta i ampera snaga P izražena u vatima.

Osim ove indirektno metode, moguće je snagu izmjeriti i direktno instrumentom nazvanim vatmetar, koji otklonom kazaljke na baždarenoj skali pokazuje odmah podatak o broju vata.

U principu se mjerni sistem vatmetra sastoji od dva svitka (elektromagneta), od kojih je jedan protjecan strujom I , a drugi priključen na napon U . Oba svitka djeluju kao magneti jedan na drugog silom koja je proporcionalna magnetizmu jednog i drugog elektromagneta, a to znači proporcionalna umnošku $U \cdot I$. Stvorena sila iskorišćuje se za pomak kazaljke instrumenta, a jedna spiralna opruga je uravnotežuje svojom protusilom, pa je tako pomak kazaljke proporcionalan umnošku $U \cdot I$, dakle snazi P .

Kad želimo izmjeriti snagu nekog trošila moramo dakle, strujni svitak vatmetra uključiti u spojnoj shemi isto tako kao što se uključuje ampermetar, tj. serijski s trošilom, dok se naponski svitak priključuje paralelno na trošilo, kao i voltmetar. Time dovodimo vatmetru upravo one faktore U i I koji se odnose na trošilo.

Isto tako možemo izmjeriti snagu izvora, samo onda treba vatmetru privedi vrijednosti napona i struje koje se odnose na sam izvor.

Izvana ima, prema tome, vatmetar četiri stezaljke (priključnice) i to dvije strujne i dvije naponske.

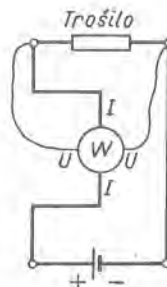
Da bismo mogli vatmetar pravilno spojiti moramo znati koje su stezaljke u vezi sa strujnim, a koje s naponskim svitkom. Zato se stezaljke na neki način vidljivo označuju, na primjer

strujne slovima I ili A ,
naponske slovima U ili V .

Ako bismo, naime, strujne stezaljke pogrešno spojili, kao naponske na puni napon U , došlo bi do oštećenja instrumenta, jer strujni svitak koji se serijski veže mora imati neznatan otpor, pa takav krivi spoj znači gotovo potpuni kratak spoj.



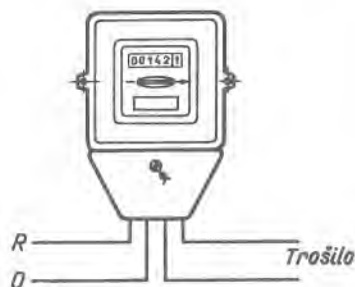
Sl. 5.7. Vanjski izgled vatmetra.



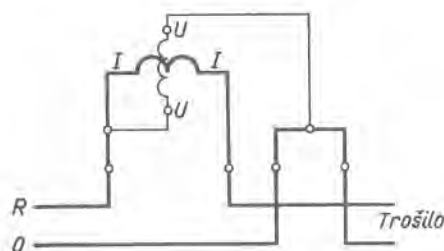
Sl. 5.8. Shematski prikaz vatmetra i način priključivanja.

Slika 5.7 prikazuje vanjski izgled vatmetra, a slika 5.8 njegov shematski prikaz i način priključivanja u spojnoj shemi gdje želimo izmjeriti snagu trošila.

Za mjerenje električne energije upotrebljavaju se instrumenti nazvani kilovatsatna brojila. Budući da električna energija $W = U \cdot I \cdot t$ ima iste električne



Sl. 5.9. Kilovatsatno brojilo.



Sl. 5.10. Mjerenje potroška električne energije kilovatsatnim brojilom.

faktore: napon U i struju I , priključit će se u spojnoj shemi kilovatsatno brojilo u principu isto kao i vatmetar. U svom sistemu i kilovatsatno brojilo ima dva svitka, strujni i naponski, koji kod priključka stvaraju magnetsku silu. No dok je u vatmetru ta sila bila uravnotežena spiralnom oprugom i samo izvršila pomak kazaljke, u kilovatsatnom brojilu pušta se da djeluje kao kod motora i da okreće jednu pločicu pričvršćenu na osovinu. Faktor vremena t , koji također dolazi u jednadžbi

za proračun energije, uzima se ovdje u obzir time što će osovina pod utjecajem sile izvršiti to veći broj okretaja, što je vrijeme t veće. Slijedi da izvršeni broj okretaja osovine služi kao mjera za količinu električne energije. Slike 5.9 i 5.10 prikazuju kilovatsatno brojilo i njegov priključak za mjerenje potrošene električne energije trošila.

5.10. SNAGA I ENERGIJA PROMJENLJIVE STRUJE

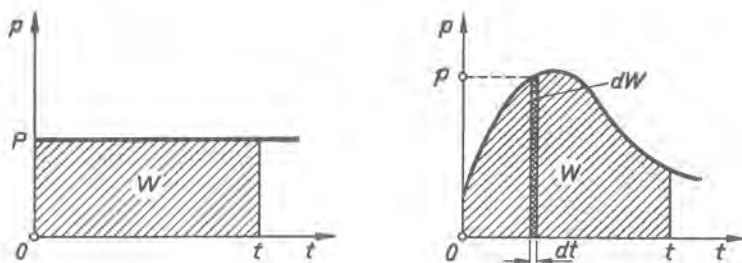
U prijašnjim razmatranjima o električkoj energiji i snazi pretpostavljali smo da su napon i struja bile vremenski konstantne veličine, pa smo ih i označivali velikim slovima U i I . Uz ove uvjete bila je i snaga P konstantnog iznosa.

Kad bi napon i struja bile promjenljive veličine, bila bi i snaga svakog trenutka drugačija, ali njena vrijednost bit će opet u svakom trenutku jednaka umnošku pripadnih trenutnih vrijednosti napona i struje

$$p = f(t) \quad p = u \cdot i$$

Da bismo izračunali ukupni iznos energije za neki konačni interval vremena t , moramo pri promjenljivim vrijednostima napona i struje najprije odrediti iznos energije za infinitezimalno malo vrijeme dt , jer u tako kratkom vremenskom intervalu smijemo pretpostaviti da su napon i struja konstantni, pa u tom slučaju jednadžba proporcionalnosti

$$\text{energija} = \text{napon} \times \text{struja} \times \text{vrijeme}$$



Sl. 5.11. Grafički prikaz određivanja električne energije uz konstantnu snagu i uz promjenljivu snagu.

zadržava i ovdje svoju valjanost. Dakako da je za vrijeme dt i iznos energije infinitezimalno mala veličina, pa možemo napisati da je

$$dW = u \cdot i \cdot dt = p \cdot dt$$

Ukupni iznos energije za cijeli konačni interval vremena t jednak je

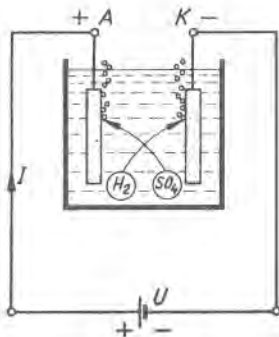
$$W = \int_0^t u \cdot i \cdot dt = \int_0^t p \cdot dt$$

Slike 5.11 prikazuju oba načina određivanja energije uz konstantnu snagu, te ako je snaga vremenski promjenljiva. Vidimo da u koordinatnom sustavu (p, t) površina ispod krivulje snage označuje iznos energije.

6.1.

ELEKTROLITSKE REAKCIJE

Drugi osnovni učinak električne struje jest kemijski učinak ili elektroliza. Kao što je već u uvodu spomenuto, taj se učinak očituje u tome da se neki vodiči pri prolazu električne struje razdvajaju na svoje kemijske sastavne dijelove. Tvari koje bivaju tako pri prolazu struje izvr-gnute elektrolizi zovu se elektroliti, a to su kiseline, lužine i soli otopljene u vodi (ili u nekim otapalima), te izvjesne soli u rastaljeno stanju.



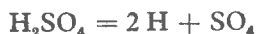
Sl. 6.1. Elektroliza sumporne kiseline.

Slika 6.1 prikazuje shematski kako se vrši elektroliza nekog elektrolita, npr. vodene otopine sumporne kiseline H_2SO_4 . Posuda u kojoj se nalazi tekućina naziva se elektrolitska ćelija, a vodljivi dijelovi uronjeni u elektrolit pomoću kojih se uspostavlja električki spoj elektrolita s električkim izvorom zovu se elektrode. To su najčešće metalne ili ugljene ploče i palice. Pozitivna elektroda na koju struja ulazi u elektrolit je anoda, a negativna, gdje struja izlazi, je katoda.

Pri prolazu struje razdvaja se elektrolit i jedan njegov dio ide na katodu, a drugi na anodu. Čestice koje se talože na katodi zovu se kationi, a one koje se izlučuju na anodi, anioni.

Ispitivanja pokazuju da su kationi npr. vodik i metali, dok su preostali dijelovi elektrolita, a to su ostaci kiseline, OH grupe i drugo, anioni.

Tako će se pri elektrolizi sumporne kiseline na katodi izlučivati vodik u obliku mjehurića, dok će skupina SO_4 ići na anodu



Ovo bi dakle bila primarna elektrolitska reakcija što se dobiva pri elektrolizi. No redovno će se zbivati nakon toga još razne naknadne, sekundarne reakcije, tako da će konačni rezultat elektrolitskog rastvaranja često biti posve drugačiji nego osnovno primarno izlučivanje.

To se vidi već i u našem primjeru pri elektrolizi H_2SO_4 , jer će kiselinski ostatak SO_4 — budući da ne može sam postojati — kao kemijski vrlo aktivan reagirati s onim tvarima na koje naiđe pri izlučivanju na anodi. Ako je anoda od platine, koja je kemijski inertna, neće se SO_4 moći vezati s platinom (ili s ugljenom), nego će stupiti u reakciju s vodom, prema jednadžbi



U tekućini ostaje, dakle, sadržaj kiseline nepromijenjen, jer se sekundarnom reakcijom stvara natrag sumporna kiselina, samo je konačni rezultat pri elektrolizi taj da se na katodi izlučuje vodik, a na anodi kisik. Naoko izgleda kao da je to elektroliza vode, no poznato je da je čista voda izolator i ne vodi električnu struju, a samo uz neke dodatke postaje vodljiva.

Na sličan način može se pratiti i proces elektrolize ako se u vodenoj otopini srebrna nitrata, AgNO_3 , nalazi kao anoda srebrna pločica, a kao katoda neki metalni predmet, npr. metalna kontaktna poluga sklopke, izrađena od bakra. Primarno će se metal iz elektrolita, a to je srebro, izlučivati na bakrenoj katodi i poluga sklopke bit će posrebrna.

Istovremeno se na anodi izlučuje kiselinski ostatak NO_3 , koji se međutim lako spaja sa srebrom anode pa se stvara natrag AgNO_3 , a taj se odmah otapa u vodi i prema tome koncentracija soli AgNO_3 ostaje u tekućini nepromijenjena.

Nakon sekundarne reakcije proces izgleda kao da je srebro s anode direktno prešlo na katodu. No doista srebro s anode ide najprije u elektrolit, a iz elektrolita na katodu.

Tu odmah vidimo veliku praktičku važnost elektrolize za dobivanje raznih kemijskih supstancija električkim putem, a i njezinu veliku primjenu u tzv. galvanostegiji. To je upravo prikazani postupak, da se na predmete izrađene od neplemenitih metala električkim putem nanese sloj plemenitijeg metala, koji će biti zaštita protiv korozije.

6.2.

FARADAYEVI ZAKONI ELEKTROLIZE

Detaljnija ispitivanja koja je vršio već Faraday pokazala su da je količina izlučenih čestica materije na elektrodama ovisna o jakosti struje, vremenu protoka struje, ali i o tvari koja se izlučuje. To je I Faradayev zakon elektrolize, koji se može formulirati jednadžbom

$$m = a \cdot I \cdot t$$

gdje su

m - masa izlučene tvari

I - jakost struje

t - vrijeme prolaza struje

a - elektrokemijski ekvivalent

Budući da umnožak $I \cdot t$ označuje količinu protjecanog elektriciteta Q , može se ovaj zakon prikazati i u obliku

$$m = a \cdot Q$$

što znači da je količina izlučene tvari proporcionalna količini protjecanog elektriciteta. Faktor proporcionalnosti a ovisi o vrsti tvari koja se izlučuje i zove se elektrokemijski ekvivalent. On je numerički jednak masi koja se izluči na elektrodi za vrijeme jedne sekunde, uz jakost struje od jednog ampera, što se vidi iz odnosa

$$a = \frac{m}{Q} = \frac{m}{I \cdot t}$$

Da bi se mogli izvršiti proračuni elektrolitskih procesa potrebno je poznavati elektrokemijske ekvivalente za pojedine tvari koje se pri elektrolizi izlučuju. Jedna vrijednost, i to za srebro, poznata nam je već otprije, jer je prvotno jedinica jakosti struje 1 A bila baš definirana na osnovi elektrolitskog učinka električne struje. Znamo da je za srebro

$$a_{Ag} = 1,118 \text{ mg/As}$$

ili

$$a_{Ag} = 1,118 \cdot 10^{-6} \text{ kg/C}$$

II Faradayev zakon elektrolize kaže da su elektrokemijski ekvivalenti raznih kemijskih elemenata direktno proporcionalni atomskim težinama, a obrnuto proporcionalni valencijama

$$a_1 : a_2 = \frac{A_1}{v_1} : \frac{A_2}{v_2}$$

Pознаvajući, dakle, elektrokemijski ekvivalent za jedan element mogu se izračunati ekvivalenti i za druge elemente.

Ako se radi o izlučivanju čestica koje su sastavljene od više atoma, npr. SO_4 , onda treba u brojnik razlomka staviti sumu atomskih težina od kojih je čestica sastavljena.

Budući da se omjer atomskih težina i valencije naziva u kemiji ekvivalentna težina, iz jednadžbe II Faradayeva zakona slijedi da se elektrokemijski ekvivalenti odnose jednako kao kemijske ekvivalentne težine.

Nadalje iz razmjera II Faradayeva zakona slijedi da su svi omjeri A/av jednaki, pa možemo napisati

$$\frac{A_1}{a_1 \cdot v_1} = \frac{A_2}{a_2 \cdot v_2} = \dots = \frac{A}{a \cdot v} = \text{konst} = F$$

Konstantna vrijednost ovih omjera jest

$$F = 96489 \cdot 10^3 \text{ As/kg-ion}$$

i naziva se Faradayeva konstanta, a označuje količinu naboja koja otpada na jedinicu mase uz valenciju 1.

Iz gornjih odnosa možemo izračunati elektrokemijski ekvivalent

$$a = \frac{A}{v} \cdot \frac{1}{F} = \frac{A}{v \cdot 96489 \cdot 10^3} \quad (\text{kg/As})$$

Oba Faradayeva zakona elektrolize mogu se, dakle, povezati u jednoj jednadžbi

$$m = \frac{A}{v} \cdot \frac{1}{F} \cdot I \cdot t = \frac{1}{96489 \cdot 10^3} \cdot \frac{A}{v} \cdot Q$$

što znači da su uz istu količinu elektriciteta pri elektrolizi količine izlučenih tvari proporcionalne kemijskim ekvivalentnim težinama.

6.3.

DISOCIJACIJA

Pojava elektrolize objašnjava se ovako: Kad se u vodi otope molekule soli, kiseline ili lužine, dolazi do tzv. disocijacije, što znači da se prvotno kompaktne neutralne molekule u otopljenom stanju razdijele na pozitivno i negativno nabijene ione. Atomi vodika i metala predaju neke svoje elektrone (valentne) ostalom dijelu molekule, pa će tako vodik i metali biti pozitivni ioni, dok oni preostali dijelovi postaju negativni ioni.

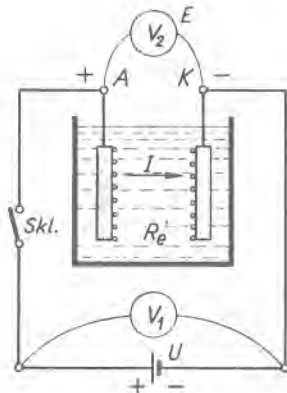
Ako se sada na elektrode koje su uronjene u elektrolitsku otopinu priključi napon električkog izvora, doći će do privlačenja suprotnih električkih naboja, pa će pozitivna ploča, anoda, privući k sebi negativne ione, koje zato zovemo anionima, dok će negativna katoda privući pozitivne ione, katione.

Vidimo da se električna struja u elektrolitskoj otopini ostvaruje na posve drugi način nego struja u metalnim vodičima, gdje su se pomicali samo slobodni elektroni. Ovdje imamo gibanje električki pozitivnih naboja i električki negativnih naboja koji su vezani na čestice materije, pa tako uz pojavu električne struje imamo istovremeno i transport materije koja se taloži na elektrodama.

U trenutku kada privučeni ioni dođu na suprotno nabijene elektrode nastaje neutralizacija iona. Pri tome pozitivni ioni dobiju od katode manjkajuće elektrone, dok negativni ioni predaju svoje suvišne elektrone anodi. Od izvora moraju, dakle, katodi stalno pritjecati elektroni, dok će od anode elektroni stalno odlaziti u izvor. Ionsko strujanje u elektrolitu nastavlja se u ostalim dijelovima strujnog kruga kao gibanje elektrona, pa je tako strujni krug opet normalno zatvoren.

6.4. NAPON POLARIZACIJE I POTROŠAK ENERGIJE PRI ELEKTROLIZI

Pri elektrolizi izlučuju se na elektrodama supstancije različite od materije koja se nalazi u tekućini elektrolita otopljena, ili u rastaljenju stanju. Kažemo da je pri prolazu električne struje kroz elektrolit dobivena kemijska energija na račun potrošene energije iz električkog izvora.



Sl. 6.2. Mjerenje napona polarizacije.

voltmetar V_2 s kojim mjerimo napon na elektrodama elektrolitske ćelije.

Ako su obje elektrode izrađene od platine, u početku ispitivanja (dok sklopkom još nije priključen napon izvora na ćeliju) voltmetar V_2 će pokazivati nulu, jer je očito da se obje jednake platinene pločice nalaze u jednakim okolnostima, pa prema tome imaju jednake potencijale. Napon je, dakle, kao razlika jednakih potencijala, jednak nuli.

Kad se priključi elektrolitska ćelija na napon izvora U ampermetar pokazuje otklon jer prolazi struja, a budući da zanemarujemo otpor priključnog voda, bit će napon na elektrodama što ga pokazuje voltmetar V_2 jednak naponu izvora U . Za vrijeme prolaska struje vrši se elektroliza sumporne kiseline, no zbog sekundarne reakcije izlučivat će se na anodi kisik, a na katodi vodik. Ovi plinovi za vrijeme elektrolize obavijaju, dakle, elektrode i izlaze kao mjehurići iz tekućine.

Ako sada, nakon što je neko vrijeme vršena elektroliza, prekinemo sklopkom spoj elektrolitske ćelije s izvorom, prestaje teći struja u strujnom krugu, ampermetar pokazuje nulu, no voltmetar V_2 pokazuje neki otklon, iako nemamo vezu s izvorom.

Za razliku od početnog stanja (kada je napon na voltmetru V_2 bio jednak nuli) pojavio se zbog elektrolize na elektrodama neki napon E , nešto manji od napona U . Ako pogledamo smjer djelovanja tog napona i kakav je njegov polaritet, vidimo da je anoda, dakle elektroda koja je bila vezana na pozitivni pol i sada pozitivna, a i katoda je zadržala negativni polaritet. Zbog toga što su sada ploče polarizirane naziva se napon E napon polarizacije.

Unutar strujnog kruga djeluje, dakle, napon polarizacije pri elektrolizi protivno smjeru struje I , to jest protivno naponu izvora U . To je serijski protuspoj dvaju napona.

Da bismo odredili onaj iznos električke energije koji je potrošen pri elektrolizi baš za sam kemijski proces, moramo u jednadžbu za proračun energije

$$\text{energija} = \text{napon} \times \text{jakost struje} \times \text{vrijeme}$$

uvrstiti one električke vrijednosti koje su u vezi samo s procesom odvajanja supstancija.

Potrebno je, dakle, još detaljnije ispitati naponske prilike pri elektrolizi, pa ćemo zato u spojnoj shemi koja predložuje elektrolizu sumporne kiseline, slika 6.2, uz voltmetar V_1 koji mjeri napon izvora U , priključiti još i

Da bi ipak u procesu elektrolize usprkos suprotnom djelovanju napona polarizacije prolazila struja, mora napon izvora savladati polarizaciju, a kako mora pokriti i gubitke napona zbog omskog otpora elektrolita R_e , treba da je

$$U = E + I \cdot R_e$$

Iz ove se jednadžbe razabire zašto je $E < U$.

Ako sada gornju naponsku jednadžbu pomnožimo na obim stranama sa $I \cdot t$ dobivamo

$$U \cdot I \cdot t = E \cdot I \cdot t + I^2 \cdot R_e \cdot t$$

Tu su $U \cdot I \cdot t$ ukupna energija koju je izvor dao elektrolitskoj ćeliji, a $I^2 \cdot R_e \cdot t$ iznos energije pretvorene zbog otpora elektrolita u Jouleovu toplinu, pa će prema tome $E \cdot I \cdot t$ biti iznos električke energije pretvorene u kemijsku energiju

$$A_{izv} = A_{kom} + Q_{topl}$$

Uzrok zbog kojeg je došlo do stvaranja napona polarizacije E treba tražiti u promijenjenim prilikama u kojima se za vrijeme elektrolize nalaze elektrode. Dok su prije procesa elektrolize obje jednake platinene ploče bile u direktnom dodiru s elektrolitom, pa su s obzirom na elektrolit obje bile potpuno u jednakim prilikama, sada, nakon što je vršena elektroliza, prilike su se promijenile utoliko da je anoda obavijena mjehurićima vodika, a katoda mjehurićima kisika. Zbog toga i pripisujemo nastajanje napona polarizacije prisustvu tih različitih materija na elektrodama.

Da je ovakvo zaključivanje ispravno možemo se osvjedočiti na taj način da staklenim štapićem odstranimo naslage plinova s ploča. Čim elektrolit bude opet na obje ploče u dodiru s čistom platinom, nestat će napona polarizacije.

Oдавде možemo zaključiti da će se općenito na dvjema pločama dobiti napon ako se u elektrolit urone dvije ploče različitog kemijskog sastava. Ovo se objašnjava time što svaka ploča uronjena u elektrolit dobiva prema elektrolitu neki određeni potencijal, pa ako su ploče jednake, njihovi su potencijali jednaki i na pločama nema napona. Ako su pak ploče različite, postoji na njima zbog razlike potencijala neki napon.

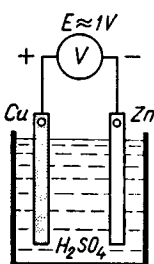
6.5.

PRIMARNI ELEMENTI

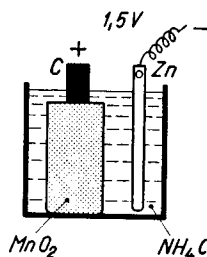
Ako se u elektrolit urone dvije ploče različita kemijskog sastava, pojavit će se zbog elektrolitske polarizacije na pločama neki napon E . Tako se mogu sastaviti različiti električki izvori, koji se nazivaju galvanski elementi. Prvi takav kemijski izvor električke energije otkrio je oko 1800 godine A. Volta, a principijelni sastav tog njegovog elementa prikazuje slika 6.3, gdje su u razrijeđenu sumpornu kiselinu uronjene ploče od bakra i cinka. Unutarnji napon E takvog elementa, stvoren prvotnom polarizacijom, iznosi oko 1 V. Pozitivni pol tako složenog elementa je bakar, a cinak je negativni pol.

Ako se galvanski elementi iskoriste kao kemijski izvori za priključak trošila, u vanjskom dijelu zatvorenog strujnog kruga prolaziti će struja od pozitivnog pola izvora kroz trošilo do negativnog pola izvora, a u unutrašnjosti izvora kroz sam elektrolit struja će prolaziti od negativnog pola prema pozitivnom polu. Pri tom će sada zbog elektrokemijskih procesa nastati promjene u prvotnom kemijskom sastavu ploča, i to upravo u tom smislu da se zbog novonastale polarizacije smanjuje prvotni napon E .

Da bi poboljšali, a to znači produljili vrijeme trajanja ovakvih galvanskih elemenata, mnogi su fizičari u prošlom stoljeću konstruirali različito sastavljene elemente, koji su poznati po imenu svojih pronalazača. To su Danielov, Groveov, Meidingerov, Bunsenov, Leclanchéov itd. element, koji su omogućili prvi razvitak elektrotehnike.



Sl. 6.3. Principijelni sastav Voltinog elementa.



Sl. 6.4. Leclancheov elementat.

Karakteristično je za sve te elemente da je glavna briga njihovih autora bila — osim što su željeli postići što viši napon — da naknadnu polarizaciju uzrokovanu prolazom struje kroz elektrolit ili izbjegnu ili je ponište pomoću takozvanih depolarizatora.

Nakon otkrića rotacionih generatora, u kojima se mehanička energija pretvara u električnu, izgubili su galvanski elementi onu veliku važnost koju su imali kao jedini izvori u prošlom stoljeću, no ipak se za specijalne svrhe upotrebljavaju mnogo još i danas; to su suhi elementi i akumulatori.

Suhi elementi razvili su se iz Leclanchéova elementa. Na slici 6.4 taj elemenat je prikazan kako izgleda u normalnoj izvedbi, s mnogo tekućeg elektrolita. U staklenoj posudi nalazi se kao elektrolit vodena otopina amonijeva klorida (salmijaka): NH_4Cl . Pozitivni pol je ugljeni štap obložen prašinom manganova superoksida MnO_2 , dok je negativni pol cinkov štap. Unutarnji napon E takvog elementa je oko 1,5 V.

Za vrijeme prolaska struje nastaju u ćeliji elektro-kemijske reakcije, pri čemu će se iz elektrolita NH_4Cl anion klora (koji kao nemetal ide protiv smjera struje), vezati sa cinkom u cinkov klorid, a NH_4 koji se vlada kao metal, kad stigne na ugljenu ploču raspada se na amonijak i vodik

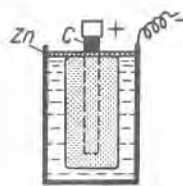


Zbog svog polarizacionog djelovanja vodik bi štetno djelovao na napon elementa i zato je ugljeni štap obložen manganovim superoksidom, da obiljem svojeg kisika veže vodik u neutralnu vodu



Tako je manganovim superoksidom kao depolarizatorom postignuto da Leclanchéov elemenat može dosta dugo davati struju a da mu je napon prilično stalan.

Elementi suhe baterije sastavljeni su od istih kemijskih supstancija kao i Leclanchéov elemenat, samo je konstrukcija takva da je tekući elektrolit zamijenjen vlažnom kašastom smjesom $\text{NH}_4\text{Cl} + \text{H}_2\text{O}$ i brašna koja, dakako, mora imati, kao svaki elektrolit, vodu, ali ne toliko da bi se lako izlila iz posude.



Sl. 6.5. Elemenat suhe baterije.

Posuda elementa je valjkast lončić od cinkova lima i služi odmah kao negativni pol, a ugljeni štapić, kao pozitivni pol, nalazi se, isto kao i kod Leclanchéova elementa obložen praškom manganova superoksida, u poroznoj vrećici. Da bi elektrolit što dulje zadržao vlažnost zatvoren je element papirnim poklopcem i zaliven smolom, slika 6.5. Unutarnji napon elementa je 1,5 V, a plosnata baterija od tri elementa u serijskom spoju ima 4,5 V.

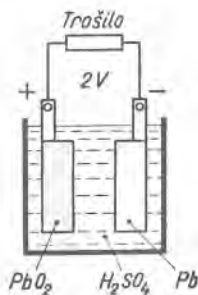
Nakon nekog vremena suhe baterije ipak izgube napon, jer su se upotrebom istrošile aktivne supstancije elementa (jedino je ugljeni štapić ostao netaknut), pa je regeneracija takvog elementa nemoguća. U aparatima s takvim suhim elementima treba istrošene baterije zamijeniti novim, svježim baterijama.

6.6.

AKUMULATORI

Akumulatori su takvi kemijski izvori koji se mogu, nakon što im napon upotrebom padne, ponovno regenerirati. To se vrši električnom strujom, koja iz stranog izvora prolazi kroz elektrolit akumulatora u smjeru protivnom od onoga kada je akumulator davao struju trošilu.

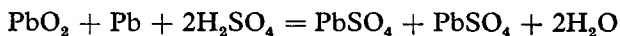
Rad akumulatora objasniti ćemo na olovnom akumulatoru, koji je u biti sastavljen prema slici 6.6. U stanju kad je sposoban da daje struju trošilu, kada je, kako se kaže, pun, on ima na pozitivnoj ploči kao aktivnu tvar olovni superoksid, dok mu je negativna ploča čisto olovo. Elektrolit je razrijeđena sumporna kiselina, a napon jedne ćelije je 2 V.



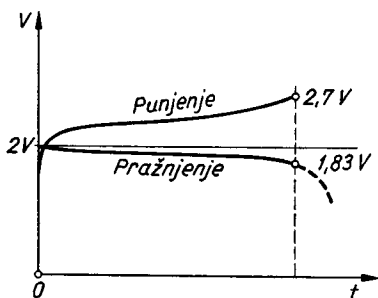
Sl. 6.6. Olovni akumulator.

Za vrijeme upotrebe, kad akumulator daje energiju priključenim trošilima, prolazi kroz elek-

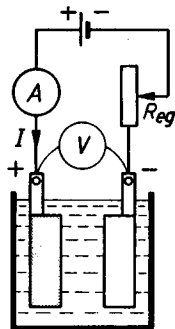
trolit struja i vrši se kemijska reakcija predočena u konačnom obliku formulom



Vidimo da se obje ploče pri upotrebi akumulatora postepeno kemijski izjednačuju, tj. postaju olovni sulfat, što dovodi do toga da napon jedne ćelije postepeno pada, on bi potpuno nestao kad bi obje ploče bile potpuno sulfatirane.



Sl. 6.7. Dijagram promjene napona olovnog akumulatora.

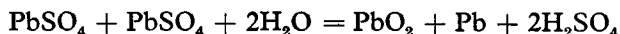


Sl. 6.8. Spojna shema za punjenje akumulatora.

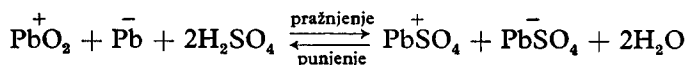
U dijagramu na sl. 6.7 prikazan je za vrijeme pražnjenja postepeni pad napona U na stezaljkama jedne ćelije opterećenog akumulatora. Vidi se, da možemo u pogonu tokom nekog vremena računati s približno konstantnim naponom na stezaljkama jedne ćelije od 1,95 V, no zatim napon prilično brzo pada, a nakon što je pao na vrijednost 1,85 V ne smije se dalje upotrebljavati. To je zato da se ploče suviše ne sulfatiraju, jer bi onda bila otežana njihova regeneracija, a osim toga napon koji je smanjen za više od 10% ne može normalno služiti za pogon aparata koji zahtijevaju svoj nominalni napon.

Regeneracija ili punjenje akumulatora vrši se tako da se iz nekog stranog izvora istosmjerne struje propusti struja kroz akumulator ali u smjeru suprotnom onome kad se akumulator praznio, slika 6.8.

Pri tome se punjenjem vrši kemijska reakcija suprotna onoj pri pražnjenju, jer elektrokemijski proces je u akumulatorima reverzibilan



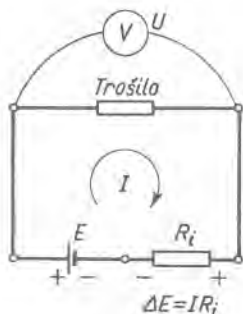
Može se, dakle, jedna te ista kemijska jednadžba upotrijebiti za punjenje i pražnjenje, samo je treba čitati u smjeru naznačenih strelica



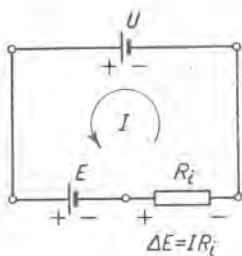
Dok je za vrijeme pražnjenja napon na stezaljkama postepeno padao, za vrijeme punjenja on raste, jer se ploče vraćaju po svom kemijskom sastavu u prvobitno stanje. Krivulja porasta napona pokazuje da je u početku punjenja napon

nešto veći od 2 V, no on i dalje raste, a nakon završetka punjenja postigne napon U vrijednost do 2,7 V, slika 6.7.

Da je napon na stezaljkama pri pražnjenju manji od napona za vrijeme punjenja objašnjava se u prvom redu razlikom u unutarnjem, polarizacijom stvorenom naponu. Za vrijeme pražnjenja E je sve manje, dok za vrijeme punjenja E raste. No osim toga treba još uzeti u obzir da se za vrijeme pražnjenja unutarnji pad napona u otporu ćelije odbija od unutarnjeg napona E , dok se za vrijeme punjenja taj napon pribraja unutarnjem naponu, kako je to vidljivo na shematskoj slici 6.9.



Sl. 6.9. Napon stezaljki akumulatora je pri punjenju veći nego pri pražnjenju.



Sl. 6.10. Areometar za mjerenje gustoće kiseline.

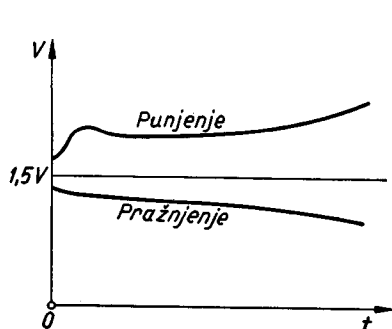
Iz jednadžbe koja prikazuje kemijske procese u akumulatoru za vrijeme punjenja i pražnjenja vidi se da pri opterećenju elektrolit akumulatora biva rjeđi, jer se od dijela sumporne kiseline stvara voda nakon što je SO_4 prešao na ploče. Naprotiv, za vrijeme punjenja SO_4 se vraća s ploča natrag u elektrolit i on biva gušći. Na osnovu toga može nam i gustoća kiseline služiti kao indikator da saznamo da li je akumulator pun ili prazan. Posebno izrađeni areometri za mjerenje gustoće kiseline, slika 6.10, imaju na plovku istaknutim oznakama naznačene gustoće kiseline punog i ispražnjenog akumulatora.

Korisno je znati koliko dugo možemo iz napunjenog akumulatora trajno uzimati struju nominalne jakosti. Taj umnožak broja ampera i broja sati, dakle broj ampersati, naziva se kapacitet akumulatora, što je u stvari količina elektriciteta koju možemo pri nominalnoj struji dobiti od akumulatora. Ako je, dakle, kapacitet akumulatora npr. 120 Ah, uz nominalnu struju 20 A, znači da bi akumulator mogao biti trajno puno opterećen 6 sati

$$Q = I \cdot t; \quad t = Q/I$$

No taj kapacitet nije pri raznim jakostima struje isti. Pokazalo se da akumulator opterećen slabijom strujom može dulje vremena odavati struju a da mu napon još ne padne ispod 1,85 V, što se smatra donjom granicom pri opterećenju. Pri slabij struji, dakle, kapacitet nešto poraste u odnosu na kapacitet pri nominalnoj struji, a obrnuto će pri struji jačoj od nominalne kapacitet biti manji. To se objašnjava time što pri slabij struji mogu elektrokemijski procesi zahvatiti dublje slojeve na pločama akumulatora, pa se aktivne supstancije bolje iskorišćuju nego pri većoj jakosti struje.

Budući da se pri punjenju akumulatora privedena količina elektriciteta $Q = I \cdot t$ ne potroši samo za stvaranje aktivne supstancije na pločama, već se jedan dio potroši i na neželjeno stvaranje plinova (elektroliza vode), punjenje će trebati više ampersati nego što ih se dobiva pri pražnjenju. Omjer



$$\xi = \frac{\text{Ah pražnjenja}}{\text{Ah punjenja}}$$

zove se dobrota akumulatora, a jer se osim toga pri punjenju privodi na stezaljke viši napon nego je napon pražnjenja, to je omjer energija, dakle korisnost, još manja od dobrote

$$\eta = \xi \cdot \frac{U \text{ pražnjenja}}{U \text{ punjenja}}$$

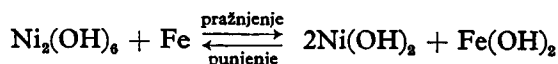
Sl. 6.11. Dijagram promjene napona alkalijskog akumulatora.

Olovni akumulatori imaju ξ oko 0,95, a

$$\eta = 0,75 \div 0,85.$$

Osim olovnih akumulatora ima još i drugačije sastavljenih, od kojih spominjemo alkalijski Edisonov nikal-željezni akumulator. Alkalijski se naziva zato što mu je elektrolit vodena otopina kalijeve lužine, a aktivne supstancije punog akumulatora su na pozitivnom polu $\text{Ni}_2(\text{OH})_6$, a na negativnom čisto željezo, Fe.

Za vrijeme punjenja i pražnjenja elektrolit se ništa ne mijenja, jer se promjene odvijaju samo na pločama, prema jednadžbi



Promjenu napona pri punjenju i pražnjenju prikazuje slika 6.11, gdje vidimo da je napon pri opterećenju promjenljiv od 1,4 do 1,5 V, a pri punjenju raste od 1,6 do 1,8 V. Korisnost ovog akumulatora je lošija nego olovnog, jer mu je unutarnji otpor veći nego što je u olovnih akumulatora. Ipak je prednost Edisonova akumulatora u tome što mu ne škode niti mehanički niti jaki električki udarci, na što je olovni akumulator veoma osjetljiv.

7.

NEKE PRIMJENE OSNOVNIH ZAKONA ELEKTRIČKOG STRUJANJA

7.1. PROŠIRENJE MJERNOG PODRUČJA VOLTMETRA I AMPERMETRA

U prijašnjim tumačenjima bilo je ukratko objašnjeno kako se mjeri jakost električne struje, a kako napon. Za ta mjerenja upotrebljavamo instrumente ampermetar i voltmetar. Spomenuto je da ampermetar djeluje na osnovi magnetskog učinka električne struje. Ako, naime, kroz svitak, koji se nalazi u magnetskom polju permanentnog magneta prolazi struja, djelovat će na svitak sila koja se iskorisćuje za pomak kazaljke instrumenta. Ta sila, i prema tome pomak kazaljke, bit će to veći što je jakost struje veća.

Ovakvi instrumenti s pomičnim svitkom u polju permanentnog magneta zapravo su mjerila jakosti istosmjerne struje, no možemo ih upotrijebiti i posredno za mjerenje napona, jer uz konstantni otpor instrumenta R_i postoji direktna proporcionalnost između jakosti struje koja prolazi kroz instrument i napona uvedenog na stezaljke instrumenta, prema jednadžbi

$$U = I \cdot R_i$$

Osim vlastitog otpora instrumenta R_i još je bitan konstruktivni podatak, karakterističan za rad instrumenta, jakost struje kod koje se postizava pun otklon kazaljke: I_i .

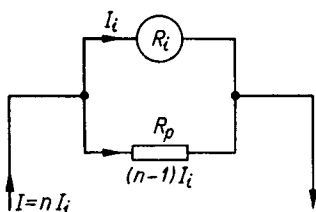
Kažemo da je, na primjer, 0,5-miliamperski instrument građen tako da pri jakosti struje od 0,5 mA dobivamo pun otklon kazaljke. Ako je pak otpor instrumenta pri tom npr. 4000 Ω , onda će pri punom otklonu na njegovim priključnicama biti napon 2 V, pa bi se tako isti instrument mogao direktno upotrijebiti i za mjerenje napona do 2 V.

Na osnovi ovih brojeva možemo o tome instrumentu dati još neke karakteristične podatke. Prvo, pri punom otklonu potrošak snage instrumenta je $P = I^2 \cdot R_i = U \cdot I = 10^{-3} \text{ W} = 1 \text{ mW}$. Drugi karakteristični podatak je da ima 4000 $\Omega/2 \text{ V} = 2000$ oma po voltu.

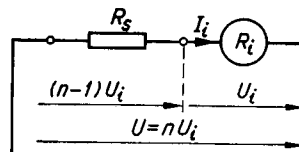
Ovakav instrument možemo sada dalje upotrijebiti kao osnovni dio konstrukcije (mjerni sistem) ampermetra ili voltmetra za mjerenje znatno jačih struja, odnosno znatno viših napona. Treba mu samo dodati odgovarajuće povezane otpornike.

Pri tome ćemo, da bismo proširili mjerno područje ampermetra, dodatne otpornike vezati paralelno s instrumentom, dok kod voltmetra pri mjerenju viših napona treba dodatne otpore vezati serijski s instrumentom.

Na osnovi spojnih shema prema slici 7.1 i 7.2 i pomoću osnovnih zakona električnih strujnih krugova možemo lako odrediti koliki moraju biti ovako dodani otpori da bi se dobilo željeno proširenje mjernog opsega.



Sl. 7.1. Proširenje mjernog područja ampermetra paralelnim otporom R_p .



Sl. 7.2. Proširenje mjernog područja voltmetra serijskim otporom R_s .

Ako ampermetrom želimo mjeriti struju I , koja je n puta jača od struje instrumenta I_i , prema I Kirchhoffovu zakonu mora preostali dio struje $(n - 1) \cdot I_i$ prolaziti kroz paralelno vezani otpornik R_p , koji se zove shunt (šant), a vrijednost njegova određuje se na osnovi II Kirchhoffova zakona. Prema slici 7.1 slijedi da je

$$I_i \cdot R_i = (n - 1) \cdot I_i \cdot R_p$$

pa je

$$R_p = \frac{R_i}{n - 1}$$

Kod proširenja mjernog opsega voltmetra tražena vrijednost serijski dodanog predotpornika izračunava se na osnovi činjenice da se pri struji I_i mora suvišak napona potrošiti u otporu R_s . Ako je, dakle, napon instrumenta u punom otklonu $U_i = I_i \cdot R_i$, a želimo mjeriti napon $U = n \cdot U_i$, imamo odnos napona

$$(n - 1) \cdot U_i : U_i = R_s : R_i$$

odakle slijedi

$$R_s = (n - 1) \cdot R_i$$

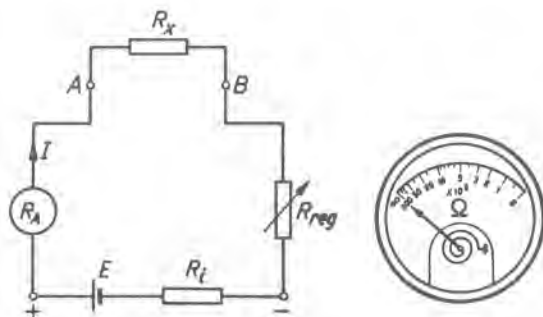
Vidimo da se dodavanjem otpora ukupni otpor voltmetra povećava, dok se kod ampermetra taj otpor smanjuje.

Idealno bi bilo da voltmetri imaju što veći (∞), a ampermetri što manji (0) otpor, jer bi onda potrošak snage samog instrumenta bio jednak nuli. Osim toga, ukopčanje instrumenta u strujne krugove ne bi tada promijenilo prvotne strujne i naponske prilike u strujnom krugu.

7.2.

OMOMETAR

Na sličan način na koji je ampermetar bio upotrijebljen za mjerenje napona, dakle kao voltmetar, možemo ampermetar upotrijebiti i za mjerenje električnih otpora, dakle kao omometar. I ovdje treba skalu ampermetra prebaždariti u tom smislu da otkloni kazaljke umjesto broja ampera daju direktno podatke o broju oma.



Sl. 7.3. Spojna shema omometra. Razdioba skale omometra.

Funkcioniranje omometra razabrat ćemo na osnovi njegove spojne sheme prikazane na slici 7.3. Vidimo da su na izvor konstantnog unutarnjeg napona E i unutarnjeg otpora R_i u serijskom spoju povezani nepoznati otpor R_x i još jedan dodatni regulacioni otpornik R_{reg} , a dakako i ampermetar otpora R_A . Vodič nepoznatog otpora R_x priključuje se na stezaljke A i B .

Struja koju će ampermetar pokazati određena je jednadžbom

$$I = \frac{E}{R_i + R_A + R_{reg} + R_x}$$

Vidimo da je jakost struje uz konstantne vrijednosti E , R_i , R_A i R_{reg} ovisna još samo o R_x , pa se za svaki otklon kazaljke na ampermetru može umjesto broja ampera na skali označiti broj oma R_x , jer se to može izračunati iz gornje jednadžbe

$$R_x = \frac{E}{I} - (R_i + R_A + R_{reg})$$

Na osnovi ovih relacija možemo vidjeti kako će otprilike izgledati skala na instrumentu. Za $R_x = 0$, tj. ako su stezaljke A i B kratko spojene, struja ima maksimalnu vrijednost pa se ampermetar, izvor i dodatni otpor odaberu tako da se uz napon E i sve otpore R_i , R_A i R_{reg} dobije pun otklon kazaljke. Na maksimalnom otklonu kazaljke stavimo, dakle, za vrijednost broja oma oznaku nula, 0.

Ako je pak otpor R_x velik, a to teoretski znači $R_x = \infty$, strujni krug je prekinut, između stezaljka A i B je zrak, ampermetar pokazuje nulu, kazaljka se nije pomaknula, pa će na početku skale za omometar biti oznaka ∞ .

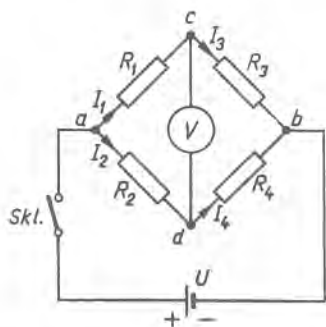
Ostali dio skale ima sve vrijednosti broja oma od ∞ do 0, porazdijeljene prema gornjem recipročnom zakonu.

Ukoliko se vremenom nešto promijene parametri E i R_i izvora, a to je obično suha baterija ugrađena u instrument, može se s regulacionim otpornikom R_{reg} ponovno udesiti omometer da pokazuje točno. U tu svrhu se stezaljke A i B kratko spoje i R_{reg} mijenja toliko da kazaljka dobije pun otklon, gdje je oznaka broja oma 0.

7.3.

WHEATSTONEOV MOST

Veliku važnost i primjenu u mjernoj i regulacionoj tehnici imaju takozvani mosni spojevi. Slika 7.4 prikazuje spojnu shemu najjednostavnijeg među njima, a to je Wheatstoneov most, složen od četiri otpornika, R_1 , R_2 , R_3 i R_4 , spojenih tako da su na jedan izvor priključene dvije paralelne grane, a svaka grana sastavljena je od dva otpornika u serijskom spoju.



Sl. 7.4. Principijelna shema Wheatstoneovog mosta.

Na stezaljke a i b priključuje se napon izvora, a voltmetar V , priključen između točaka c i d , pokazuje napon U_{cd} , dakle razliku potencijala točaka c i d .

U općenitom slučaju, kad otpori $R_1 \dots R_4$ imaju bilo kakve vrijednosti, pokazivat će voltmetar neki napon koji se može lako izračunati pomoću osnovnih jednažba I i II Kirchhoffova zakona. Naročito je zanimljivo kada su otpori $R_1 \dots R_4$ tako odabrani da je napon U_{cd} jednak nuli. U tom slučaju kažemo da je most uravnotežen.

Iz uvjeta da je $U_{cd} = 0$, odnosno $\varphi_c = \varphi_d$, možemo sada izračunati kako se moraju međusobno odnositi otpori $R_1 \dots R_4$ da nastane ravnoteža mosta.

Uz oznake na slici 7.4 možemo pri uravnoteženom mostu za potencijale točke c i točke d napisati izraze

$$\varphi_c = \varphi_a - I_1 \cdot R_1$$

$$\varphi_d = \varphi_a - I_2 \cdot R_2$$

a također i

$$\varphi_c = \varphi_b + I_1 \cdot R_3$$

$$\varphi_d = \varphi_b + I_2 \cdot R_4$$

odakle slijedi

$$U_{cd} = -I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = 0$$

$$U_{cd} = I_1 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_4 = 0$$

i dalje

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2$$

$$I_1 \cdot R_3 = I_2 \cdot R_4$$

pa dijeljenjem dobivamo razmjer

$$R_1 : R_3 = R_2 : R_4$$

To je jednadžba sa četiri veličine, iz koje se može izračunati jedna kao nepoznatica, ako su vrijednosti ostalih triju veličina poznate. Tako se ovaj uravnoteženi most može iskoristiti za mjerenje nepoznatog otpora nekog vodiča označenog slovom X i uključenog na mjesto otpornika R_1 , pa je

$$X : R_3 = R_2 : R_4$$

i odavde slijedi

$$X = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_4}$$

Da bi se ovom metodom izvršilo mjerenje nepoznatog otpora X , treba otpore R_3 , R_2 i R_4 pokusom odabrati tako da voltmetar pokazuje nulu. Da to odabiranje ne potraje predugo ukopča se na mjesto otpornika R_3 jedna veoma tačna normala otpora: R_N , a kao promjenljivi otpornici R_2 i R_4 za udešavanja ravnoteže služe otpori R_a i R_b , što su dijelovi ukupnog otpora jedne otporne žice, koje dobivamo pomicanjem kontakta d na toj žici

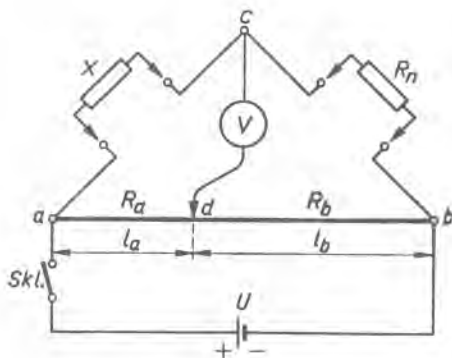
$$R_a = R_2; \quad R_b = R_4, \quad \text{slika 7.5}$$

Ako umjesto omjera R_2/R_4 uvrstimo omjer R_a/R_b , dobivamo

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{\rho \cdot \frac{l_a}{S}}{\rho \cdot \frac{l_b}{S}} = \frac{l_a}{l_b}$$

pa možemo za nepoznati otpor X napisati relaciju

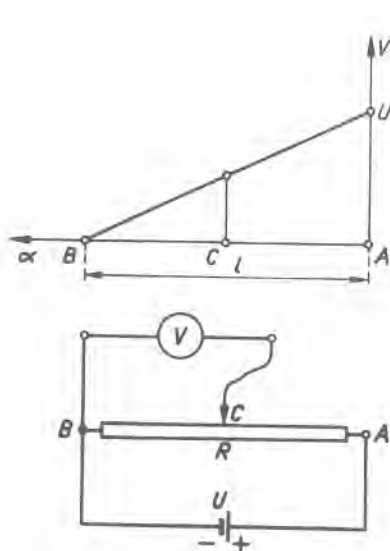
$$X = R_N \cdot \frac{l_a}{l_b}$$



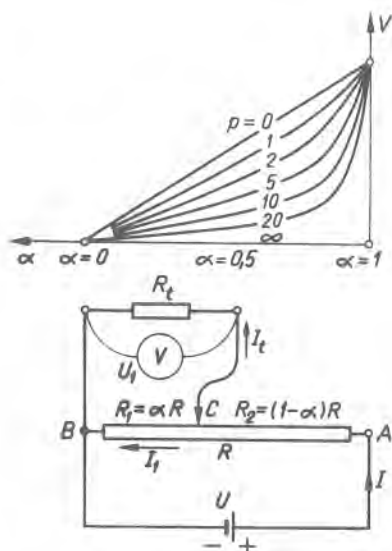
Sl. 7.5. Mjerenje nepoznatog otpora X Wheatstoneovim mostom.

Samo mjerenje vrši se, dakle, tako da se pomični kontakt d pažljivo pomiče po žici ($a b$) dok se na instrumentu dobije otklon nula. Na skali ispod otporne žice ($a b$) naznačene su za pojedine položaje pomičnog klizača d vrijednosti omjera l_a/l_b , pa se onda iznos broja oma nepoznatog otpora dobije tako da se vrijednost normalnog otpora R_N pomnoži s očitanim podatkom na skali. Zbog jednostavnosti uzimaju se vrijednosti normalnih otpora u dekadskim iznosima broja oma.

Priključimo li na izvor napona U otpornik omskog otpora R , prolazit će u otporniku struja $I = U/R$ i pri tome će se na otporniku u smjeru struje smanjivati potencijal, dok će u protivnom smjeru potencijal rasti.



Sl. 7.6. Spojna shema potencijometra i njegov potencijalni dijagram u praznom hodu.



Sl. 7.7. Otporom R_t trošila opterećeni potencijometar i pripadni dijagram napona na trošilu.

Ako je omski otpor jednolično raspodijeljen po cijeloj duljini otpornika bit će i pad potencijala jednoličan, pa može biti predodčen u potencijalnom dijagramu, slika 7.6, pravcem UB , pri čemu je kao referentna točka potencijala nula uzeta negativna stezaljka B .

Spojimo li voltmetar jednim krajem na referentnu točku B , čiji je potencijal $\varphi_B = 0$, a drugi priključak voltmetra pomičemo po otporniku, mijenjat će se kontinuirano napon U_{BC} od nule do pune vrijednosti napona izvora.

Ako umjesto voltmetra priključimo na točke B i C neko trošilo, možemo pomakom točke C na otporniku R udesiti napon priveden trošilu na bilo koju vrijednost od nule do U . Takav uređaj zove se potencijometar.

Pomak točke C po duljini l otpornika dat će nam promjenu napona točno prema potencijalnom dijagramu slika 7.6 samo onda, ako je voltmetar vrlo velikog, teoretski beskonačnog otpora, a to znači ako su stezaljke BC otvorene, što predstavlja prazan hod za napon U_{BC} . No čim se na potencijometar priključi trošilo konačnog otpora, promijenit će se napon U_{BC} u odnosu na napon praznog hoda. U tom, naime, slučaju ne će više biti prijašnjeg potencijalnog dijagrama, jer su se prilike paralelnim spojem otpora trošila bitno promijenile.

Treba, dakle, pobliže ispitati naponske i strujne prilike pri opterećenom potencijometru kad je na priključnice BC spojeno trošilo omskog otpora R_t . Za to imamo spojnu shemu na slici 7.7, gdje nam znače

U ... napon izvora

U_1 ... napon na odvojkju BC , a to je i napon na trošilu: $U_1 = U_t$

R ... ukupni otpor potencijometarskog otpornika

R_t ... otpor trošila

R_1 ... dio otpora potencijometra na koji je paralelno priključeno trošilo

R_2 ... preostali dio otpora potencijometra

I ... struja izvora koja u punom iznosu prolazi i kroz dio R_2

I_t ... struja trošila

I_1 ... struja kroz otpor R_1

Budući da se pomični kontakt C može po volji premještati od B do A otpor R_1 će se mijenjati, pa ga možemo izraziti kao dio ukupnog otpora potencijometra R

$$R_1 = \alpha \cdot R$$

dok je preostali dio

$$R_2 = (1 - \alpha) \cdot R$$

Kako je svrha potencijometra da trošilu pomakom kontakta C mijenjamo privedeni napon, sada ćemo izračunati koliki će biti taj napon U_1 u odnosu na puni napon izvora, ako su nam zadani otpori konstrukcije: R i R_t i to za razne položaje kontakta C , dakle za razne vrijednosti α .

Pri opterećenom potencijometru je otpor između stezaljke C i B jednak $\frac{\alpha \cdot R \cdot R_t}{\alpha \cdot R + R_t}$, dok je cio otpor između A i B jednak

$$\frac{\alpha \cdot R \cdot R_t}{\alpha \cdot R + R_t} + (1 - \alpha) \cdot R = \frac{\alpha \cdot R^2 + R_t \cdot R - \alpha^2 \cdot R^2}{\alpha \cdot R + R_t}$$

pa je odnos napona

$$U_1 : U = \frac{\alpha \cdot R \cdot R_t}{\alpha \cdot R + R_t} : \frac{\alpha \cdot R^2 + R_t \cdot R - \alpha^2 \cdot R^2}{\alpha \cdot R + R_t}$$

odakle slijedi da je

$$U_1 = U \cdot \frac{\alpha \cdot R \cdot R_t}{\alpha \cdot R + R_t} \cdot \frac{\alpha \cdot R + R_t}{\alpha \cdot R^2 + R_t \cdot R - \alpha^2 \cdot R^2}$$

i konačno

$$U_1 = U \cdot \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{R}{R_t}(1 - \alpha)}$$

Budući da se na potencijometar mogu priključivati razna trošila, povoljno je za daljnju analizu uvesti kao promjenljivi parametar p omjer otpora potencijometra i otpora trošila: $p = R/R_t$.

Iz jednadžbe

$$U_1 = U \cdot \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + p(1 - \alpha)}$$

vidimo da napon priveden trošilu ne ovisi samo o položaju kontakta C , dakle ne samo o veličini α , već i o parametru p .

Ako opet prikažemo napon između točaka B i C , dakle napon na trošilu, u potencijalnom dijagramu u ovisnosti o veličini α , dobit ćemo pri opterećenom potencijometru familiju krivulja, jer svakoj vrijednosti parametra p pripada jedan dijagram.

Da bismo odredili prolazak ovih krivulja moramo postepeno za pojedine stalno odabrane vrijednosti parametra p izračunati napone U_1 , koji odgovaraju promjenljivim vrijednostima α .

Pogledajmo i granične slučajeve opterećenja. Za $p = 0$, tj. za $R_t = \infty$, imamo prazan hod, pa je

$$U_1 = U \cdot \alpha$$

ili $U_1 : U = \alpha : 1$, a to je upravo potencijalni dijagram samog otpornika R .

Za $p = \infty$, tj. za $R_t = 0$, dobivamo da je

$$U_1 = U \cdot \frac{1}{\infty} = 0$$

što znači da je napon, neovisno o α , stalno jednak nuli. To je, dakle, kratki spoj predložen u dijagramu linijom u apscisnoj osi.

Ostale krivulje koje se nalaze između ovih graničnih položaja imaju za razne vrijednosti parametra p prolazak skiciran u dijagramu na slici 7.7.

Iako se pomoću potencijometra može istosmjerni napon veoma jednostavno i kontinuirano regulirati, ipak je njegova upotreba u praksi prilično ograničena, što možemo lako shvatiti ako uzmemo u obzir da se u otporima potencijometra u pogonu trajno troši energija koja se pretvara u Jouleovu toplinu. Zbog toga se potencijometar veoma rijetko upotrebljava u uređajima jake struje, jer bi gubici energije bili tako veliki da bi onemogućili ekonomičan rad postrojenja. No u mjernoj tehnici i uređajima slabe struje potencijometar se često upotrebljava, jer su zbog malih jakosti struja i gubici energije neznatni.

7.5.

KOMPENZATOR

Kompenczaciju napona upoznali smo već pri tumačenju serijskog protuspoja dvaju izvora. Osobitu važnost ima međutim kompenzacija u mjernoj i regulacionoj tehnici.

Kao jedan od primjera kako se pomoću potpune kompenzacije napona mogu vršiti osobito precizna mjerenja neka nam posluži spojna shema prikazana na slici 7.8, pomoću koje želimo baždari ti voltmetar. Tu je otpornik potencijometra R u seriji s dodatnim otpornikom R_d vezan na napon izvora E i kroz njega prolazi struja

$$I = \frac{E}{R + R_d}$$

Između dvije točke na potencijometru vlada napon $U_1 = I \cdot R_1$, gdje je R_1 otpor među odabranim točkama A i C , dok je na oba kraja potencijometra A i B napon $U = I \cdot R$.

Ako sada izvor poznatog stalnog napona E_0 normalnog elementa vežemo u serijskom protuspoju s naponom U_1 na točke A i C , možemo pomicanjem točke C , dakle promjenom otpora R_1 , postići da je $|U_1| = |E_0|$. Zbog potpune kompenzacije ovih napona u odvojku normalnog elementa ne teče struja, što konstatiramo na veoma osjetljivom ampermetru (zrcalnom galvanometru). Budući da zato priključak elementa zajedno s ampermetrom ne predstavlja opterećenje za potencijometar, odnos napona U_1 i U točno je određen omjerom otpora

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R}$$

pa je

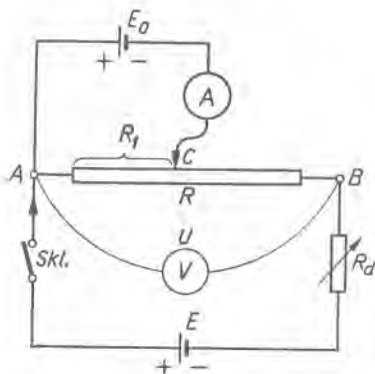
$$U = U_1 \cdot \frac{R}{R_1} = E_0 \cdot \frac{R}{R_1}$$

jer je

$$U_1 = E_0$$

Napon Westonova normalnog elementa je u ovom slučaju, kad je taj element neopterećen, bez struje, točno poznat i on iznosi na temperaturi 20°C $E_0 = 1,01865\text{ V}$. Kako se, osim toga otpornici potencijometra mogu veoma precizno izraditi da je i njihov otpor točno poznat, napon U , što ga ujedno mjeri voltmetar, može se točno izračunati i tako voltmetar baždari ti.

Promjenom dodatnog R_d mijenja se struja I , a time se mijenja i napon koji se mjeri, što je potrebno za baždarenje skale voltmetra.



Sl. 7.8. Baždarenje voltmetra metodom kompenzacije napona.

8.

OSNOVE RJEŠAVANJA LINEARNIH MREŽA ISTOSMJERNE STRUJE

8.1.

UVODNA RAZMATRANJA I OSNOVNE DEFINICIJE

Jednostruko zatvoreni električki strujni krug najjednostavniji je električki uređaj i u njemu se prolaskom električne struje prenaša električka energija iz jednog izvora u jedno trošilo. Trošila u spojnim shemama istosmjerne struje reprezentiramo omskim otporima.

Međutim, električki uređaji koje susrećemo u elektrotehničkoj praksi često su složeni od više izvora i više trošila, pa tako nastaju najrazličitije sastavljene spojne sheme izvora i trošila. Neke jednostavnije već smo upoznali i na njima vršili detaljnija razmatranja. Takve spojne sheme bilo kako povezanih izvora i otpornika zovemo električnim mrežama. Ako su otpornici linearni, onda i mrežu zovemo linearnom.

U elektrotehnici se na svakom koraku susrećemo s električkim mrežama. Tipičnu električku mrežu u području jake struje predstavljaju generatori u elektranama, povezani pomoću vodova s trošilima široke potrošnje cijele zemlje. No i mnogi električki uređaji i aparati koji naoko i ne izgledaju kao električka mreža mogu se u pogledu njihova funkcioniranja predložiti odgovarajuće kombiniranim spojem otpornika i izvora, pa takvu električku mrežu zovemo nadomjesnom shemom dotičnog uređaja ili aparata.

Osobito je, dakle, važno da pobliže upoznamo karakteristike električkih mreža i da nađemo metode za njihovo rješavanje.

Sâm postupak proračunavanja mreža ovisit će o tome kako je postavljen zadatak, a tu u principu mogu postojati dva različita zahtjeva.

Prvi je, da se na osnovi zadane spojne sheme, u kojoj su zadani i svi podaci o električkim izvorima i svi otpori trošila, odrede jakosti svih struja što prolaze kroz pojedine elemente od kojih je sastavljena mreža. Poznavajući struje, mogu se zatim izračunati svi naponi trošila i snage. Taj proračun zove se analiza električke mreže, jer se analiziraju električke prilike u već sastavljenoj mreži.

Drugi zadatak je da se proračuna kakav mora biti sastav mreže, kako bi se npr. uz zadane napone dobile struje zadanih jakosti. Rješavanje ovakvih zadataka zove se sinteza mreže, gdje riječ sinteza upravo znači sastavljanje.

U našim razmatranjima obrađivat ćemo samo osnovne metode analize električkih mreža. Možemo, međutim, reći da je opća teorija sinteze u biti kompliciranija i teža, dok se pri analizi u osnovi susrećemo s mnogo manje problema.

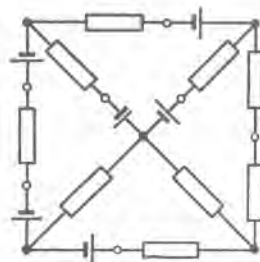
Zbog lakšeg snalaženja pri tumačenju električkih mreža uvedeni su za pojedine dijelove mreža nazivi, a za njihovo objašnjenje neka nam posluži slika 8.1.

Grana električke mreže je onaj njezin dio koji se sastoji samo od serijski nanizanih izvora napona i otpora kroz koje, dakle u svakom trenutku prolazi struja iste jakosti.

Čvor električke mreže je točka ili mjesto na mreži gdje se sastaju barem tri ili više grana.

Konturom električke mreže zovemo bilo koji zatvoreni strujni krug ili zamku, što dobivamo pri obilaženju po granama mreže. Svaka kontura je, dakle, bilo koji zatvoreni put sastavljen od nekoliko grana. Iako u sastavljenim mrežama možemo dobiti više raznih kontura, ipak su za proračun mreža naročito važne tzv. nezavisne konture. Pri tome smatramo nezavisnim one konture kod kojih se svaka slijedeća razlikuje od predašnjih barem za jednu granu.

Pogledajmo sada kako se provodi analiza električke mreže.



Sl. 8.1. Nazivi za pojedine dijelove električkih mreža.

8.2. DIREKTNNA PRIMJENA KIRCHHOFFOVIH ZAKONA

Ako je, dakle, linearna mreža zadana time da su poznati unutarnji naponi izvora E i otpori R u svim granama, onda se izračunavaju nepoznate struje I u osnovi tako da se na mrežu primijene jednačbe I i II Kirchhoffova zakona.

Matematički gledano, potrebno je za izračunavanje određenog broja nepoznanica postaviti toliko linearnih nezavisnih jednačbi, koliko je nepoznanica. Ako, dakle, znače

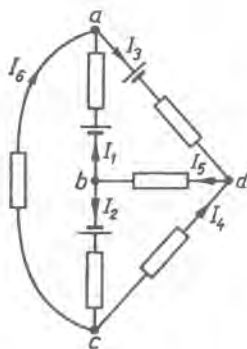
g ... broj grana

$\check{c}$... broj čvorova

n ... broj nezavisnih kontura

onda pri izračunavanju struja u svim granama treba imati g linearnih nezavisnih jednačbi.

Pri postavljanju ovih jednačbi najprije će se upotrijebiti I Kirchhoffov zakon za struje u čvorovima. Kako je broj čvorova $\check{c}$, moguće je i postaviti toliko jednačbi, no pri tome će biti samo $(\check{c} - 1)$ jednačbe nezavisne, pa će se zato u proračunima iskoristiti samo $(\check{c} - 1)$ čvor.



Sl. 8.2. Električka mreža sa četiri čvora.

Da je doista od svih čvornih jednačbi jedna nepotrebna vidi se iz razmatranja na primjeru predočenom na slici 8.2. Tu imamo jednostavniju mrežu sa četiri

čvora, pa ćemo za njih napisati sve jednadžbe I Kirchhoffova zakona za struje, koje neka su zadane kako po iznosu, tako i po smjeru.

Jednadžbe za pojedine čvorove glase

$$a \dots I_6 + I_1 - I_3 = 0$$

$$b \dots I_5 - I_1 - I_2 = 0$$

$$c \dots -I_6 + I_2 - I_4 = 0$$

$$d \dots I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

Zbrojimo li prve tri, dobivamo $I_6 + I_1 - I_3 + I_5 - I_1 - I_2 - I_6 + I_2 - I_4 = 0$ i dalje $-I_3 + I_5 - I_4 = 0$ ili $I_3 + I_4 - I_5 = 0$, a to je upravo jednadžba zadnjeg čvora d , pa je sve što nam ova jednadžba kaže matematički već sadržano u prijašnje tri. Zato je ona nepotrebna.

Od ukupnog broja g potrebnih jednadžbi daje nam, dakle, I Kirchhoffov zakon samo $(\check{c} - 1)$ jednadžbu i prema tome ostale

$$g - (\check{c} - 1) = g - \check{c} + 1$$

jednadžbe moramo dobiti postavljajući naponske jednadžbe II Kirchhoffova zakona za konture. No kako je prije rečeno, u mrežama možemo obilaziti grane duž mnogo raznih kontura, ali će u obzir doći samo nezavisne konture, jer su one i matematički nezavisne. A lako možemo vidjeti da je općenito broj nezavisnih kontura n jednak

$$n = g - \check{c} + 1$$

dakle upravo još jednak potrebnom broju jednadžbi.

Tako pri analizi za rješavanje g nepoznanica imamo

$$\begin{array}{rcl} \check{c} - 1 & \text{jednadžba I Kirchhoffova zakona} & \\ g - \check{c} + 1 & \text{jednadžba II Kirchhoffova zakona} & \\ \hline \text{ukupno } g & \text{jednadžbi, koliko je i potrebno.} & \end{array}$$

Da pokažemo kako se konkretno može napisati sistem linearnih jednadžbi, odakle ćemo onda izračunati nepoznate struje, uzet ćemo kao primjer mrežu prikazanu na slici 8.3. Tu su naponi izvora zadani brojem volta E_i i smjerom djelovanja, a otpornici brojem oma R_i .

Najprije ćemo napisati jednadžbe za čvorove a, b, c , jer je ona za čvor d nepotrebna.

No da napišemo za neki čvor jednadžbu I Kirchhoffova zakona, koji glasi:

algebarska suma svih struja koje se u čvoru sastaju jednaka je nuli

moramo znati sve struje po veličini i po smjeru. Budući da su struje nepoznate, označit ćemo ih općim brojevima: slovima $I_1, I_2 \dots$ kao što se i općenito

postupa u matematici. To, međutim, još ne bi bilo dovoljno, jer moramo u jednadžbama uzeti u obzir i smjerove tih struja, budući da suma mora biti algebarska.

Zato, makar nam ni smjerovi nisu poznati, pretpostavit ćemo po volji za svaku struju jedan smjer, a onda možemo napisati jednadžbe.

To smo i u našem primjeru učinili, jer smo ucrtanim strelicama uz oznaku svake struje pretpostaviti i njezin smjer.

I sada, ako nakon rješavanja sistema jednadžbi u rezultatu uz neku struju dobijemo predznak plus, to znači da smo za tu struju dobro odabrali njezin smjer, a ako je dobiven predznak minus, znači da struja doista ima smjer suprotan od onoga što smo pretpostavili.

Slično postupamo i pri postavljanju naponskih jednadžbi za pojedine nezavisne konture. Prema II Kirchhoffovu zakonu za svaku konturu mora biti ispunjen zahtjev:

algebarska suma unutarnjih napona svih izvora jednaka je algebarskoj sumi umnožaka struje i otpora svih otpornika konture.

Da bismo izveli ove sumacije, moramo konturu obilaziti u jednom smjeru. Taj smjer možemo po volji odabrati i smatramo ga onda pozitivnim smjerom.

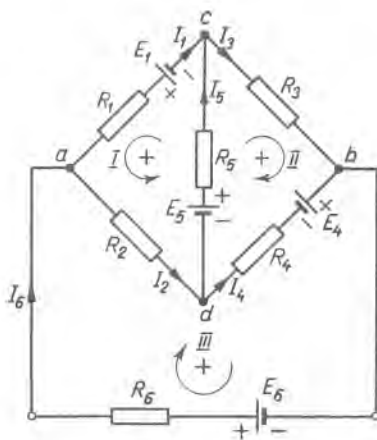
Uzevši u obzir da su nam smjerovi napona od početka zadani, a da smo smjerove struja pretpostavili, možemo pisati jednadžbe II Kirchhoffova zakona. Ako pri obilaženju prolazimo kroz izvor u smjeru djelovanja njegova napona, uzet ćemo taj napon u algebarskoj sumi s pozitivnim predznakom, dok će ostali naponi imati negativan predznak. Isto tako će biti pozitivni oni umnošci otpora i jakosti struje kod kojih obilazimo promatrani otpornik u pretpostavljenom smjeru struje, dok će oni drugi dobiti predznak minus.

Za naš primjer, gdje imamo

$$g = 6 \quad \check{c} = 4 \quad n = 3$$

treba da odaberemo tri nezavisne konture i u njima označimo po volji pozitivan smjer za sumiranje napona. Na slici su te konture označene rimskim brojevima i uz njih su ucrtane kružne strelice pozitivnog smjera.

Tako konačno za našu spojnu shemu mreže dobivamo šest jednadžbi, iz kojih se bilo kojom matematičkom metodom mogu izračunati nepoznate, a tražene struje.



Sl. 8.3. Primjena Kirchhoffovih zakona na zadanu električku mrežu.

$$\begin{array}{ll} \text{Čvor} & a \quad I_6 - I_1 - I_2 = 0 \\ & b \quad I_3 + I_4 - I_6 = 0 \\ & c \quad I_1 + I_5 - I_3 = 0 \end{array}$$

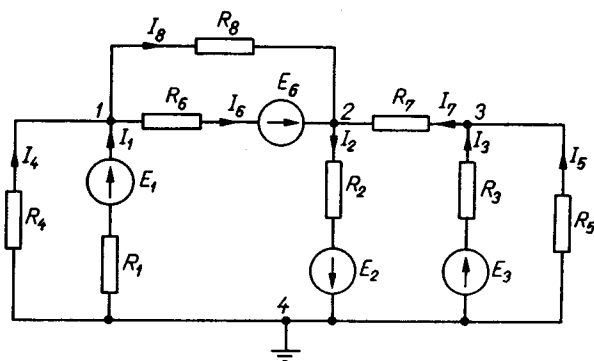
$$\begin{array}{ll} \text{Kontura I} & E_1 + E_5 = -I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_5 \cdot R_5 \\ \text{II} & -E_4 + E_5 = I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 + I_5 \cdot R_5 \\ \text{III} & E_4 + E_6 = I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 \end{array}$$

Pomoću I i II Kirchhoffova zakona možemo uvijek provesti analizu linearnih mreža, no kad je mreža jako razgranata, s mnogo nepoznatih struja, bit će račun vrlo dugotrajan, ukoliko se ne služimo računskim strojem.

Za izračunavanje nepoznatih struja u električkim mrežama ima, osim opisane direktne primjene Kirchhoffovih zakona, još i drugih raznih metoda pomoću kojih možemo i brže provesti određivanje traženih struja. Ipak valja istaknuti da je izvor svih tih metoda i teorema u osnovnim jednadžbama I i II Kirchhoffova zakona.

8.3. METODA NAPONA ČVOROVA

Vidjeli smo da se pri analizi električnih mreža direktnom primjenom Kirchhoffovih zakona izračunavaju nepoznate struje rješavanjem sistema sastavljenog od g linearnih jednadžbi.



Sl. 8.4. Mreža za čiju analizu je primijenjena metoda napona čvorova.

Broj potrebnih jednadžbi koje treba *istovremeno* rješavati može se međutim smanjiti i tim postupak ubrzati, ako račun provedemo metodom napona čvorova ili pak metodom konturnih struja.

Pogledajmo najprije metodu napona čvorova, pri kojoj ćemo iskoristiti I Kirchhoffov zakon za čvorove, uz primjenu Ohmova zakona prilagođenog na dio strujnog kruga, tj. na jednu granu.

Bitno je pri ovoj metodi (koju bismo mogli nazvati i metodom čvornih potencijala) da se jedan po volji odabrani čvor uzme kao referentni i njegov potencijal postavi jednak nuli. Prema tom referentnom čvoru imat će onda svaki od ostalih čvorova neki napon, koji je točno jednak njegovom potencijalu

$$U_{p0} = \varphi_p - \varphi_0 = \varphi_p - 0 = \varphi_p$$

Ako, na primjer, u mreži prikazanoj na slici 8.4 uzmemo kao referentni čvor onaj s oznakom 4, onda za ostale čvorove, 1, 2 i 3, možemo napisati slijedeće jednadžbe I Kirchhoffova zakona

$$1 \quad I_6 + I_8 = I_1 + I_4$$

$$2 \quad I_2 = I_6 + I_7 + I_8$$

$$3 \quad I_7 = I_3 + I_5$$

Primijenimo li sada na pojedine grane Ohmov zakon, to iz potencijalnih relacija možemo izračunati pripadne struje u granama

$$\varphi_1 = 0 + E_1 - I_1 \cdot R_1 \quad I_1 = (-\varphi_1 + E_1) \cdot G_1$$

$$\varphi_2 = 0 - E_2 + I_2 \cdot R_2 \quad I_2 = (\varphi_2 + E_2) \cdot G_2$$

$$\varphi_3 = 0 + E_3 - I_3 \cdot R_3 \quad I_3 = (-\varphi_3 + E_3) \cdot G_3$$

$$\varphi_1 = 0 - I_4 \cdot R_4 \quad I_4 = -\varphi_1 \cdot G_4$$

$$\varphi_3 = 0 - I_5 \cdot R_5 \quad I_5 = -\varphi_3 \cdot G_5$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + E_6 - I_6 \cdot R_6 \quad I_6 = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_6) \cdot G_6$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 - I_7 \cdot R_7 \quad I_7 = (\varphi_3 - \varphi_2) \cdot G_7$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 - I_8 \cdot R_8 \quad I_8 = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot G_8$$

Dobivene vrijednosti struja uvrštene u strujne jednadžbe daju nam

$$(\varphi_1 - \varphi_2 + E_6) \cdot G_6 + (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot G_8 = (-\varphi_1 + E_1) \cdot G_1 - \varphi_1 \cdot G_4$$

$$(\varphi_2 + E_2) \cdot G_2 = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_6) \cdot G_6 + (\varphi_3 - \varphi_2) \cdot G_7 + (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot G_8$$

$$(\varphi_3 - \varphi_2) \cdot G_7 = (-\varphi_3 + E_3) \cdot G_3 - \varphi_3 \cdot G_5$$

Nakon preuređenja dobivamo

$$+ \varphi_1 \cdot (G_1 + G_4 + G_6 + G_8) - \varphi_2 \cdot (G_6 + G_8) = E_1 \cdot G_1 - E_6 \cdot G_6$$

$$- \varphi_1 \cdot (G_6 + G_8) + \varphi_2 \cdot (G_2 + G_6 + G_7 + G_8) - \varphi_3 \cdot G_7 = -E_2 \cdot G_2 + E_6 \cdot G_6$$

$$- \varphi_2 \cdot G_7 + \varphi_3 \cdot (G_3 + G_5 + G_7) = E_3 \cdot G_3$$

Ako zbog pojednostavljenja uvedemo supstitucije

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_1 + G_4 + G_6 + G_8 & G_{12} &= G_{21} = G_6 + G_8 \\ G_{22} &= G_2 + G_6 + G_7 + G_8 & G_{23} &= G_{32} = G_7 \\ G_{33} &= G_3 + G_5 + G_7 & G_{13} &= G_{31} = 0 \end{aligned}$$

možemo strujne jednadžbe napisati u ovom obliku

$$\begin{aligned} + \varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} - \varphi_3 \cdot G_{13} &= \text{alg} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^4 E_{1j} G_{1j} \\ - \varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} - \varphi_3 \cdot G_{23} &= \text{alg} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^4 E_{2j} G_{2j} \\ - \varphi_1 \cdot G_{31} - \varphi_2 \cdot G_{32} + \varphi_3 \cdot G_{33} &= \text{alg} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^4 E_{3j} G_{3j} \end{aligned}$$

Možemo, dakle, za bilo koji p -ti čvor električne mreže, koja ima ϵ čvorova, napisati jednadžbu u općenitom obliku

$$\varphi_p \cdot G_{pp} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{\epsilon} \varphi_j \cdot G_{jp} = \text{alg} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{\epsilon} E_{pj} \cdot G_{pj}$$

Na lijevoj strani jednadžbe napisane vodljivosti znače: G_{pp} sumu vodljivosti svih grana priključenih na čvor p , a vodljivost G_{pj} (označena sa dva različita indeksa) sumu vodljivosti svih grana koje se nalaze samo između čvorova p i j . Na desnoj strani jednadžbe imamo sumu umnožaka unutarnjih napona E koji su priključeni na promatrani čvor s pripadnom vodljivošću grane. Taj umnožak ulazi u sumu s pozitivnim predznakom ako je napon usmjeren ka čvoru, a s negativnim predznakom ako je napon suprotno usmjeren.

Kako iz ovih izvoda vidimo, u našem smo primjeru ovom metodom izračunavanja osam nepoznatih struja upućeni na istovremeno rješavanje sistema triju linearnih jednadžbi, što je lakši zadatak nego metodom Kirchhoffovih zakona riješiti sistem od osam jednadžbi.

Dakako da se ovim računom ne dobivaju direktno tražene struje nego tek potencijali čvorova, no sada, kad je i to poznato, može se lako izračunati sve nepoznate struje, jer su poznate sve veličine desne strane u izrazima za struje $I_1, I_2, \dots, I_8$.

8.4.

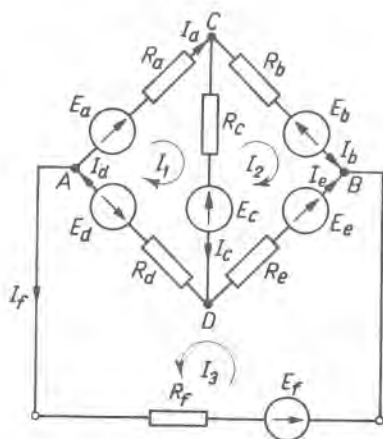
METODA KONTURNIH STRUJA

Metodu konturnih struja uveo je u analizu mreža Maxwell. Upotreba ove metode za izračunavanje nepoznatih struja u mreži također nas dovodi brže do cilja, jer se i ovdje smanjuje broj linearnih jednačbi koje moramo simultano rješavati.

Kao i sve ostale, tako se i Maxwell-ova metoda izvodi iz osnovnih jednačbi Kirchhoffovih zakona. Ovdje ćemo poći od naponskih jednačbi za nezavisne konture, ali uz dodatnu upotrebu strujnih jednačbi za čvorove.

Pri objašnjenju ove metode neka nam posluži spojna shema mreže sastavljena prema slici 8.5. Ta mreža sadrži 6 grana, 4 čvora, a mogu se u njoj naći samo 3 nezavisne konture: $n = 6 - 4 + 1 = 3$.

Pretpostavimo opet da su nam zadani unutarnji naponi izvora i otpori u granama, a tražimo nepoznate struje u granama. Pojedine grane i elemente od kojih su grane sastavljene označujemo slovnim indeksima $a, b, c, \dots, f$.



Sl. 8.5. Analiza električne mreže metodom konturnih struja.

Za nezavisne konture odabrali smo one koje smo na slici označili brojevima 1, 2 i 3.

Ako nepoznatim strujama i ovdje pretpostavimo po volji neki smjer, možemo napisati za čvorove strujne jednačbe I Kirchhoffova zakona

$$A \dots I_a + I_f = I_d$$

$$B \dots 0 = I_b + I_e + I_f$$

$$C \dots I_c + I_b = I_a$$

$$D \dots I_d + I_e = I_c$$

a iz ovih jednačbi možemo dobiti još slijedeće odnose

$$I_e = I_a - I_b$$

$$I_d = I_a + I_f$$

$$I_e = -I_b - I_f$$

Razmatrajući pobliže sve struje u granama mreže, vidimo da se one mogu svrstati u dvije grupe. Jednu grupu sačinjavaju struje koje prolaze samo kroz one grane koje pripadaju samo jednoj nezavisnoj konturi, a prema toj grani se ova nezavisna kontura baš razlikuje od ostalih.

Te grane na našoj slici, i njihove struje, jesu

$$\begin{aligned} a \dots I_a \dots & \text{struja prve konture} \\ b \dots I_b \dots & \text{struja druge konture} \\ f \dots I_f \dots & \text{struja treće konture} \end{aligned}$$

Ove bismo struje mogli zbog toga prozvati konturnim strujama.

Drugu skupinu tvore struje koje prolaze kroz grane na međi između dviju kontura, pa su zajedničke objema konturama. To su međašne struje I_c , I_d , I_e u granama c , d , e .

Iz prije izvedenih jednadžbi vidimo da je moguće struje u međašnjim granama prikazati kao rezultate dviju struja koje pripadaju samo jednoj konturi, dakle pomoću konturnih struja. Iako, dakle, u naravi imamo u pojedinim granama doista struje tih grana: I_a , I_b , I_c , I_d , I_e , I_f , ipak računski možemo zamisliti da u mreži teku samo kroz konture konturne struje, pa ćemo ih označiti istim indeksom kao i nezavisne konture. U našem primjeru su to sljedeće konturne struje

$$I_1 = I_a \quad I_2 = I_b \quad I_3 = I_b$$

Sav proračun možemo, dakle, izvršiti umjesto sa šest, samo sa tri nepoznate struje, a to su konturne, pa je zato postupak nazvan metoda konturnih struja.

Polazimo, dakle, od osnovnih naponskih jednadžbi II Kirchhoffova zakona koje za naše nezavisne konture glase

$$\begin{aligned} 1 \dots I_a \cdot R_a + I_c \cdot R_c + I_d \cdot R_d &= E_a - E_c - E_d \\ 2 \dots I_b \cdot R_b - I_e \cdot R_e - I_c \cdot R_c &= -E_b - E_e + E_c \\ 3 \dots I_f \cdot R_f - I_e \cdot R_e + I_d \cdot R_d &= E_f - E_e - E_d \end{aligned}$$

pri čemu smo algebarsko sumiranje vršili obilazeći konture u smjeru naznačenom na slici, koji uzimamo kao pozitivan smjer konturne struje.

Ako izraze dobivene I Kirchhoffovim zakonom za čvorove C , A , B iskoristimo za međašne struje i uvrstimo u gornje jednadžbe, dobivamo

$$\begin{aligned} I_a \cdot R_a + (I_a - I_b) \cdot R_c + (I_a + I_f) \cdot R_d &= E_a - E_c - E_d \\ I_b \cdot R_b - (-I_b - I_f) \cdot R_e - (I_a - I_b) \cdot R_c &= -E_b - E_e + E_c \\ I_f \cdot R_f - (-I_b - I_f) \cdot R_e + (I_a + I_f) \cdot R_d &= E_f - E_e - E_d \end{aligned}$$

Sređivanjem pojedinih umnožaka dobivamo

$$\begin{aligned} I_a \cdot (R_a + R_c + R_d) - I_b \cdot R_c + I_f \cdot R_d &= E_a - E_c - E_d \\ -I_a \cdot R_c + I_b \cdot (R_b + R_e + R_c) + I_f \cdot R_e &= -E_b - E_e + E_c \\ I_a \cdot R_d + I_b \cdot R_e + I_f \cdot (R_f + R_e + R_d) &= E_f - E_e - E_d \end{aligned}$$

Supstituiramo li umjesto oznaka I_a, I_b, I_f oznake koje ove struje imaju kao konturne, tj. I_1, I_2 i I_3 , te ako označimo zbog jednostavnijeg predočavanja

$$\begin{array}{ll} R_a + R_c + R_d = R_{11} & R_c = R_{12} = R_{21} \\ R_b + R_a + R_e = R_{22} & R_e = R_{23} = R_{32} \\ R_f + R_e + R_d = R_{33} & R_d = R_{13} = R_{31} \end{array}$$

te ako, osim toga, algebarske sume unutarnjih napona u konturama označimo skraćeno

$$E_{11} = E_a - E_c - E_d; \quad E_{22} = -E_b - E_e + E_c; \quad E_{33} = E_f - E_e - E_d$$

onda sistem naponskih linearnih jednadžbi možemo napisati u općenitom obliku

$$\begin{array}{l} I_1 \cdot R_{11} + I_2 \cdot R_{12} + I_3 \cdot R_{13} = E_{11} \\ I_1 \cdot R_{21} + I_2 \cdot R_{22} + I_3 \cdot R_{23} = E_{22} \\ I_1 \cdot R_{31} + I_2 \cdot R_{32} + I_3 \cdot R_{33} = E_{33} \end{array}$$

Analogno bismo za neku mrežu sa n nezavisnih kontura dobili sistem jednadžbi

$$\begin{array}{l} I_1 \cdot R_{11} + I_2 \cdot R_{12} + \dots + I_k \cdot R_{1k} + \dots + I_n \cdot R_{1n} = E_{11} \\ I_1 \cdot R_{21} + I_2 \cdot R_{22} + \dots + I_k \cdot R_{2k} + \dots + I_n \cdot R_{2n} = E_{22} \\ \vdots \\ I_1 \cdot R_{k1} + I_2 \cdot R_{k2} + \dots + I_k \cdot R_{kk} + \dots + I_n \cdot R_{kn} = E_{kk} \\ \vdots \\ I_1 \cdot R_{n1} + I_2 \cdot R_{n2} + \dots + I_k \cdot R_{nk} + \dots + I_n \cdot R_{nn} = E_{nn} \end{array}$$

Otpori R_{kk} sa dva jednaka indeksa nazivaju se vlastiti otpori konture i jednaki su sumi svih otpora koji se nalaze u promatranoj konturi k . Otpori sa dva različita indeksa, npr. R_{kn} , označuju međašni otpor između dvije konture; tako je R_{kn} otpor zajednički konturama k i n . Dakako da je $R_{kn} = R_{nk}$. Ovi otpori ulaze u gornje jednadžbe s pozitivnim predznakom, ako obje konturne struje prolaze kroz međašni otpor u istom smjeru, a s negativnim ako su smjerovi konturnih struja u tom međašnom otporu suprotni.

Vlastiti otpori konture imaju uvijek pozitivan predznak.

Ako bismo svim konturnim strujama od početka već pretpostavili isti obilazni smjer, npr. smjer kazala na satu, svi zajednički međašni otpori bili bi od susjednih konturnih struja protjecani u suprotnim smjerovima, pa bi svi međašni otpori imali negativne predznake, dok bi vlastiti zadržali, dakako, pozitivan predznak.

Na osnovi ovih izvoda vidimo da će se metodom konturnih struja analiza mreže vršiti ovako

- 1) najprije se odaberu po volji nezavisne konture (n) i isto tako po volji pripiše konturnim strujama smjer obilaženja,
- 2) za svaku konturu napiše se naponska jednačba, koja ima općenito za k -tu konturu oblik

$$I_k \cdot R_{kk} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n I_l \cdot R_{kl} = E_{kk}$$

gdje su

I_k - struja promatrane konture k

I_l - struja bilo koje druge konture

i otporni koeficijenti

R_{kk} - vlastiti otpor konture k prema prijašnjoj definiciji,

R_{kl} - zajednički međašni otpor između konture k i jedne od ostalih kontura prema prijašnjoj definiciji,

a napon E_{kk} - algebarska je suma svih unutarnjih napona konture k , pri čemu se sumiranje vrši u odabranom pozitivnom smjeru za tu konturu.

Ako u konturi nema uključenih naponskih izvora, onda je $E_{kk} = 0$.

Dakako da će za onu konturu l , koja ne graniči s promatranom konturom k pa nema zajedničke grane, koeficijent otpora R_{kl} biti jednak nuli. Taj član, dakle, u jednačbi otpada.

- 3) Za bilo koju traženu konturnu struju rješenje prikazano u općenitom obliku pomoću determinanata glasi

$$I_k = \frac{D_k}{D}$$

gdje je D glavna determinanta svih otpornih koeficijenata koji se u sistemu linearnih jednačbi nalaze uz konturne struje

$$D = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} & \dots & R_{1l} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} & \dots & R_{2l} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} & \dots & R_{kl} & \dots & R_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_{l1} & R_{l2} & \dots & R_{lk} & \dots & R_{ll} & \dots & R_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nk} & \dots & R_{nl} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinanta D_k dobiva se tako da se u glavnoj determinanti D k -ti stupac zamijeni s konstantnim članovima E sa desne strane sistema naših linearnih jednadžbi

$$D_k = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & E_{11} & \dots & R_{1l} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & E_{22} & \dots & R_{2l} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & E_{kk} & \dots & R_{kl} & \dots & R_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_{l1} & R_{l2} & \dots & E_{ll} & \dots & R_{ll} & \dots & R_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & E_{nn} & \dots & R_{nl} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}$$

Rješavanjem ove determinante dobivamo da je

$$D_k = E_{11} \cdot A_{1k} + E_{22} \cdot A_{2k} + E_{33} \cdot A_{3k} + \dots + E_{ll} \cdot A_{lk} + \dots + E_{nn} \cdot A_{nk}$$

gdje je A_{lk} adjunkt elementa R_{lk} koji se izračunava kao subdeterminanta (minor) iz glavne determinante precrtavanjem l -tog reda i k -tog stupca, uz dodatak faktora $(-1)^{l+k}$ kojim je određen predznak adjunkta.

Konačni izraz za traženu struju je

$$I_k = E_{11} \cdot \frac{A_{1k}}{D} + E_{22} \cdot \frac{A_{2k}}{D} + E_{33} \cdot \frac{A_{3k}}{D} + \dots + E_{ll} \cdot \frac{A_{lk}}{D} + \dots + E_{nn} \cdot \frac{A_{nk}}{D}$$

Nakon što su na taj način određene sve konturne struje, izračunaju se prije spomenutim jednostavnim odnosima struje u granama. Istaknuti treba da je pri ovoj metodi potpuno svejedno kojim su obilaženjem po granama određene nezavisne konture, glavno je da su one doista nezavisne.

Razumljivo je da obje metode, konturnih struja i čvorišnih napona, daju iste rezultate, pa bi se prema tome pri rješavanju linearnih mreža moglo po volji odabrati jednu ili drugu metodu. Ipak je povoljnije računati po metodi napona čvorova kada je broj čvorova mreže, umanjen za jedan, manji od broja nezavisnih kontura

$$(\check{c} - 1) < n$$

dok se metodom konturnih struja radije računaju mreže u obrnutom slučaju, ako je

$$n < (\check{c} - 1)$$

8.5.

METODA SUPERPOZICIJE

Prije nego objasnimo ovu metodu, pogledajmo još поближе jednadžbu koju smo prijašnjom metodom dobili za izračunavanje konturne struje I_k

$$I_k = E_{11} \cdot \frac{A_{1k}}{D} + E_{22} \cdot \frac{A_{2k}}{D} + \dots + E_{ll} \cdot \frac{A_{lk}}{D} + \dots + E_{nn} \cdot \frac{A_{nk}}{D}$$

Svaki pribrojnik desne strane ove jednadžbe građen je kao umnožak napona jedne konture, npr. E_{22} , s razlomkom oblika A_{2k}/D . Taj razlomak ima dimenziju vodljivosti G , jer njegov brojnik A ima otpor R u potenciji za jedan manjoj nego nazivnik D . Članovi desne strane, kao umnošci napona i vodljivosti, predstavljaju dakle struje što će ih kroz promatrane konture k potjerati pojedini konturni naponi. Prema tome se konturna struja I_k smatra sastavljena od strujnih komponenta uzrokovanih pojedinim konturnim naponima. No jer su konturni naponi sastavljeni od napona grana, na primjer u našem slučaju $E_{22} = -E_b - E_e + E_c$, možemo zbog linearnih odnosa konturne napone na desnoj strani jednadžbe zamijeniti naponima grana: $E_a, E_b, \dots$

Ako sada sve tako dobivene nove pribrojнике desne strane jednadžbe grupiramo prema naponima grana, dobivamo za struju I_k novi izraz

$$I_k = E_a \cdot G_{ka} + E_b \cdot G_{kb} + \dots + E_f \cdot G_{kf} \dots$$

a to znači da konturnu struju I_k možemo prikazati i kao algebarsku sumu pojedinačnih struja, što bi ih prouzročili naponi pojedinih izvora svaki za sebe. To je zakon superpozicije za konturne struje.

No kako otprije znamo pojedine nezavisne konture mogu se po volji formirati, pa možemo to učiniti i tako da baš promatrana grana bude sadržana samo u konturi k . Tada će konturna struja I_k biti i struja te grane, pa i za nju vrijedi zakon superpozicije.

Možemo, dakle, reći: u svakoj linearnoj mreži u kojoj ima više naponskih izvora može se zamisliti da je struja grane k jednaka algebarskoj sumi svih struja što bi ih u toj grani prouzročili pojedini naponi, svaki sam za sebe.

Prema tome se metodom superpozicije struja u jednoj grani izračuna tako da se redom zamisle umrtvljenim svi naponi osim jednoga i izračuna struju u promatranoj grani samo uz taj jedan napon. Tako će se računati redom struje i za ostale napone, a algebarska suma tih pojedinih struja bit će tražena struja promatrane grane. Pri tome se dakako, moraju, makar su svi naponi osim jednoga premošteni, uvijek zadržati unutarnji otpori svih izvora.

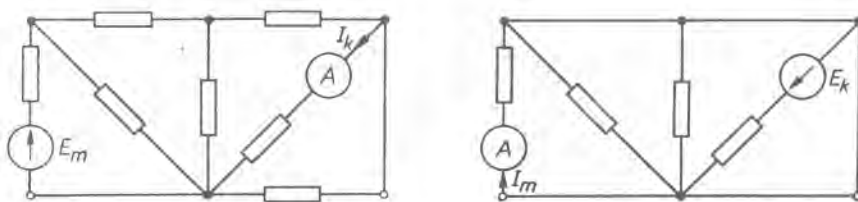
Istaknimo još jednom da princip superpozicije može biti primijenjen samo na onaj slučaj ako su veličine s kojima se računa međusobno linearno ovisne. A to je kod struje i napona u omskim otpornicima doista ispunjeno. Zato, iako imamo linearnu mrežu ne možemo princip superpozicije primijeniti na proračun ukupne snage, jer snaga nije linearno, već kvadratično ovisna o naponu, odnosno struji.

8.6.

TEOREM UZAJAMNOSTI

Pri tumačenju teorema superpozicije vidjeli smo da se struja $I = I_k$ u grani k bilo kakve linearne mreže, uzrokovana samo naponom $E = E_m$ izvora koji je uključen u grani m , izračunava prema jednadžbi

$$I_k = E_m \cdot \frac{A_{mk}}{D}$$



Sl. 8.6. Objašnjenje teorema uzajamnosti.

Prema teoremu uzajamnosti ista jakost struje dobit će se u grani m $I_m = I$ ako se taj isti izvor napona uključi u granu k $E_k = E$, slika 8.6

$$I_m = E_k \cdot \frac{A_{km}}{D}$$

Da bude ispunjeno $I_k = I_m$, mora biti

$$E_m \cdot \frac{A_{mk}}{D} = E_k \cdot \frac{A_{km}}{D}$$

a jer je $E_m = E_k$ i $D = D$, treba da bude još i $A_{mk} = A_{km}$. I taj uvjet je ispunjen, jer su zbog jednakosti $R_{km} = R_{mk}$ također i adjunkti A_{mk} i A_{km} jednaki, budući da je determinanta koeficijenata otpora simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu.

8.7.

NAPONSKI I STRUJNI IZVORI

Već je spomenuto da su električki izvori naprave u kojima se neka druga vrst energije pretvara u električku. Pri tome će se redovno u samom izvoru, utroškom strane energije, odvajanje električkih naboja na stezaljke vršiti tako da se na stezaljkama izvora, dok on nije opterećen, dobije neki stalni napon E . Pri opterećenju će se u realno izvedenim izvorima zbog unutarnjeg potroška napona smanjiti vanjski napon na stezaljkama na iznos

$$U = E - I \cdot R_i$$

U mislima možemo, dakle, pretpostaviti da je takav realni izvor sastavljen od jednog idealnog izvora koji posjeduje, neovisno o struji opterećenja, stalni napon E , a u seriju s vanjskim otpornikom dodan mu je otpornik R_i , koji predstavlja sve ono što se unutar izvora opire strujanju električkih naboja, slika 8.7. To predstavlja nadomjesnu shemu realnog izvora, složenu pomoću naponskog izvora, gdje se ovakav idealni izvor stalnog napona E zove idealni naponski izvor.

Do sada smo uvijek i računali s ovako predloženim realnim izvorima, no računati se mogu koji puta znatno pojednostavniti, ako realne izvore ne prikazemo pomoću idealnih naponskih izvora, već pomoću tzv. idealnih strujnih izvora.

Slično kako je idealan naponski izvor bio definiran kao izvor kojem je napon konstantan, tako se i idealni strujni izvor definira kao izvor, koji uvijek daje struju konstantne jakosti I_k , neovisno o priključenom trošilu.

Pogledajmo sada koje odnose imamo među veličinama što karakteriziraju jedan realni izvor, ako ga predložimo umjesto sa idealnim naponskim, s idealnim strujnim izvorom.

Ako je, dakle, realni izvor unutarnjeg napona E i unutarnjeg otpora R_i opterećen vanjskim otporom R , kroz trošilo i izvor prolazi struja I , a sve karakteristične veličine tog izvora povezane su jednadžbom

$$U = E - I \cdot R_i$$

Podijelimo li ovu jednadžbu sa R_i dobivamo

$$I = \frac{E}{R_i} - \frac{U}{R_i}$$

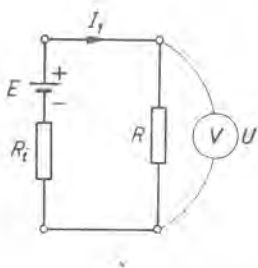
ili

$$I = I_k - I_i$$

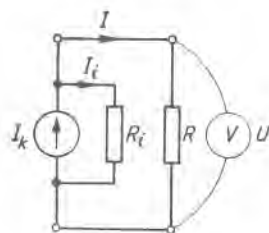
Ova jednadžba nam kaže da u priključenom vanjskom dijelu strujnog kruga možemo imati u otporu R istu struju I i isti napon $U = I \cdot R$, pa prema tome iste strujne i naponske prilike kao i prije, ako prema zadnjoj jednadžbi zamislimo

da dobavu električne energije trošilu daje izvor konstantne struje I_k , kojem je paralelno (unutar izvora) priključen otpor R_i . Vidimo, dakle, da u tom slučaju u vanjskom dijelu strujnog kruga trošilo dobiva struju I , nakon što je od konstantne struje I_k idealnog strujnog izvora jedan dio, i to $I_i = U/R_i$, odvojen u paralelno spojeni otpor R_i , slika 8.8.

Karakteristika je, dakle, idealnog strujnog izvora da on stalno odaje struju $I_k = E/R_i$, a ta je baš računski jednaka struji kratkog spoja našeg realnog izvora, kad je on predložen idealnim naponskim izvorom.



Sl. 8.7. Realni izvor prikazan idealnim naponskim izvorom



Sl. 8.8. Realni izvor prikazan idealnim strujnim izvorom.

Paralelni otpor koji je vezan na idealni izvor u nadomjesnoj shemi realnog izvora isti je kao i unutarnji serijski otpor R_i u prijašnjoj shemi. On uzima od idealnog strujnog izvora struju $I_i = U/R_i$, pa na njemu vlada napon $U = I_i \cdot R_i$. Taj isti napon pojavljuje se, dakako, i na paralelno vezanom vanjskom otporu R .

Obratno, na spojnim shemama mogu se realni izvori predložiti idealnim strujnim izvorima zamijeniti s idealnim naponskim izvorima ako se tom naponskom izvoru pripiše napon $E = I_k \cdot R_i$ sa serijski povezanim otporom R_i .

Ponovno valja naglasiti da je pri zamjeni naponskog izvora sa strujnim ekvivalentnost samo u vanjskom dijelu strujnog kruga, dok unutar samog izvora postoji velika razlika u radu jednog i drugog izvora.

Tako npr. u neopterećenom stanju kroz otpor izvora R_i ne teče struja i ne troši se energija, ako je u nadomjesnoj shemi realnog izvora upotrijebljen idealni naponski izvor, no ako je tamo idealni strujni izvor, onda teče kroz otpor R_i struja i u praznom hodu, pa se i u praznom hodu troši energija u samom izvoru.

8.8.

NADOMJESNI IZVOR VIŠE IZVORA

Pri tumačenju spajanja više pojedinih izvora u baterije bili su već u uvodu objašnjeni odnosi koji postoje među električkim veličinama (naponima i strujama)

pojedinih elemenata koji sačinjavaju bateriju, i baterije kao cjeline. Ta uvodna izlaganja odnosila su se samo na naponske izvore (uglavnom kemijske), a osim toga bilo je prikazano samo nekoliko posebnih slučajeva.

U nastavku bit će ovakvo nadomještavanje više izvora jednim ekvivalentnim prikazano općenitije i to kako za naponske, tako i za strujne izvore.

Ako su zadani podaci o svim pojedinim izvorima, izračunat će se ekvivalentni izvor najjednostavnije tako da se za serijski spoj upotrijebi II Kirchhoffov zakon (gdje se sumiraju elektromotorne sile), a za paralelni I Kirchhoffov zakon (koji vrijedi za sumiranje struja).

1) Na slici 8.9 a) prikazan je serijski spoj više naponskih izvora, a na slici b) njihov ekvivalentni nadomjesni izvor, o kojem imamo ove podatke

$$E = \text{alg} \sum_{i=1}^n E_i$$

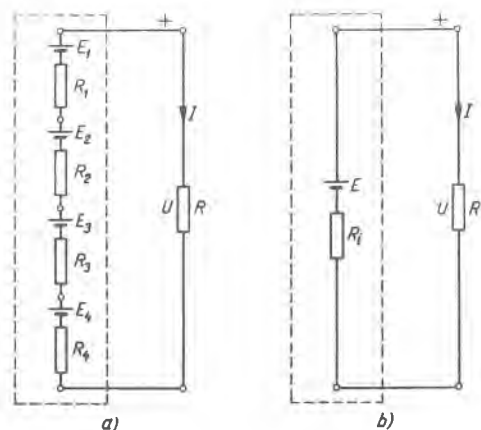
$$R_i = \sum_{i=1}^n R_i$$

Ekvivalentnost je ispunjena, jer se struja u priključenom trošilu izračunava u oba slučaja jednim te istim izrazom

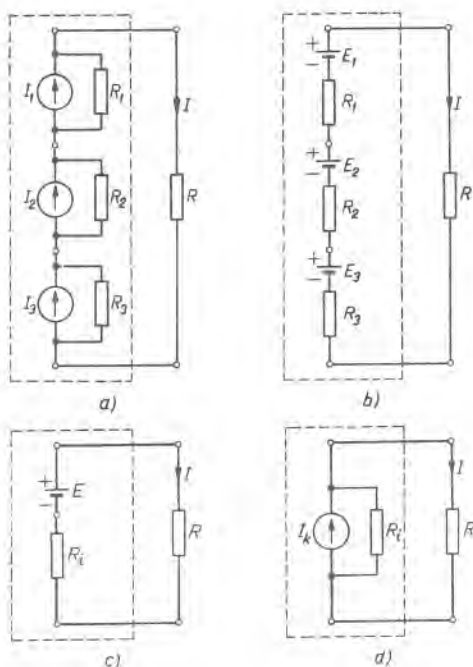
$$I = \frac{\text{alg} \sum E_i}{(\sum R_i) + R}$$

Napon u trošilu

$$U = I \cdot R = \frac{\text{alg} \sum E_i}{R + \sum R_i} \cdot R$$



Sl. 8.9. Serijski spoj više naponskih izvora nadomješten jednim ekvivalentnim izvorom.



Sl. 8.10. Nadomjesni izvor od više serijski vezanih strujnih izvora.

2) Kad je zadan serijski spoj strujnih izvora, pretvore se najprije ovi izvori u naponske, kako bi se mogao primijeniti drugi Kirchhoffov zakon. U tom slučaju shema na slici 8.10 a) prelazi u shemu b), na koju se mogu primijeniti prijašnje jednačbe, pa se za rezultantnu elektromotornu silu E i za rezultantni unutarnji otpor R_i dobivaju jednačbe

$$E = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 \quad R_i = R_1 + R_2 + R_3$$

što je prikazano na slici c), odakle se može izračunati struja I kroz trošilo R

$$I = \frac{E}{R + R_i} = \frac{I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3}{R + R_1 + R_2 + R_3}$$

Taj spoj može se dalje pretvoriti u spoj s rezultantnim strujnim izvorom (slika 8.10 d), čija je struja jednaka

$$I_K = \frac{E}{R_i} = \frac{I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

a paralelni unutarnji otpor

$$R_i = R_1 + R_2 + R_3$$

Struja u priključenom otporu trošila R jednaka je opet

$$I = I_K \cdot \frac{R_i}{R + R_i} = \frac{E}{R_i} \cdot \frac{R_i}{R + R_i} = \frac{E}{R + R_i} = \frac{I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3}{R + R_1 + R_2 + R_3}$$

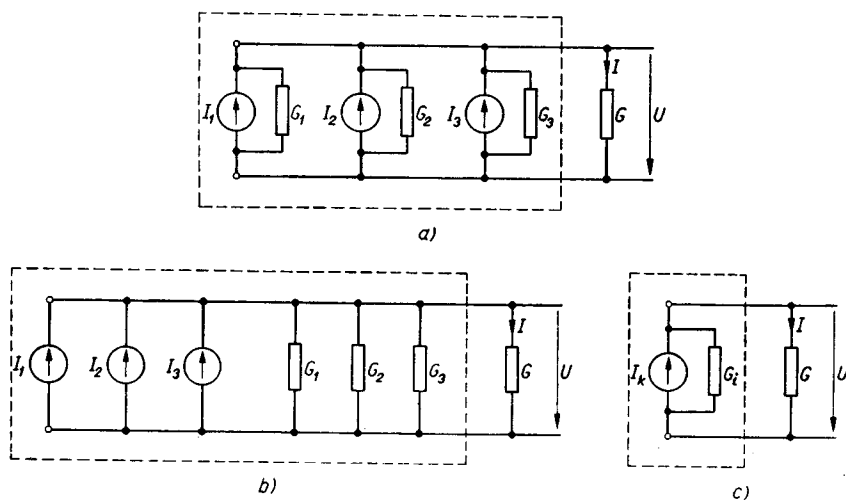
Napon na trošilu $U = I \cdot R$ jednak je

$$U = \frac{I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3}{R + R_1 + R_2 + R_3} \cdot R$$

Ako struje strujnih izvora nisu sve jednako usmjerene, treba u brojnicima obaju izraza uzeti algebarsku sumu; općenito vrijede, dakle, jednačbe

$$I = \frac{\text{alg} \sum I_i \cdot R_i}{R + \sum R_i}; \quad U = \frac{\text{alg} \sum I_i \cdot R_i}{R + \sum R_i} \cdot R$$

3) Paralelni spoj više strujnih izvora, prikazan na slici 8.11 a), nadomjesti se najprije shemom b), a dalje se ta shema reducira na slici c), u jedan rezultatni



Sl. 8.11. Paralelni spoj više strujnih izvora i njihov nadomjesni izvor.

strujni izvor, čija je struja $I_k = I_1 + I_2 + I_3$, a rezultatna unutarnja paralelna vodljivost $G_t = G_1 + G_2 + G_3$. Struja trošila jednaka je

$$I = I_k \cdot \frac{G}{G + G_t} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{G + G_1 + G_2 + G_3} \cdot G$$

a napon na trošilu

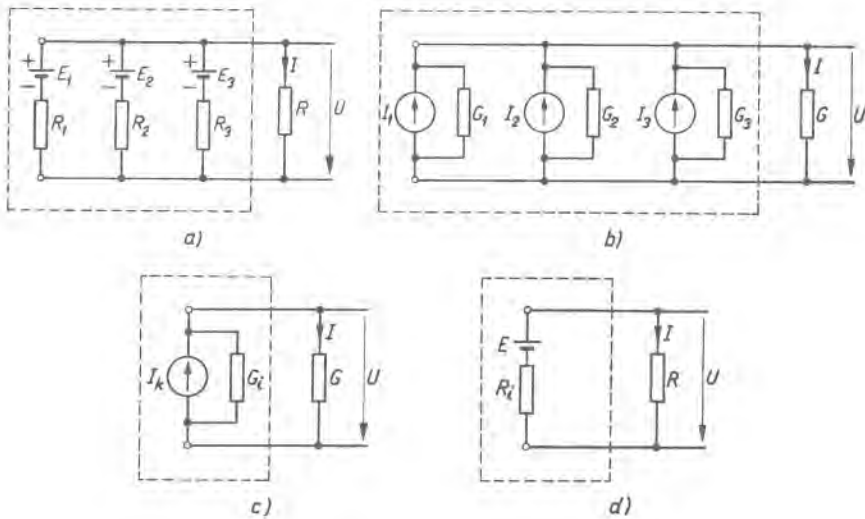
$$U = \frac{I}{G} = \frac{I_k}{G + G_t} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{G + G_1 + G_2 + G_3}$$

Općeniti izrazi kad pojedine struje nisu sve istog smjera

$$I = \frac{\text{alg } \sum I_i}{G + \sum G_i} \cdot G$$

$$U = \frac{\text{alg } \sum I_i}{G + \sum G_i}$$

4) Paralelni spoj naponskih izvora, slika 8.12 a) pretvori se u strujne izvore kako bi se moglo provesti sumiranje prema prvom Kirchhoffovu zakonu. Time se



Sl. 8.12. Paralelni spoj više naponskih izvora i njihov nadomjesni izvor.

dobiva shema prema slici b), a na slici c) shema s rezultatnim strujnim izvorom, čija je struja: $I_K = E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3$, a paralelna vodljivost $G_i = G_1 + G_2 + G_3$.

Prema tome nadomjesni (rezultantni) naponski izvor ima elektromotornu silu:

$$E = \frac{I_K}{G_i} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

i unutarnji otpor

$$R_i = \frac{1}{G_i} = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Spojna shema nadomjesnog naponskog izvora dana je na slici d) odakle slijedi da je struja kroz otpor trošila $R = 1/G$ jednaka

$$I = \frac{E}{R + R_i} = \frac{\frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}}{\frac{1}{G} + \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3}} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3}{G + G_1 + G_2 + G_3} \cdot G$$

a napon na trošilu

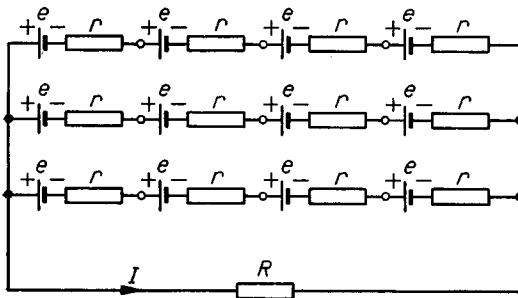
$$U = I \cdot R = I : G = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3}{G + G_1 + G_2 + G_3}$$

Ako naponi pojedinih izvora nisu svi jednako usmjereni treba uzeti u gornjim jednadžbama algebarsko sumiranje:

$$E = \frac{\text{alg } \sum E_i \cdot G_i}{\sum G_i}$$

$$U = \frac{\text{alg } \sum E_i \cdot G_i}{G + \sum G_i}; \quad I = \frac{\text{alg } \sum E_i \cdot G_i}{G + \sum G_i}$$

5) Kao primjer kombiniranog spoja više izvora uzet ćemo, prema slici 8.13 bateriju sastavljenu od jednakih elemenata složenih u tri (m) paralelne grane, a u svakoj su grani četiri (n) u seriji vezana elemenata. Takav se spoj baterije upotrebljava ako se želi od nje postići viši napon i jača nominalna struja nego što ih ima jedan element sam.



Sl. 8.13. Kombinirani spoj više izvora.

Neka je elektromotorna sila jednog elementa e , a unutarnji otpor r . Elektromotorna sila jedne paralelne grane jest $4e$, a unutarnji $4r$. Svaka grana nadomjesti se strujnim izvorom čija je struja $i_K = 4e/4r = e/r$, a paralelni otpor $4r$, odnosno paralelna vodljivost $1/4r$.

Te tri paralelne grane nadomjesti se resultantnim strujnim izvorom struje $I_K = 3e/r$ i unutarnje vodljivosti $G_i = 3/4r$, a taj strujni izvor pretvori se u resultantni naponski izvor elektromotorne sile

$$E = I_K : G_i = \frac{3e}{r} \cdot \frac{4r}{3} = 4e$$

i unutarnjeg otpora $R_i = 4r/3$, pa je struja trošila R

$$I = \frac{4e}{R + \frac{4r}{3}}$$

Općenito za » m « paralelnih grana sa » n « serijskih elemenata dobivamo jednadžbu

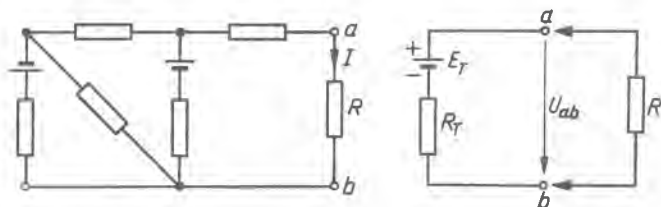
$$I = \frac{n \cdot e}{R + \frac{n}{m} \cdot r}$$

8.9.

THEVENINOV TEOREM

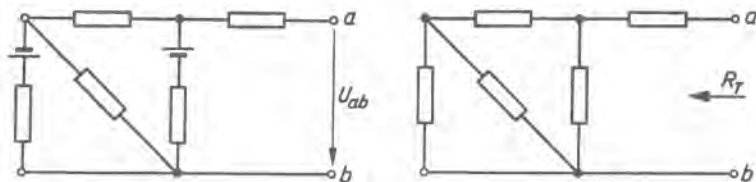
Struja I u jednom otporu R neke linearne mreže može se odrediti tako da se cijela preostala mreža gledan od stezaljke a, b otpornika R u mislima nadomjesti jednim naponskim izvorom unutarnjeg napona E_T i unutarnjeg otpora R_T . Tada će, prema slici 8.14, tražena struja I biti

$$I = \frac{E_T}{R_T + R}$$



Sl. 8.14. Određivanje struje u jednoj grani Theveninovim teoremom.

Da bi se odredile vrijednosti E_T i R_T ekvivalentnog izvora koji nadomještava svu preostalu mrežu, treba najprije iz zadane sheme odstraniti otpor R , tako da stezaljke a i b ostanu bez opterećenja. Napon E_T pojavljuje se tada kao napon



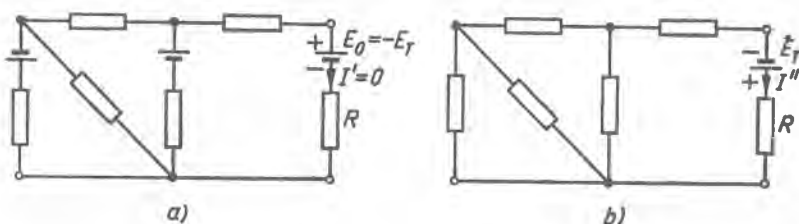
Sl. 8.15. Theveninov nadomjesni napon i otpor.

praznog hoda U_{ab} na otvorenim stezaljkama a, b . Otpor pak R_T je otpor cijele preostale mreže, koji se može izmjeriti gledan sa stezaljki a, b kad je R odstranjen, a sve elektromotorne sile izvora premoštene, no unutarnji otpori svih izvora zadržani, slika 8.15.

Kao dokaz ispravnosti Theveninova teorema može poslužiti princip superpozicije. Zamislimo najprije u prvotno zadanoj shemi u seriji s otpornikom R uključen još i napon $E_0 = -E_T$; tada kroz R neće prolaziti struja, jer dodatni protunapon E_0 kompenzira djelovanje napona U_{ab} , slika 8.16 a). Tu je, dakle $I' = 0$.

Drugo pak stanje mreže koje će se superponirati prvome prikazuje slika 8.16 b). Tu su u preostalom dijelu mreže zadržani samo svi otpornici (i unutarnji otpori

izvora), a sve elektromotorne sile premoštene, dok je u promatranoj grani (*a b*) uz otpornik R uključen napon E_T . Struja koja u tom slučaju prolazi kroz R jest $I'' = \frac{E_T}{R_T + R}$, jer je na napon E_T u seriji sa R uključen sav otpor preostale mreže.



Sl. 8.16 a i b. Objašnjenje Theveninovog teorema metodom superpozicije.

Superpozicijom obiju shema dobiva se prvotna, zadana shema, u kojoj će se, također superpozicijom obiju struja I' i I'' , dobiti tražena struja I

$$I = I' + I'' = 0 + I''$$

pa je

$$I = \frac{E_T}{R_T + R}$$

8.10.

NORTONOV TEOREM

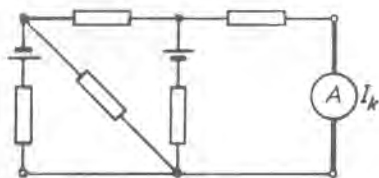
Prema tome teoremu može se struja I u otporniku R izračunati tako da se cijela preostala mreža nadomjesti ekvivalentnim strujnim izvorom čija je struja I_K , a unutarnji paralelni otpor R_T . Prema slici 8.18 je onda struja I jednaka

$$I = I_K \cdot \frac{R_T}{R_T + R}$$

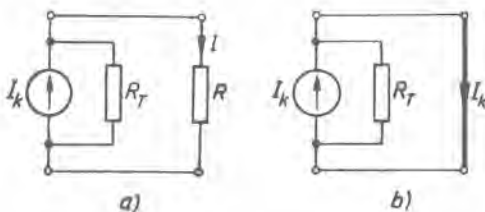
Struja I_K nadomjesnog strujnog izvora određuje se kao struja koja teče kroz granu $a b$ ako se odstrani R , a stezaljke a i b spoje vodičem bez otpora. Struja I_K je, dakle, struja kratkog spoja stezaljki $a b$. Otpor R_T je opet otpor mjeren sa stezaljki a i b , ako odstranimo R i sve elektromotorne sile premostimo, ali unutarnje otpore izvora zadržimo.

Ispravnost ovog teorema dokazuje se već pokazanim pravilom da se svaki naponski izvor može nadomjestiti ekvivalentnim strujnim izvorom: Nortonov

strujni izvor je nadomjesni za Theveninov naponski izvor. Mrežu ćemo, dakle, zamisliti najprije nadomještenu Theveninovim naponskim izvorom, pa taj zamijeniti onda strujnim izvorom.



Sl. 8.17. Određivanje jakosti struje nadomjesnog Nortonovog strujnog izvora.



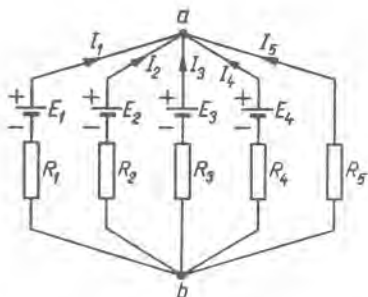
Sl. 8.18 a i b. Proračun struje u otporu R jedne grane Nortonovim teoremom.

Da se kratkim spajanjem stezaljki a i b u toj spojnici dobije onda doista struja I_k koja odgovara struji idealnog strujnog izvora slijedi iz elementarnih razmatranja o razdiobi struje I_k na slici 8.18 na dvije paralelne grane, od kojih je jedna, i to ($a b$), bez otpora, koja dakle predstavlja kratak spoj. Struja iz izvora I_k prolaziti će u punom iznosu radije samo kroz granu bez otpora, tj. kroz granu beskonačne vodljivosti.

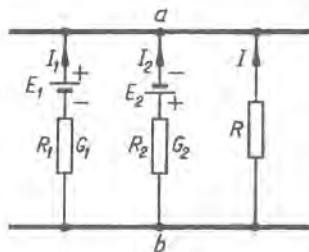
8.11.

MILLMANOV TEOREM

Mnogi elektrotehnički uređaji jake i slabe struje sastavljeni su tako da više paralelno spojenih trošila napajaju paralelno spojeni izvori. Takvi uređaji mogu se u nadomjesnim shemama prikazati linearnom mrežom koja ima samo dva čvora a i b na koje se priključuju pojedine grane, kako je prikazano na slici 8.19.



Sl. 8.19. Električna mreža uz tumačenje Millmanovog teorema.



Sl. 8.20. Sabirnice a i b u postrojenjima jake struje.

U elektroenergetskim postrojenjima ove čvorove predstavljaju dva masivna vodiča zanemarivog omskog otpora, koje nazivamo sabirnicama, slika 8.20.

Rješavanje ili analiza takve mreže može se izvršiti tako da se svi izvori nadomjesti jednim izvorom a sva trošila rezultatnim otporom, kako je bilo prikazano u poglavlju 8.11.

No budući da u elektrotehničkoj praksi često dolaze baš problemi ove vrste, izračunavaju se nepoznate struje u granama i bez pomoći nadomjesnih izvora i to direktnom primjenom Kirchhoffova zakona. U vezi s činjenicom da takva mreža ima 2 čvora naziva se njena analiza metoda dvaju čvorova a poznata je i pod nazivom Millmanov teorem.

Ako su zadane elektromotorne sile svih izvora i svi otpori, mogu se izračunati struje u svim granama, polazeći od činjenice da je napon U_{ab} za sve grane jedan te isti, pa prema tome za bilo koju granu l može biti predložen izrazom

$$U_{ab} = E_l - I_l \cdot R_l$$

gdje je pretpostavljen kao pozitivan smjer računanja struja i elektromotornih sila onaj kako je na shemi naznačen. Iz ove jednadžbe slijedi da je struja grane

$$I_l = \frac{E_l - U_{ab}}{R_l} = (E_l - U_{ab}) \cdot G_l$$

Pri proračunavanju pojedinih struja potrebno je, dakle, prethodno odrediti napon U_{ab} , a on se može i u ovom općenitom slučaju izračunati već prikazanom metodom ekvivalentnih izvora, no može se i tako da se na zajednički čvor primijeni I Kirchhoffov zakon

$$\sum I_l = 0,$$

pa dobivamo

$$\sum_{l=1}^n (E_l - U_{ab}) \cdot G_l = \sum_{l=1}^n E_l \cdot G_l - \sum_{l=1}^n U_{ab} \cdot G_l = 0$$

odakle je

$$U_{ab} \cdot \sum_{l=1}^n G_l = \sum_{l=1}^n E_l \cdot G_l$$

pa je konačno traženi napon

$$U_{ab} = \frac{\sum_{l=1}^n E_l \cdot G_l}{\sum_{l=1}^n G_l}$$

Suma $\sum_{l=1}^n E_l \cdot G_l$ u brojniku ovog razlomka je algebarska. To znači da se u skladu s prijašnjom slikom elektromotorne sile, čije je djelovanje usmjereno prema čvoru a , uzimaju s pozitivnim predznakom, a one suprotna smjera s negativnim predznakom.

Ako je u kojoj grani prisutan samo otpor bez napona, ako je, dakle, E ove grane jednak nuli, onda otpada taj pribrojnik u brojniku, no vodljivost te grane dolazi svakako kao pribrojnik u nazivniku.

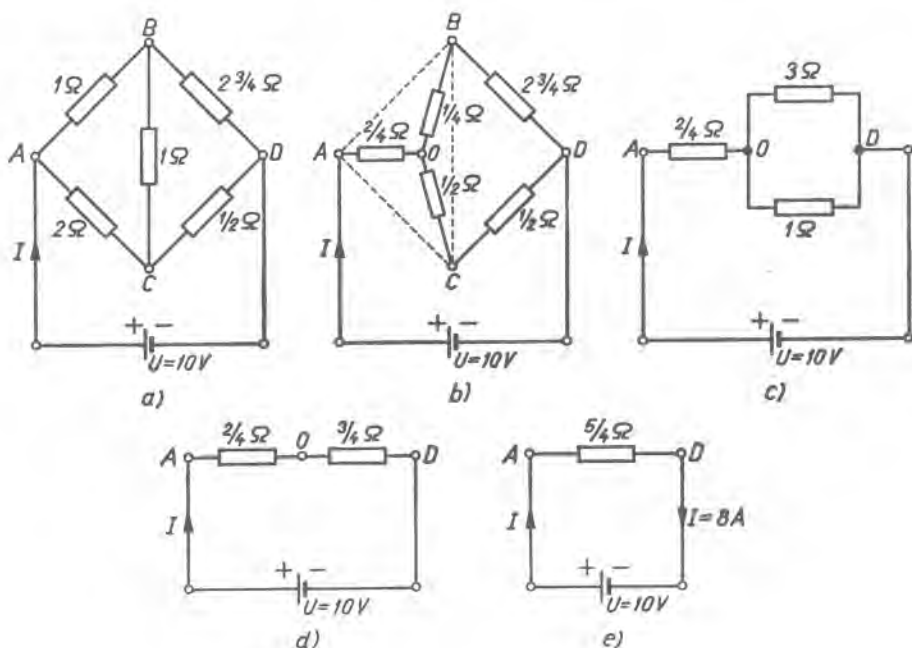
Poznavajući tako U_{ab} može se izračunati struja svake grane prema poznatoj jednadžbi

$$I_i = (E_i - U_{ab}) \cdot G_i$$

8.12.

TRANSFIGURACIJA ZVIJEZDE I TROKUTA

U spojnim shemama mogu otpori biti koji put tako spojeni da se njihov rezultantni otpor ne može odrediti jednostavnom primjenom osnovnih pravila, koja vrijede za serijski i paralelno spojene otpore. Takav je primjer prikazan na slici 8.21, gdje za zadani napon i otpore treba odrediti struje.

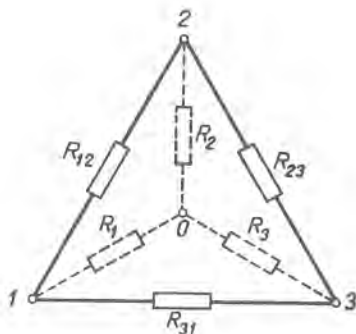


Sl. 8.21. Mreža električkih otpora na koju je primijenjena transfiguracija trokuta u zvijezdu.

Tu se međutim, može, na dio ABC , koji je u biti trokutni spoj triju otpora, primijeniti transfiguracija, što znači da se trokutni spoj može pretvoriti u ekvivalentni spoj u zvijezdu, nakon čega je zadatak lako riješiti.

Ima i takvih slučajeva gdje je poželjno pretvoriti neki spoj u zvijezdu u ekvivalentni trokutni spoj.

Jednadžbe s kojima se određuju nove vrijednosti otpora pri transfiguraciji, ako su poznati otpori prvotno zadane sheme, dobivaju se na osnovi općenitog zahtjeva koji mora biti ispunjen pri svakoj transformaciji, a to je da se transformacijom ništa ne mijenjaju strujne ni naponske prilike u ostalom dijelu mreže.



Sl. 8.22. Transfiguracija trokuta u zvijezdu.

Promotrimo, dakle, odnose između otpora zadanog trokuta i ekvivalentne zvijezde. Budući da ekvivalentnost mora biti ispunjena u preostalom dijelu mreže u svim prilikama pogona koje vladaju izvan promatranog trokuta ili zvijezde, moraju otpori biti mjereni između bilo koja dva čvora: (1, 2), (2, 3) i (3, 1) jednaki u oba slučaja.

Imamo, dakle, da je prema slici 8.22 među čvorovima 1 i 2 u trokutnom spoju otpor jednak $R_{12} \cdot (R_{23} + R_{31}) : (R_{12} + R_{23} + R_{31})$, dok je taj otpor u spoju u zvijezdu $R_1 + R_2$.

Prema tome imamo za otpore čvorova 1, 2 i analogno za čvorove 2, 3 i 3, 1 sljedeće jednadžbe

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12} \cdot (R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23} \cdot (R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31} \cdot (R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Nadalje imamo

$$(R_3 + R_1) - (R_2 + R_3) = \frac{R_{31} \cdot R_{12} + R_{31} \cdot R_{23} - R_{23} \cdot R_{31} - R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

pa je

$$R_1 - R_2 = \frac{R_{31} \cdot R_{12} - R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

što zbrojeno s jednadžbom

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23} + R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

daje

$$2 R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12} + R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = 2 \cdot \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

tako da je

$$R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

i analogno

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Umjesto da izrazimo otpore zvijezde R_1 , R_2 i R_3 otporima trokuta R_{12} , R_{23} i R_{31} prema gore navedenim jednadžbama, možemo transformaciju računati i pomoću vodljivosti, te dobivamo npr. za vodljivost G_1 njezinu vrijednost iz izraza

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{R_{12} + R_{23} + R_{31}}{R_{31} \cdot R_{12}} = \frac{R_{12}}{R_{31} \cdot R_{12}} + \frac{R_{23}}{R_{31} \cdot R_{12}} + \frac{R_{31}}{R_{31} \cdot R_{12}}$$

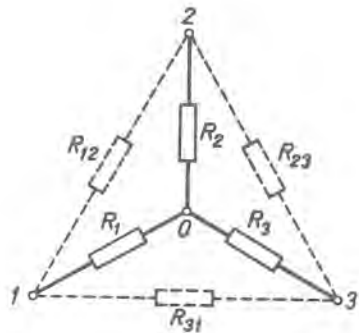
dakle je

$$G_1 = G_{12} + G_{31} + \frac{G_{12} \cdot G_{31}}{G_{23}}$$

i analogno

$$G_2 = G_{23} + G_{12} + \frac{G_{23} \cdot G_{12}}{G_{31}};$$

$$G_3 = G_{31} + G_{23} + \frac{G_{31} \cdot G_{23}}{G_{12}}$$



Sl. 8.23. Transfiguracija zvijezde u trokut.

Iz ovih izraza mogu se odrediti i jednadžbe za obratnu transfiguraciju kada su, naime, zadani otpori zvijezde R_1, R_2, R_3 , a traže se otpori R_{12}, R_{23}, R_{31} ekvivalentnog trokuta. sl. 8.23. U tu svrhu izračunat ćemo najprije vrijednost izraza $R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1$, pa dobivamo

$$\begin{aligned} R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1 &= \frac{R_{12}^2 \cdot R_{23} \cdot R_{31} + R_{23}^2 \cdot R_{31} \cdot R_{12} + R_{31}^2 \cdot R_{12} \cdot R_{23}}{(R_{12} + R_{23} + R_{31})^2} = \\ &= \frac{R_{12} \cdot R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned}$$

Ako ovu jednadžbu podijelimo sa

$$R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad \text{dobivamo} \quad R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} = R_{23}$$

a slično izlaze i za ostale otpore analogne relacije, pa imamo

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1};$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}$$

ili

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_3}; \quad R_{23} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_1};$$

$$R_{31} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_2}$$

U koliko se računa s vodljivostima, dobiva prva jednadžba oblik

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{G_3}{G_1 \cdot G_2} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_2} = \frac{\Sigma G}{G_1 \cdot G_2}$$

i analogno ostale

$$\frac{1}{G_{23}} = \frac{\Sigma G}{G_2 \cdot G_3}; \quad \frac{1}{G_{31}} = \frac{\Sigma G}{G_3 \cdot G_1}$$

Ovo se može jednostavno izraziti i pomoću otpora

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_0}; \quad R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_0}; \quad R_{31} = \frac{R_3 \cdot R_1}{R_0}$$

gdje je simbolom R_0 izražen ukupni otpor »zvijezde« prema relaciji da je

$$\Sigma G = G_0 = \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Na prvotno postavljeni zadatak sa slike 8.21 možemo sada prema izvedenim jednadžbama primijeniti transformaciju trokuta ABC u ekvivalentnu zvijezdu, pa ćemo lako izračunati rezultatni otpor cijele kombinacije koja je priključena na izvor od 10 V i odrediti struju izvora.

Tu se najprije iz slike a) dobije slika b), gdje su otpori zvijezde

$$R_A = \frac{2 \cdot 1}{1 + 1 + 2} = \frac{2}{4} \Omega; \quad R_B = \frac{1 \cdot 1}{1 + 1 + 2} = \frac{1}{4} \Omega$$

i

$$R_C = \frac{1 \cdot 2}{1 + 1 + 2} = \frac{2}{4} \Omega = \frac{1}{2} \Omega$$

pa tako onda shema b) prelazi u shemu c), gdje su serijski povezani otpori $1/4 \Omega$ i $2 \text{ i } 3/4 \Omega$, te $1/2 \Omega$ i $1/2 \Omega$ nadomješteni rezultatnim otporima 3Ω i 1Ω . Kako su pak ovi spojeni paralelno, nadomješteni su na slici d) rezultantom $3 \cdot 1 : (3 + 1) = 3/4 \Omega$, što s otporom $R_A = 2/4 \Omega$ daje konačni rezultatni otpor na slici e) $R = 2/4 + 3/4 = 5/4 \Omega$, koji opterećuje izvor od 10 V strujom

$$I = \frac{10}{\frac{5}{4}} = 8 \text{ A}$$

9.

NELINEARNI ELEMENTI U ISTOSMJERNIM STRUJNIM KRUGOVIMA

9.1.

VOLTAMPERSKE KARAKTERISTIKE

Pri objašnjavanju prilika u električkom strujnom krugu bilo je već u uvodu spomenuto da se električki otpori R metalnih vodiča mogu smatrati konstantnim veličinama ako se vodiči drže na konstantnoj temperaturi. To znači da uz ovu pretpostavku vrijednost otpora ne ovisi o jakosti struje koja prolazi kroz otpor, a niti o naponu na njegovim krajevima.

U tom slučaju vrijedi za takve otpore Ohmov zakon $R = U/I = \text{konst}$, pa ako se ta jednadžba prikaže u koordinatnom sustavu (U, I) dobiva se kao njen graf pravac koji prolazi iz ishodišta, $U = I \cdot R$.

Taj pravac je, dakle, karakteristika omskog otpora i naziva se često voltamperska karakteristika, a jer je predočena pravcom — linijom — kaže se da je taj otpor linearni sastavni element strujnog kruga.

Ako se u spojnoj shemi nalaze samo linearni otpori, nazivamo takvu shemu linearnom električkom mrežom. No ne samo otpor, već i ostali elementi koji se nalaze u spojnoj shemi mreže, smatraju se linearnim ako njihovi parametri ne ovise o jakosti struje, odnosno o naponu.

U praksi, međutim, potpuno linearnih električkih dijelova od kojih su sastavljeni električki uređaji i aparati gotovo i nema, jer se uvijek opaža da njihovi parametri ovise više ili manje o jakosti struje, odnosno o naponu. Takve otpore i ostale dijelove zovemo nelinearnim, a spojne sheme i mreže su onda nelinearne.

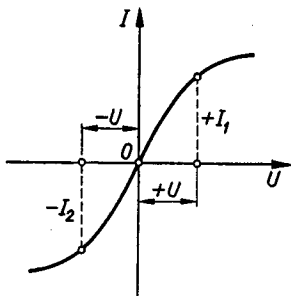
Ipak ima slučajeva da ova nelinearnost nije jako istaknuta, pa možemo mrežu smatrati linearnom.

Voltamperske karakteristike, a to su: $U = f(I)$ ili $I = F(U)$ nelinearnih otpora, mogu za razne otpornike, odnosno za sastavne dijelove mreže, biti veoma različite. Tako su već na slici 3.3 prikazane karakteristike žarulja s metalnom i ugljenom niti, a i karakteristike željezne žice u atmosferi vodika.

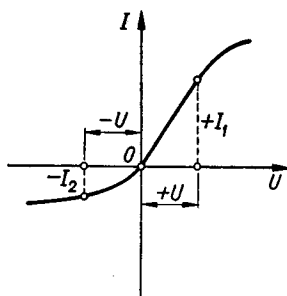
Prema vanjskom izgledu ove karakteristike nelinearni se elementi različito nazivaju. Simetrični nelinearni elementi su oni pri kojima veličina otpora ne ovisi o smjeru u kojem djeluje napon, odnosno u kojem prolazi struja, već samo o njihovom apsolutnom iznosu.

Zbog toga je karakteristika ovakvih elemenata simetrična s obzirom na ishodište koordinatnog sustava (U, I), što znači da je

$$f(-U) = -f(U) \quad \text{slika 9.1}$$



Sl. 9.1. Voltamperska karakteristika simetričnog nelinearnog elementa.



Sl. 9.2. Voltamperska karakteristika nesimetričnog nelinearnog elementa.

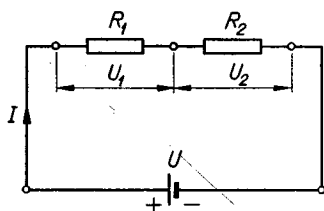
Pri nesimetričnim nelinearnim elementima veličina otpora ne ovisi samo o jakosti struje, odnosno veličini napona, već i o tome u kojem smjeru prolazi struja, odnosno djeluje napon. Voltamperska karakteristika je, dakle, s obzirom na ishodište koordinatnog sustava (U, I) nesimetrična, što se matematički izražava izrazom

$$f(-U) \neq -f(U) \quad \text{slika 9.2}$$

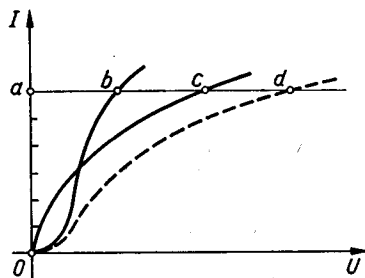
U grupu nesimetričnih nelinearnih elemenata ubrajaju se poluvodički ispravljački elementi, elektronke, tinjalice, električki luk i drugo.

9.2. GRAFIČKE METODE ZA RAZDIOBU STRUJE I NAPONA

Potrebno je objasniti još kako se na osnovi poznatih karakteristika nelinearnih otpora može odrediti razdioba struja i napona na pojedine dijelove od kojih je sa-



Sl. 9.3. Serijski spoj dvaju nelinearnih otpora na izvor istosmjernog napona.



Sl. 9.4. Voltamperska karakteristika resultantnog otpora dvaju nelinearnih otpora u serijskom spoju.

stavljen strujni krug. Pretpostavljamo pri tome da takve strujne krugove napajaju izvori konstantnog istosmjernog napona U .

Ako se mreža sastoji od dva serijski spojena nelinearna otpora R_1 i R_2 , čije su karakteristike poznate, slika 9.3, onda i ovdje vrijede poznate jednadžbe za serijski spoj

$$U = U_1 + U_2$$

i

$$I = I_1 = I_2$$

jer su obje izvedene iz Kirchhoffovih zakona, koji vrijede posve općenito.

Budući da nisu poznati analitički izrazi krivulja

$$U_1 = f_1(I) \quad \text{i} \quad U_2 = f_2(I)$$

odnosno

$$I_1 = F_1(U) \quad I_2 = F_2(U)$$

koje su prikazane grafički u koordinatnom sustavu (U, I) , mora se ovdje provesti proračun grafičkim putem. Karakteristiku

$$I = F(U)$$

rezultantnog otpora dobivamo tako da za razne odabrane jakosti struje I odredimo pripadne napone prvog i drugog otpora U_1 i U_2 , te obje apscise zbrojimo. To znači da se rezultantna krivulja dobije sumiranjem obiju zadanih krivulja. Na slici 9.4 je prikazano ovo sumiranje za ordinatu a

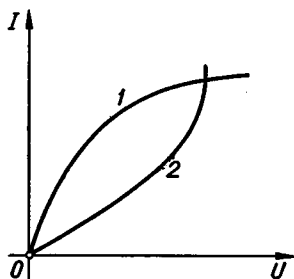
$$a d = a b + a c$$

Iz ove rezultantne karakteristike može se obrnuto i za bilo koji napon izvora U odrediti kolika će biti struja I i koliki su naponi potrošeni u pojedinom otporu U_1 i U_2 .

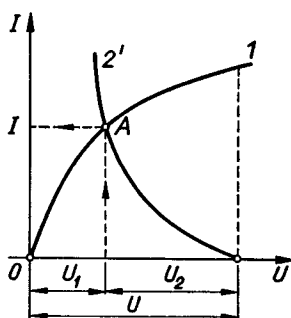
Ako bismo imali više serijski uključenih nelinearnih otpora, postupak bi se dalje proširio tako da bismo dobivenoj karakteristici za prva dva otpora dodali još karakteristiku trećeg otpora itd.

Za dva u seriji spojena nelinearna otpora sl. 9.5 može se za jedan zadani napon U odrediti struja, a time i razdioba napona na pojedine otpore, još i na način prikazan na slici 9.6. Tu vidimo da nije potrebno crtati rezultantnu krivulju, jer se točka koja predoduje pogonsko stanje za zadani napon U dobiva tako da se krivulja jednog otpora crta iz ishodišta 0, a karakteristika drugog otpora kao zrcalna slika s obzirom na vertikalnu, povučenu iz točke na apscisnoj osi, koja predoduje napon izvora U . Pri tom premještanju krivulje drugog otpora mjerimo zapravo njezine napone od točke U na lijevu stranu, jer je krivulja zrcaljenjem za svoje apscise promijenila predznak. Sjecištem krivulja 1 i 2' dobivamo za napon U radnu točku, jer je time za oba otpora dobivena ista ordinata kao jakost struje $I_1 = I_2 = I$,

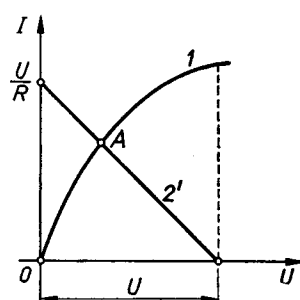
što je zahtjev strujne jednadžbe, a osim toga je zbroj pripadnih apscisa, a to je zbroj napona U_1 i U_2 , jednak naponu izvora U , čime je zadovoljena naponska jednadžba $U = U_1 + U_2$.



Sl. 9.5. Nelinearne karakteristike dvaju otpora.

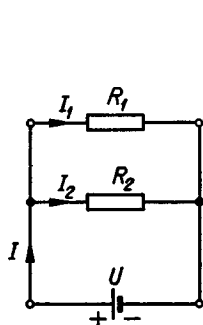


Sl. 9.6. Određivanje struje i razdiobe napona na dva serijski vezana nelinearna otpora, koji su priključeni na istosmjerni napon U .

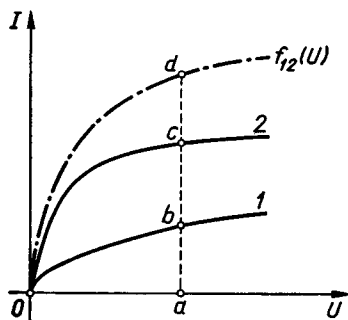


Sl. 9.7. Razdioba napona U na nelinearni i linearni otpor u serijskom spoju.

Ovaj način osobito je pogodan za proračun strujnog kruga gdje su na izvor konstantnog napona U serijski povezani jedan konstantni otpor R s linearnom karakteristikom i jedan nelinearni otpor čija je karakteristika krivulja. U tom se slučaju krivulja nelinearnog otpora ostavlja nacrtana iz ishodišta koordinatnog sustava, a pravac konstantnog otpora crta se iz točke U na apscisnoj osi kao zrcalna slika. Taj se pravac lako nacrtati, jer mu je jedna točka na apscisi U , a druga na ordinatnoj osi u visini koja odgovara struji $I = U/R$. Ova točka odgovara naime karakteristici linearnog otpora R za puni napon izvora U , slika 9.7.



Sl. 9.8. Paralelni spoj dvaju nelinearnih otpora na istosmjerni napon.



Sl. 9.9. Rezultantna voltamperska karakteristika paralelno spojenih nelinearnih otpora.

Ako su prema slici 9.8 na izvor napona U priključena u paralelnom spoju dva nelinearna otpora i ako poznamo njihove voltamperske karakteristike, možemo opet na sličan način odrediti resultantnu karakteristiku na osnovi odnosa koji

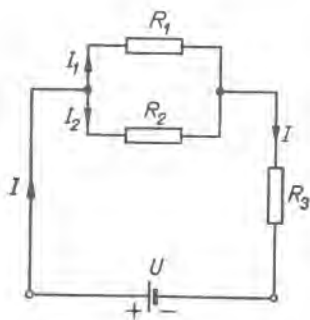
vrijede za napon i struje pri paralelnom spoju. Ovi su odnosi opet definirani I i II Kirchhoffovim zakonom, a predloženi su jednadžbama

$$U = U_1 = U_2$$

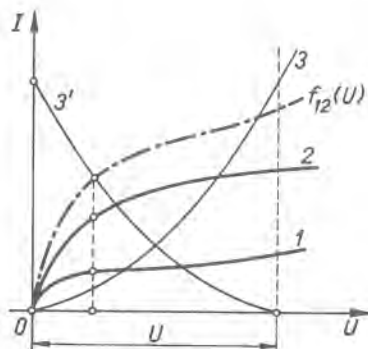
$$I = I_1 + I_2$$

To znači da će za jedan odabrani napon U ukupna struja izvora biti predložena zbrojem ordinata koje pripadaju karakteristikama obaju otpora, dakle prema slici 9.9.

$$a d = a b + a c.$$



Sl. 9.10. Kombinacija serijsko-paralelno spojenih otpora priključena na napon U .



Sl. 9.11. Određivanje razdiobe napona i struje za spoj prema sl. 9.10.

U daljnjem primjeru prikazano je grafičko izračunavanje jakosti struje ako je na izvor napona U priključena kombinacija serijsko-paralelno spojenih nelinearnih otpora R_1 , R_2 i R_3 , prema slici 9.10. Tu je najprije na slici 9.11 određena karakteristika paralelnog spoja R_1 i R_2 označena kao $f_{12}(U)$, a onda se presjecištem ove karakteristike sa zrcalnom slikom karakteristike trećeg otpora odredi struja I_3 i ujedno obje struje I_1 i I_2 , te pripadni naponi $U_1 = U_2$ i U_3 .

10.

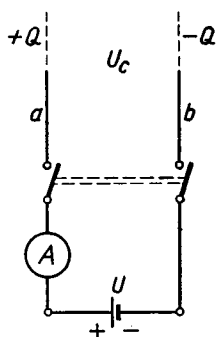
ELEKTROSTATIKA

10.1.

ELEKTRIČKI KAPACITET I KONDENZATORI

10.1.1. Priključak otvorenog voda na izvor istosmjernog napona. Elektrostatika je onaj dio nauke o elektricitetu koji govori o pojavama što nastaju u prostoru u kojem električki naboji miruju.

Bit svih tih pojava sadržan je u poznatom fizikalnom zakonu da se raznoimeni električki naboji privlače, a istoimeni odbijaju. Time se objašnjavaju i ostale fizičke pojave, kao električka influencija i električka polarizacija.



Sl. 10.1. Priključak otvorenog voda na izvor konstantnog istosmjernog napona.

Da bi se upoznali zakoni elektrostatike potrebna su u prostoru barem dva tijela nabijena suprotnim električkim nabojima, a pri tome treba u prostoru među njima i oko njih vršiti mjerenja.

Takva nabijena tijela mogu se dobiti na različite načine, a uvijek će se pri tome jednom tijelu elektroni oduzeti i predati drugom tijelu, bilo gdje u prostoru.

U uvodnim razmatranjima odabrat ćemo kao najjednostavniji način dobivanja tih dvaju elektriziranih tijela taj da na izvor napona U priključimo dva međusobno izolirana prvotno električki neutralna vodiča a i b , slika 10.1.

Ova nas slika podsjeća na električki strujni krug, samo je ovdje strujni krug otvoren, jer između vodiča nema vodljive veze (trošilo ili slično) već izolator koji onemogućuje trajni tok struje.

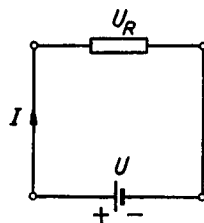
Kod priključka ovakvog otvorenog voda na izvor stalnog istosmjernog napona ipak će uključen osjetljivi ampermetar registrirati kratkotrajan tok struje, što se očituje kao »strujni udarac«. Ovo strujanje objašnjavamo time da je pod utjecajem napona izvora U došlo do premještanja elektrona od jednog vodiča na drugi, kako bi se na svakom vodiču uspostavilo ono električko stanje koje je stalno pod utjecajem napona izvora U održavano na odgovarajućoj stezaljci izvora. Tako će na slici lijevi vodič priključen na pozitivnu stezaljku dobiti pozitivni električki naboj, a desni, koji je priključen na negativnu stezaljku izvora postat će negativno električki nabijen. Budući da je ampermetar pokazao kratkotrajno strujanje, vršilo se

nabijanje ovih dvaju vodiča tako da je pod utjecajem napona U izvjesna količina elektrona s lijevog vodiča prešla na desni. Time je na lijevom vodiču nastao manjak elektrona i on je postao pozitivno električan, a desni vodič primio je suvišak elektrona i postao negativno električan. Količina nastalog pozitivnog naboja jednog vodiča jednaka je, dakle, količini negativnog naboja drugog vodiča.

Ovo premještanje elektrona — a to je električna struja — traje tako dugo dok vodiči prime na sebe toliko naboja Q da je tim nabojima stvoren između njih točno takav napon U_c kakav je onaj izvora U . Stvoreni napon U_c po smjeru svog djelovanja u konturi ovoga sklopa suprotan je smjeru djelovanja napona izvora U .

Čim je, dakle, uspostavljena ravnoteža napona U_c i U prestaje teći struja, što je i razumljivo, jer trajna provodna struja ne može teći budući da je strujni krug prekinut.

Već smo vidjeli da i u strujnom krugu koji je otporom R vodljivo zatvoren postoji također ravnoteža napona U_R i napona izvora U , slika 10.2. Budući da je uz napon $U_R = I \cdot R$ vezano gibanje električkih naboja kroz otpor R , možemo ovu ravnotežu proglasiti dinamičkom ravnotežom.



Sl. 10.2. Prikaz dinamičke ravnoteže napona.

Kod otvorenog voda, kada vodiči prime naboj Q , nema više strujanja, a stvoreni napon U_c postoji zbog prisustva mirujućih naboja na vodičima, pa zato ovu ravnotežu napona zovemo statičkom ravnotežom.

Mjerenja pokazuju da je količina elektriciteta Q što je primi na se svaki od vodiča proporcionalna naponu U , ali da ovisi i o tome kako je oblikovan priključeni otvoreni vod. Možemo, dakle, napisati jednadžbu proporcionalnosti

$$Q = C \cdot U$$

gdje faktor proporcionalnosti C ovisi baš o geometrijsko-tvarnom sastavu otvorenog voda. Ta veličina C naziva se električki kapacitet voda.

Općenito se može reći da je električki kapacitet veličina kojom se karakterizira fizikalno svojstvo kombinacije vodiča u vezi s njihovom prijemljivošću za električke naboje.

Jedinica kojom se mjeri kapacitet C slijedi iz osnovne jednadžbe $Q = C \cdot U$, jer uz već poznate jedinice za naboj i napon možemo jedinicu za C izraziti prema jednadžbi $C = Q/U$ kao kvocijent As/V . Ta jedinica naziva se farad i označuje slovom F

$$F = \frac{\text{As}}{\text{V}}$$

Gdje god su u električkim uređajima električki vodiči ili električki vodljivi dijelovi pod naponom, treba računati i s kapacitetima tih tijela. U mnogim je uređajima, međutim, često potreban neki tačno određen kapacitet, a u tu svrhu služe tzv. kondenzatori, čija se konstrukcija može unaprijed proračunati tako da kondenzator ima upravo traženi kapacitet.

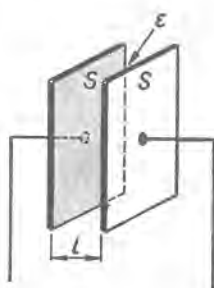
10.1.2. Pločasti kondenzator. Najjednostavnije prilike i prema tome najjednostavnije jednačbe za proračunavanje kapaciteta su kad je kondenzator sastavljen od dvije jednake metalne ploče površine S , koje su paralelno razmaknute na udaljenosti l . Mjerenjem veličina Q i U može se odrediti veličina C po jednačbi $C = Q/U$, pa se za takav pločasti kondenzator (slika 10.3) pokazalo da

kapacitet C ovisi

- o površini ploča S direktno proporcionalno,
- o razmaku ploča l obrnuto proporcionalno,
- o vrsti izolacije među pločama, što se računski uzima u obzir faktorom ϵ , koji se zove dielektrička konstanta izolatora.

Ova riječima prikazana ovisnost kapaciteta o njegovoj konstrukciji može se za pločasti kondenzator prikazati jednačbom

$$C = \epsilon \cdot \frac{S}{l}$$



Tu je novouvedena dielektrička konstanta izolatora ϵ , a jedinica kojom se ta veličina mjeri dobije se ako se iz gornje jednačbe izračuna ϵ

$$\epsilon = \frac{C \cdot l}{S}$$

dakle jedinica je

Sl. 10.3. Pločasti kondenzator.

$$\frac{\text{F} \cdot \text{m}}{\text{m}^2} = \frac{\text{F}}{\text{m}} = \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

Mjerenja pokazuju da za vakuum ϵ_0 iznosi

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

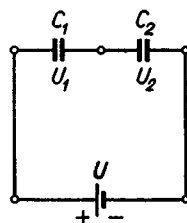
U daljnjim izvođenjima još je opširnije objašnjen utjecaj materijalnih izolatora na kapacitet C , a za prva razmatranja pretpostavit ćemo da nam kao izolator služi vakuum, pa je

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{l}$$

Kapacitet od jednog farada ima onaj kondenzator koji pri naponu od jednog volta primi na se električki naboj od jednog kulona, a to je jedna ampersekunda. Kako je kapacitet od jednog farada golema veličina, redovno se u praksi susreću mnogo manji kapaciteti, pa će u obzir doći izvedene manje jedinice da se označe kapaciteti kondenzatora. To su: mikrofarad $\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$, nanofarad $\text{nF} = 10^{-9} \text{ F}$ i pikofarad $\text{pF} = 10^{-12} \text{ F}$.

10.1.3. Serijski spoj kondenzatora. Kondenzator je također jedan od osnovnih dijelova mnogih elektrotehničkih naprava. Budući da se u njima može i više kondenzatora različito međusobno spajati, potrebno je još pobliže razmotriti kako se određuje rezultantni kapacitet pri raznim vrstama spoja.

Kod priključka dvaju serijski povezanih kondenzatora na izvor napona U , slika 10.4 dobit će opet one ploče koje su direktno povezane sa stezaljkama izvora pod utjecajem napona U neki naboj Q , pa će lijeva ploča lijevog kondenzatora na promatranoj slici biti pozitivno nabijena, a desna ploča desnog kondenzatora bit će negativno nabijena. Sredina između graničnih ploča, koja je od izvora odvojena izolacijom, a prvotno je također bila električki neutralna, postat će pod utjecajem električkih naboja na krajnjim pločama također električki nabijena. Naime, zbog električkih privlačnih sila od pozitivnog naboja lijeve krajnje ploče lijevog kondenzatora bit će na desnu ploču toga kondenzatora privučeni slobodni elektroni, pa će ta ploča postati negativno električna, dok će lijeva ploča desnog kondenzatora zbog odlaska postati električki pozitivna. Oba kondenzatora primaju na svoje ploče jednake naboje, pa se može reći da su i naboj Q_1 jednog i naboj Q_2 drugog kondenzatora jednaki naboju Q koji je od izvora predan ovome sklopu.



Sl. 10.4. Serijski spoj dvaju kondenzatora na konstantni napon U .

Pojava odvajanja električkih naboja na električki neutralnom tijelu pod utjecajem električkih privlačnih sila drugih nabijenih tijela naziva se električka influencija i u posebnom poglavlju je detaljnije objašnjena.

Što se tiče naponskih prilika, zbog primljenih naboja na svakom će se kondenzatoru stvoriti neki napon, a kako su oba kondenzatora serijski spojena, stvoreni naponi U_1 i U_2 će se zbrojiti i njihova suma bit će jednaka naponu izvora U , jer će se opet uspostaviti statička ravnoteža napona priključenih kondenzatora i napona izvora.

Ovi odnosi električkih naboja i napona na kondenzatorima mogu se prikazati jednadžbama

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

i

$$U = U_1 + U_2$$

Za svaki kondenzator, a i za cijelu kombinaciju, vrijedi pravilo da je naboj jednak umnošku napona i kapaciteta, odnosno da je napon jednak kvocijentu naboja i kapaciteta

$$U = \frac{Q}{C}; \quad U_1 = \frac{Q_1}{C_1}; \quad U_2 = \frac{Q_2}{C_2}$$

pa tako dobivamo

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

a jer su naboji jednaki

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

ili

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Recipročna vrijednost resultantnog kapaciteta serijski spojenih kondenzatora jednaka je, dakle, sumi recipročnih vrijednosti kapaciteta pojedinih kondenzatora. To ne vrijedi samo za prikazani spoj dvaju serijski povezanih kondenzatora, već i za bilo koliko serijski spojenih kondenzatora, pa općenita jednačba za taj spoj glasi

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Iz ove jednačbe može se lako odrediti vrijednost C .

Specijalno za serijski spoj dvaju kondenzatora dobiva se za resultantni kapacitet C konačno jednačba

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

Ako su kondenzatori jednakog kapaciteta, $C_1 = C_2$, izlazi da je

$$C = \frac{C_1}{2}$$

Napon izvora U raspodijeli se u serijskom spoju dvaju kondenzatora na dva dijela, U_1 i U_2 , čije su vrijednosti

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} \quad \text{i} \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}$$

a njihov je omjer

$$U_1 : U_2 = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2}$$

ili

$$U_1 : U_2 = C_2 : C_1$$

Napon izvora razdijeli se, dakle, na pojedine kondenzatore u obrnutom omjeru njihovih kapaciteta: uz veći kapacitet bit će napon manji i obrnuto, na manjem kapacitetu bit će napon veći. Ako su oba kondenzatora jednakih kapaciteta svaki će imati polovicu ukupnog napona izvora.

Usporedimo li ovu razdiobu napona U pri serijskom spoju dvaju kondenzatora s onom razdiobom napona U kad su na taj napon priključena dva omska trošila, vidimo da i kod omskih otpora možemo dobiti sličnu jednačbu za razdiobu na-

pona na pojedina uključena trošila, ako umjesto otpora R_1 i R_2 računamo s njihovim recipročnim vrijednostima, dakle s vodljivostima G_1 i G_2 trošila. U tom je slučaju

$$U_1 : U_2 = G_2 : G_1$$

Oдавде se vidi da kapacitet ima karakter vodljivosti, a to će biti kasnije detaljnije razmatrano.

10.1.4. Paralelni spoj kondenzatora. Prema slici 10.5 vidi se da će u paralelnom spoju dvaju kondenzatora na jedan izvor napon na jednom, a i na drugom kondenzatoru, biti točno jednaki naponu izvora. Svaki kondenzator dobiva, međutim, neovisno o drugome neki naboj koji je ovisan o njegovu kapacitetu, a ukupni naboj što ga je od izvora primila cijela kombinacija jednak je zbroju oba naboja. Jednadžbe za ovaj spoj glase

$$U_1 = U_2 = U$$

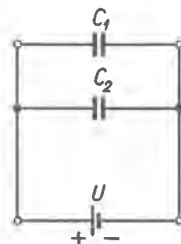
$$Q = Q_1 + Q_2$$

No kako je

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1 = C_1 \cdot U \quad \text{i} \quad Q_2 = C_2 \cdot U_2 = C_2 \cdot U,$$

ukupni naboj je

$$Q = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U = U \cdot (C_1 + C_2)$$



Sl. 10.5. Paralelni spoj dvaju kondenzatora na konstantni napon U .

odakle slijedi da je rezultatni kapacitet paralelnog spoja dvaju kondenzatora

$$C = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2$$

jednak zbroju kapaciteta pojedinih kondenzatora. To vrijedi i za bilo koliko paralelno vezanih kondenzatora.

Općenita jednadžba za proračun rezultatnog kapaciteta paralelno spojenih kondenzatora glasi, dakle

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

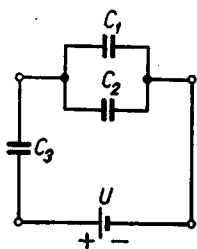
I ovdje se očituje karakter vodljivosti kapaciteta kondenzatora jer se i u paralelnom spoju više omskih trošila njihove vodljivosti zbrajaju.

Kod kombinirano serijsko-paralelno vezanih kondenzatora nađe se rezultatni kapacitet cijelog spoja tako da se prema prijašnjim pravilima kombinirani spoj postepeno reducira na osnovne spojeve: serijski i paralelni spoj.

Kao primjer odredit ćemo rezultatni kapacitet spoja prema slici 10.6 te izračunati naboje i napone na pojedinim kondenzatorima. Zadane su slijedeće vrijednosti

$$C_1 = 2 \mu\text{F}, \quad C_2 = 3 \mu\text{F}, \quad C_3 = 10 \mu\text{F}$$

i napon izvora $U = 1500 \text{ V}$.



Sl. 10.6. Kombinirani serijsko paralelni spoj kondenzatora.

Gledano sa stezaljki izvora taj spoj triju kondenzatora C_1 , C_2 i C_3 možemo smatrati serijskim spojem dvaju kondenzatora, ako oba paralelno vezana kondenzatora C_1 i C_2 nadomjestimo njihovim rezultatnim kapacitetom $C_{12} = C_1 + C_2 = 5 \mu\text{F}$. Rezultantni kapacitet svih triju kondenzatora jednak je

$$C = \frac{C_{12} \cdot C_3}{C_{12} + C_3} = \frac{(C_1 + C_2) \cdot C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{50}{15} \mu\text{F} = \frac{10}{3} \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

Naboj Q koji je pod utjecajem napona izvora U predan cijeloj kombinaciji, jeste

$$Q = C \cdot U = \frac{10}{3} \cdot 10^{-6} \cdot 1500 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ As} = 5 \text{ mAs}$$

Kondenzator C_3 dobiva na svoje ploče taj naboj u punom iznosu $Q_3 = Q = 5 \text{ mAs}$, dok će se taj isti naboj na paralelno vezane kondenzatore podijeliti u omjeru njihovih kapaciteta, jer u paralelnom spoju oba kondenzatora C_1 i C_2 , imaju isti zajednički napon $U_1 = U_2$, pa je prema jednadžbama

$$Q_1 = U_1 \cdot C_1 \quad \text{i} \quad Q_2 = U_1 \cdot C_2 \quad Q_1 : Q_2 = C_1 : C_2 = 2 : 3$$

Iz ovog razmjera i jednadžbe $Q = Q_1 + Q_2 = 5 \text{ mAs}$ slijedi da su $Q_1 = 2 \text{ mAs}$ i $Q_2 = 3 \text{ mAs}$.

Sada se mogu odrediti i naponi na pojedinim kondenzatorima prema osnovnoj jednadžbi $U = Q/C$ za svaki kondenzator

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{2 \text{ mAs}}{2 \mu\text{F}} = 1000 \text{ V}; \quad U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{3 \text{ mAs}}{3 \mu\text{F}} = 1000 \text{ V}$$

$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{5 \text{ mAs}}{10 \mu\text{F}} = 500 \text{ V}$$

10.1.5. Elektrostatske mreže. Iz prijašnjih izlaganja se vidi da je i s kondenzatorima moguće ostvariti, slično električkom strujnom krugu, tzv. kondenzatorski ili elektrostatski krug, u kojem je na jedan izvor priključena neka kombinacija raznih kondenzatora.

To se može još i proširiti, te ostvariti i kompliciranije spojeve više izvora i kondenzatora, koje spojeve nazivamo elektrostatskim mrežama. Pri tome pretpostavljamo da su kondenzatori idealni, što znači da je izolacija među pločama savršena.

Rješavanje takvih elektrostatskih mreža vrši se u biti načinom analognim kao što se rješavaju i linearne strujne mreže. Osnova svih metoda opet su dva Kirchhoffova zakona i to jedan za čvorove, a drugi za konture mreže. No postoji ipak bitna razlika zbog toga, što se kod elektrostatskih mreža ne može govoriti o trajnim strujama, već samo o mirujućim nabojima, koji su rezultat kratkotrajnih udaraca struja nabijanja.

Prvi Kirchhoffov zakon za elektrostatske mreže mora se formulirati ovako: algebarska suma naboja na pločama svih kondenzatora koji su spojeni u nekom čvoru mora biti jednaka nuli, ako kondenzatori prigodom uključivanja na izvore nisu bili već otprije nabijeni nekim nabojem. Ako su pak kondenzatori imali već otprije neki naboj, tada zbog principa konzervacije naboja ova algebarska suma naboja u jednom promatranom čvoru nakon priključka na izvore nije jednaka nuli, već točno sumi početnih naboja priključenih kondenzatora.

Jednadžba čvorišnih naboja elektrostatskih mreža glasi, dakle

$$\text{alg} \sum Q_i = \text{alg} \sum Q_0$$

gdje su Q_i - konačni naboji
 Q_0 - početni naboji

Drugi Kirchhoffov zakon koji se odnosi na napone pojedinih kontura potpuno je isti u svom smislu kao i u strujnim mrežama. Obilazeći, naime, po konturama elektrostatskih mreža kad je potpunim nabijanjem kondenzatora uspostavljeno stacionarno stanje, postignuta je također ravnoteža aktivnih napona izvora i protunapona na kondenzatorima, a to je baš bit II Kirchhoffova zakona. Prema tome, za konture elektrostatskih mreža jednadžba II Kirchhoffova zakona glasi

$$\text{alg} \sum E = \text{alg} \sum U_e$$

a jer je

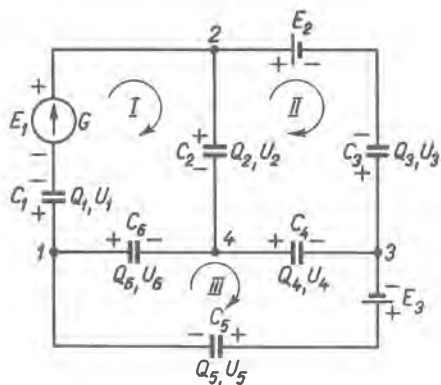
$$U_e = \frac{Q}{C}$$

konačno izlazi

$$\text{alg} \sum E = \text{alg} \sum \frac{Q}{C}$$

Za ilustraciju kako se postavljaju jednadžbe Kirchhoffovih zakona za elektrostatsku mrežu neka posluži slika 10.7. Pri tome se, slično kao i u strujnim mrežama, ovdje pretpostavlja da su aktivni naponi E zadani po smjeru djelovanja i po veličini, te da su poznati kapaciteti svih kondenzatora. Traži se koliki su naboji i naponi na kondenzatorima, i njihov polaritet. Budući da naboji nisu poznati, jer ih baš želimo izračunati, no jer u jednadžbama moraju doći u algebarskim sumama, pretpostavit ćemo njihov polaritet i time ujedno i smjer svih protunapona U_e . U konačnom rezultatu pozitivni predznak pokazuje da je polaritet naboja ispravno pretpostavljen, a ako je predznak minus, potrebno je pretpostavku promijeniti.

Na osnovi zadanih E i pretpostavljenih polariteta Q za mrežu na slici 10.7 dobiju se (ako je $Q_0 = 0$) slijedeće jednadžbe



Sl. 10.7. Elektrostatska mreža zadana naponima izvora i kapacitetima kondenzatora.

Za čvor

$$\begin{aligned} 1 \dots Q_1 + Q_6 - Q_5 &= 0 \\ 2 \dots -Q_1 + Q_2 - Q_3 &= 0 \\ 3 \dots Q_5 - Q_4 + Q_3 &= 0 \end{aligned}$$

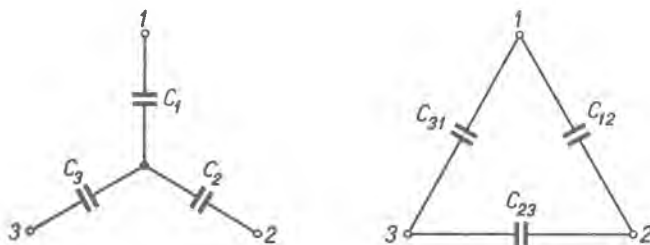
a za konture

$$\begin{aligned} \text{I} \dots E_1 &= \frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_6}{C_6} + \frac{Q_1}{C_1} \\ \text{II} \dots -E_2 &= -\frac{Q_1}{C_3} - \frac{Q_4}{C_4} - \frac{Q_2}{C_2} \\ \text{III} \dots E_3 &= \frac{Q_5}{C_5} + \frac{Q_6}{C_6} + \frac{Q_4}{C_4} \end{aligned}$$

Nakon određivanja naboja Q_i iz ovih jednadžbi odrede se naponi na kondenzatorima

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1}; \quad U_2 = \frac{Q_2}{C_2}; \quad U_3 = \frac{Q_3}{C_3} \quad \text{itd.}$$

Kao što smo pri linearnim strujnim mrežama na osnovi Kirchhoffovih zakona izveli još razne teoreme za rješavanje tih mreža, tako se i kondenzatorski elektro-



Sl. 10.8. Kondenzatori spojeni u zvijezdu i trokutnom spoju.

statski krugovi mogu rješavati odgovarajuće modificiranim teoremima. Tako je npr. Millmanov teorem za kondenzatorske mreže formuliran jednadžbom

$$U_{ab} = \frac{\sum E_i \cdot C_i}{\sum C_i}$$

pri čemu su vodljivosti u granama strujnih mreža zamijenjene kapacitetima u granama elektrostatskih mreža.

Sličnim razmatranjem dobiju se i jednadžbe za transformaciju spoja u zvezdu u trokutni spoj i obratno, na osnovi oznaka na slici 10.8

$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12} \cdot C_{31}}{C_{23}}$$

$$C_{23} = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$C_2 = C_{23} + C_{12} + \frac{C_{23} \cdot C_{12}}{C_{31}}$$

$$C_{31} = \frac{C_3 \cdot C_1}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$C_3 = C_{31} + C_{23} + \frac{C_{31} \cdot C_{23}}{C_{12}}$$

10.2.

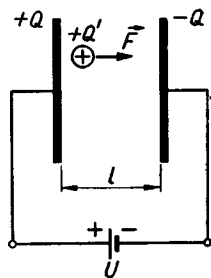
HOMOGENO ELEKTRIČKO POLJE

10.2.1. Električko polje pločastog kondenzatora. U prijašnjim izlaganjima vidjeli smo da su kondenzatorski krugovi samo kratko vrijeme protjecani strujom i to dok se kondenzator nabija, a kad se postigne ravnoteža aktivnih napona istosmjernih izvora i protunapona na kondenzatorima, onda prestaje gibanje električkih naboja (električne struje) i stanje u takvim kondenzatorskim krugovima ostaje trajno nepromijenjeno — statičko.

Iako prividno nema više nečeg novog u ovakvim uređajima, jer nema dinamike, ipak se i u statičkim prilikama, baš u izolacionom prostoru između dva suprotno nabijena tijela, mogu otkriti zanimljive fizikalne pojave, koje su od osobite važnosti kako za praktičku, tako i za teoretsku elektrotehniku.

Daljnja razmatranja provodit ćemo opet najprije na pločastom kondenzatoru zbog najpravičnijih prilika i prema tome najjednostavnijih odnosa među pojedinim veličinama.

Kao izolator među pločama pretpostavit ćemo vakuum, pa kako vakuum nema slobodnih električkih čestica, neće pod utjecajem napona U između ploča prolaziti struja. No ako bismo u taj prostor između ploča doveli neki električki naboj $+Q'$, slika 10.9, vidjeli bismo da će taj naboj biti izvrnut sili F , jer na nj djeluju naboji koji se nalaze na pločama nabijenog kondenzatora.



Sl. 10.9. Sila F na pokusni naboj u polju pločastog kondenzatora.

Uvedeni naboj $+Q'$ zove se pokusni naboj i njega će pozitivni naboj $+Q$ lijeve ploče odbijati, a negativni naboj $-Q$ desne ploče privlačiti. U rezultatu se oba učinka zbrajaju i sila F na $+Q'$ bit će usmjerena od pozitivne ploče kondenzatora prema negativnoj ploči.

Vidimo da je taj prostor među nabijenim pločama u nekom napetom energetskom stanju, jer su u njemu dovedeni naboji izvrnuti mehaničkim silama, pa taj prostor nazivamo električkim poljem.

Općenito se električkim poljem naziva prostor u kojem na mirujuće električke naboje djeluju mehaničke sile. Te se sile pojavljuju uvijek kad u izoliranom prostoru postoje konstantni naponi, dakle potencijalne razlike među pojedinim točkama.

Ako je to polje nastalo zbog napona koje su stvorili naboji u mirovanju, dakle bez pojave električne struje, onda se to električko polje posebno označuje kao elektrostatsko polje.

Na osnovi pokusa i točnih mjerenja konstatirano je da je sila F na pokusni naboj u električkom polju između ploča pločastog kondenzatora na svakom mjestu jednaka. Takvo polje naziva se homogeno električko polje, za razliku od nehomogenih polja, gdje se prostorno od točke mijenja sila F . Detaljnija analiza općenitijih nehomogenih polja bit će lakše shvatljiva tek kad upoznamo prilike u homogenom polju. Zato ćemo obratiti pažnju najprije na homogeno polje pločastog kondenzatora.

10.2.2. Jakost električkog polja. Silu F u promatranom homogenom polju možemo odrediti baš na osnovi energetske odnosa između električkih i mehaničkih veličina, koje imamo ako se pokusni naboj $+Q'$ pomakne pod utjecajem sile F od pozitivne ploče kondenzatora do njegove negativne ploče.

Ovo gibanje naboja pod djelovanjem konstantne sile F na putu l predstavlja s jedne strane rad

$$A = F \cdot l$$

koji je izvršen od strane energije električkog polja u prostoru od pozitivne do negativne ploče, među kojima postoji potencijalna razlika jednaka naponu U . Kako pak s druge strane predstavlja gibanje električkog naboja Q' električnu struju, možemo s obzirom na osnovnu relaciju za električku energiju $W = U \cdot I \cdot t = U \cdot Q'$ reći da je rad A dobiven utroškom energije W . Dakle je $A = W$ ili

$$F \cdot l = U \cdot Q'$$

Oдавде slijedi da je sila F jednaka

$$F = Q' \cdot \frac{U}{l}$$

Ova jednadžba kaže da sila F ovisi s jedne strane o veličini slučajno odabranog pokusnog naboja Q' , no ona ovisi i o veličinama U i l , koje su vezane na sam kondenzator u čijem je izolacionom prostoru stvoreno električko polje. Smatramo, dakle, da električko polje kondenzatora sa svoje strane baš faktorom U/l određuje silu F , pa zato se

$U/l = E$ zove jakost električkog polja pločastog kondenzatora.

Kako je sila F na stalni naboj $+Q'$ na svakom mjestu ovoga polja konstantna, i jakost polja E u prostoru između ploča pločastog kondenzatora je konstantna.

Supstitucijom izraza $E = U/l$ može se sila prikazati jednadžbom

$$F = Q' \cdot E$$

a budući da je sila vektorska veličina, moramo i veličinu E , tj. jakost električkog polja, smatrati vektorom i gornju jednadžbu pisati vektorski

$$\mathbf{F} = Q' \cdot \mathbf{E}$$

Smjer vektora $\mathbf{E}$ u nekoj točki električkog polja je prema tome onaj smjer u kojem djeluje sila na pozitivni električki naboj unesen u tu točku polja.

Na osnovi ove jednadžbe može se jakost električkog polja $\mathbf{E}$ posve općenito definirati kao kvocijent sile $\mathbf{F}$ i pokusnog naboja $+ Q'$, koji je pod utjecajem električkog polja izvrnut baš sili $\mathbf{F}$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q'}$$

a to znači da je jakost električkog polja numerički jednaka sili na jedinicu električkog naboja. No pri mjerenju se to ne smije doslovno shvatiti. Kad bismo, naime, htjeli silom na jedinični naboj (a to je na jedan kulon ili ampersekundu) mjeriti jakost nekog električkog polja, taj bi naboj od jednog kulona uveden u električko polje potpuno promijenio prvotno polje koje želimo mjeriti. Zato treba shvatiti E kao silu na jedinični naboj samo računski, a provoditi mjerenje sa što manjim pokusnim nabojem Q' . Ispravnija jednadžba za E glasi, dakle

$$\mathbf{E} = \lim_{Q' \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{Q'}$$

Iz jednadžbe koja kaže da je jakost električkog polja pločastog kondenzatora jednaka $E = U/l$ slijedi da je jedinica za mjerenje jakosti električkog polja jednaka

$$\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

što znači da je jakost polja numerički jednaka naponu koji otpada na jedinicu dužine između ploča pločastog kondenzatora.

Prema tome će jakost električkog polja, te sila na naboj koji se nalazi u tom polju, biti veći ako sav napon djeluje na kraćem razmaku. Napon od npr. 100 V stvara na razmaku $l = 1 \text{ m}$ jakost polja 100 V/m , a na razmaku $l = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ jakost polja je

$$\frac{100}{10^{-3}} = 100.000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Ista jedinica za mjerenje veličine E dobila bi se i jednadžbom $E = F/Q'$. Ako za F i Q' uvrstimo njihove jedinice, dobivamo

$$\frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{VA}}{\text{m}} : \text{As} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Za homogeno električko polje pločastog kondenzatora u vakuumu može se jakost električkog polja E prikazati na još jedan način, tj. da u jednadžbu $E = U/l$ uvrstimo za U izraz dobiven iz $Q = C \cdot U$, uz istovremenu primjenu jednadžbe

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{l}$$

$$E = \frac{U}{l} = \frac{1}{l} \cdot \frac{Q}{C} = \frac{1}{l} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0 \frac{S}{l}} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma$$

Prema tome je E za pločasti kondenzator u vakuumu direktno proporcionalno gustoći naboja na pločama kondenzatora

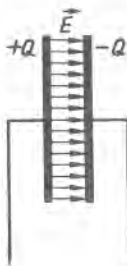
$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

a obrnuto proporcionalno dielektričkoj konstanti ϵ_0 . Osim toga je

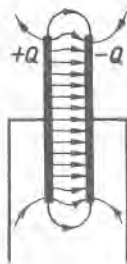
$$\sigma = \epsilon_0 \cdot E$$

Ovi izvodi pokazuju da uzrokom stvaranja električkog polja možemo, kako je već spomenuto, smatrati bilo napon među pločama, bilo naboje koji se nalaze na pločama. To je i samo po sebi razumljivo, jer ako postoji među pločama napon one posjeduju naboje, a ako posjeduju naboje, ploče su pod naponom.

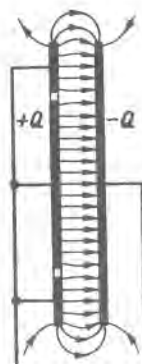
10.2.3. Silnice električkog polja. Prema Faradayu može se električko polje u pogledu jakosti polja E veoma zorno predočiti pomoću takozvanih silnica polja.



Sl. 10.10. Idealizirana slika silnica električkog polja pločastog kondenzatora.



Sl. 10.11. Razdioba silnica električkog polja pločastog kondenzatora u naravi.



Sl. 10.12. Pločasti kondenzator sa zaštitnim prstenima.

Te silnice su u mislima stvorene linije koje nam svojim prolaskom daju točan podatak o vektoru jakosti polja E u svakoj točki polja, bilo ono homogeno ili nehomogeno.

Ovo karakteristično svojstvo silnica bit će ostvareno ako su one crtane tako da je njihova gustoća u svakoj točki polja proporcionalna veličini vektora E , a da im se smjer poklapa sa smjerom vektora E . Pri tome se dogovorom pretpostavlja da je smjer vektora E jednak smjeru sile na pozitivni pokusni naboj Q' .

Za homogeno električno polje pločastog kondenzatora, gdje je jakost električkog polja u svakoj tački prostora među pločama jednaka i usmjerena od pozitivne ploče prema negativnoj, bit će silnice usporedni pravci jednake gustoće — dakle ekvidistantni pravci — koje crtamo tako da okomito izlaze iz pozitivne ploče, a ulaze okomito u negativnu ploču kondenzatora, slika 10.10.

Ovakva slika polja pločastog kondenzatora nešto je idealizirana, jer električno polje kondenzatora nije u naravi sadržano u točno omeđenom prostoru između ploča, već se nešto proširuje i izvan toga prostora, a na rubovima se nešto iskrivljuje. Slika 10.11 prikazuje kako električno polje pločastog kondenzatora izgleda u naravi.

No moguće je ostvariti i gotovo potpuno homogeno polje pločastog kondenzatora, ako se uzmu okrugle ploče kondenzatora i oko njih stave zaštitni prsteni, slika 10.12. U tom će slučaju nehomogenost polja preuzeti zaštitni rubni prsteni, a sredina će imati potpuno homogeno polje.

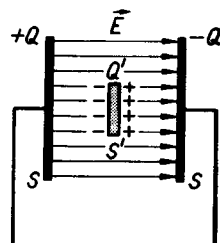
Ako se u električno polje stavi negativni električki naboj, $-Q'$, na nj će djelovati sila u smjeru koji je suprotan odabranom pozitivnom smjeru električkog polja.

10.2.4. Sile električkog polja na električke naboje, električka influencija.

Budući da na električke naboje koji se nalaze u električkom polju djeluju sile, opazit će se učinak tih sila i na elementarnim električkim česticama materije kad se ona nalazi u električkom polju. To djelovanje električkih sila ispoljit će se, međutim, na električki dobro vodljivoj materiji drugačije nego na izolatorima.

Stavimo li u električno polje pločastog kondenzatora električki vodljivo npr. metalno tijelo, na pozitivne jezgre atoma djelovati će sila u smjeru jakosti električkog polja, dok će na negativne elektrone sila djelovati u suprotnom smjeru. Budući da su u električki vodljivom metalu slobodni elektroni lako gibljivi oni će se pomaknuti pod utjecajem sila električnog polja na onaj dio tijela koji je okrenut prema pozitivnoj ploči kondenzatora, pa će tako taj dio postati negativno električan, dok će suprotni dio, okrenut prema negativnoj ploči kondenzatora, zbog odlaska slobodnih elektrona postati pozitivno električan. Ta pojava naziva se električna influencija, a spomenuta je već pri serijskom spajanju kondenzatora.

Izolacioni materijali također su sastavljeni od atoma u kojima oko pozitivne jezgre kruže negativni elektroni, no tamo nema elektrona koji su slobodno gibljivi, pa se pri umjerenim jakostima polja ne mogu odijeliti od svoje jezgre i premjestiti na drugo mjesto, jer ih jezgra drži čvrsto uza se. Ipak će pod utjecajem sile F nastati unutar atoma izvjesni pomak elektrona od atomske jezgre, zbog čega dolazi do polarizacije izolatora. Ta pojava bit će još detaljno objašnjena.



Sl. 10.13. Influenciono djelovanje električkog polja.

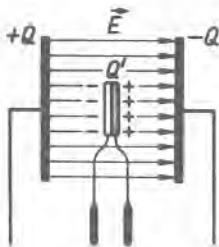
Ako jakost vanjskog električkog polja preraste unutarnju električku silu kojom jezgra privlači elektrone, odvojit će se neki elektroni od jezgre, pa se mogu slobodno gibati. Time izolator postaje električki vodljiv i kažemo da je izolator probijen.

Influenciono djelovanje električkog polja bit će to jače što je jače električko polje u kojem se nalazi metalni predmet. Kao mjera za ovo influenciono djelovanje služi količina naboja koji se influencijom pojavljuju na jedinici površine mjerne metalne pločice, stavljene na promatranom mjestu električkog polja, slika 10.13. Ako je površina pločice S' , a količina naboja Q' , na jedinicu površine otpada Q'/S , a to je gustoća influenciranog naboja.

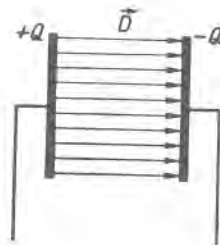
Međutim će na jednom te istom mjestu električkog polja ta gustoća influenciranog naboja na pločici ovisiti i o položaju pločice u odnosu na smjer silnica električkog polja. Da bi se dobio točno definiran podatak o influenciranom djelovanju, treba pločicu postaviti površinom S' okomito na smjer električkog polja $\mathbf{E}$, jer je onda influencijski učinak najveći.

10.2.5. Vektor gustoće električkog pomaka. Zbog toga što u električkom polju učinak influencije ovisi o tome koji kut zatvara vektor polja $\mathbf{E}$ s površinom pločice, pripisujemo mjeri za influenciono djelovanje — a to je gustoća influenciranog naboja — vektorski karakter i označujemo je slovom $\mathbf{D}$. Tu veličinu zovemo vektorom gustoće električkog pomaka ili ukratko vektorom električkog pomaka, a naziv potječe odatle što su influencirani naboji nastali baš zbog pomicanja električkih naboja u električkom polju.

Iznos vektora $\mathbf{D}$ jednak je, dakle $D = Q'/S'$, a smjer mu je okomit na površinu S' , kad je ona u takvom položaju da se postiže maksimalna vrijednost gustoće influenciranog naboja.



Sl. 10.14. Mjerenje vektora $\mathbf{D}$ pomoću Maxwellovih ploča.



Sl. 10.15. Električko polje pločastog kondenzatora prikazano $\mathbf{D}$ linijama.

Ovo mjerenje veličine $\mathbf{D}$ provodi se pomoću Maxwellovih dvoploča. To su dvije vrlo tanke pločice na izoliranim dršcima, koje se stave u polje najprije zajedno dodirnite, a kad se pod utjecajem polja stvori na svakoj od njih influencirani naboj rastave se one još u polju i izvade iz njega, te se izmjeri količina slobodnog naboja Q' na jednoj ploči, sl. 10.14.

Da bi podaci o veličini $\mathbf{D}$ dobiveni ovakvim mjerenjem bili doista pouzdani, moraju Maxwellove pločice biti tanke, a za mjerenje nehomogenih polja i male površine, kako influencirani naboji ne bi poremetili prvotnu sliku električkog polja koje želimo ispitati.

Tako provedena mjerenja pokazuju da iznos vektora **D** ovisi direktno proporcionalno o jakosti električkog polja **E**, ali da ovisi i o vrsti izolacije u kojoj je stvoreno polje. U jednadžbi proporcionalnosti

$$D = x \cdot E$$

mora faktor proporcionalnosti x biti veličina u vezi s izolacijom, koja će uzrokovati da njen umnožak s jakošću polja daje gustoću naboja, jer se vektor **D** mjeri gustoćom naboja As/m^2 . Dimenziona jednadžba za jedinicu ovog faktora x jeste, dakle

$$[x] = \frac{\text{As}}{\text{m}^2} : \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

a to je baš jedinica kojom se mjeri dielektrična konstanta ϵ . Pretpostavimo dakle da je $x = \epsilon$, a kako ovdje promatrano polje u vakuumu $x = \epsilon_0$, tada je

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}$$

Vektor električkog pomaka je prema gornjoj jednadžbi veličina proporcionalna vektoru jakosti polja, pa kao što je slikovito u električkom polju jakost polja prikazana linijama koje se nazivaju silnice, moguće je i veličinu **D** u električkom polju prikazati *D*-linijama.

Kako u ovim razmatranjima pretpostavljamo vakuum kao izolaciju, to je za sav prostor u kojem je stvoreno električko polje faktor proporcionalnosti ϵ_0 konstanta, pa će zato slika *D*-linija izgledati isto kao i slika *E*-linija. *D*-linije homogenog polja u vakuumu opet se ekvidistantni paralelni pravci, slika 10.15.

Prema tome izgleda kao da je nepotrebno uvoditi uz osnovnu veličinu **E** još i veličinu **D**, jer je moguće sve pojave u vezi s influencijom umjesto s vektorom **D** izraziti veličinom **E**.

No pri proračunavanju električkih polja u čijem se prostoru nalaze na pojedinim mjestima razne vrste izolacija, pokazalo se korisnim uz veličinu **E** imati još i veličinu **D**, jer je — kao što će kasnije biti izvedeno — omjer veličina **D** i **E** za razne vrste izolacije različit.

Ako nam je homogeno električko polje u vakuumu zadano vektorom jakosti polja **E** ili vektorom električkog pomaka **D**, možemo odrediti količinu influencijom stvorenog naboja na metalnoj plohi koja se nalazi u zadanom polju. Ukupna količina influenciranog naboja izračuna se, naime, kao umnožak gustoće naboja i površine

$$Q_t = D \cdot S = \epsilon_0 E \cdot S$$

Ta jednadžba vrijedi, međutim, samo onda ako nam S označuje površinu okomito postavljene plohe na smjer električkog polja, jer je prema definiciji veličina vektora *D* uvjetovana baš okomitim položajem mjerne plohe na smjer vektora **E**.

Ako bi, prema slici 10.16, ploha S_0 bila koso položena u odnosu na silnice, prema prirodi same pojave influencije u obzir dolazi kao efektivna površina samo ona koja se dobije kao projekcija plohe S_0 na ravninu okomitu na silnice. Projekcija od S_0 je $S_0 \cdot \cos \alpha$, pa je u tom slučaju

$$Q_i = D \cdot S_0 \cdot \cos \alpha$$

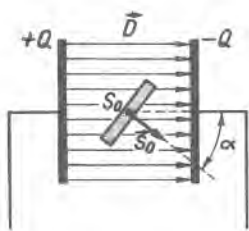
Ta jednadžba može se shvatiti i tako da se faktor $\cos \alpha$ pridruži veličini D , pa onda $D \cdot \cos \alpha$ predstavlja komponentu vektora $\mathbf{D}$ u smjeru normale na površinu S_0 . Dakle

$$Q_i = D \cos \alpha \cdot S_0 = D_n \cdot S_0$$

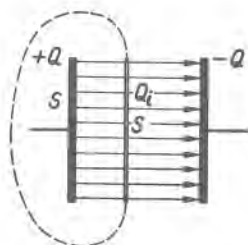
Ako nadalje zamislimo i površinu S_0 nadomještenu vektorom S_0 čija je duljina jednaka površini S_0 , a u smjeru normale na plohu S_0 , onda nam umnožak $D \cdot S_0 \cdot \cos \alpha$ predstavlja takozvani skalarni produkt vektora $\mathbf{D}$ i vektora $\mathbf{S}_0$, koji se označuje $\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}_0$, pa je

$$Q_i = \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}_0$$

Pogledajmo nadalje u kojem su međusobnom odnosu električki naboji Q na kondenzatorskim pločama i naboji Q_i stvoreni influencijom u električkom polju kondenzatora.



Sl. 10.16. Koso položena ploha u polju pločastog kondenzatora.



Sl. 10.17. Zatvorena ploha obavija pozitivnu ploču kondenzatora.

Za homogeno električko polje pločastog kondenzatora izračunali smo već prije da je gustoća naboja na pločama kondenzatora jednaka

$$\sigma = \epsilon_0 \cdot E$$

pa odavde vidimo da je gustoća influenciranog naboja na mjernim pločama D jednaka gustoći naboja na pločama kondenzatora koji su stvorili polje, $D = \sigma$.

Ako u promatrano polje okomito na silnice stavimo tanku metalnu ploču iste površine kao što je i površina ploča kondenzatora, slika 10.17, ukupni influencirani naboj na toj ploči na koju jedinu ulaze sve silnice polja bit će upravo jednak ukupnom naboju na ploči kondenzatora

$$Q_i = Q.$$

Možemo dapače zamisliti da je metalna ploha još proširena i izvan kondenzatora, te da se zatvara tako da obuhvaća cijelu pozitivnu ploču kondenzatora. Na cijeloj toj plohi bit će influencijom stvoreni naboj opet samo na onom dijelu gdje postoji polje E , a to je baš površina S , pa će sav influencirani naboj na takvoj zatvorenoj plohi opet biti jednak ukupnom naboju ploče kondenzatora, dakle naboju što ga ta zatvorena ploha obuhvaća. To je jedna od temeljnih spoznaja u vezi s influenciranjem naboja, koja se može posve općenito izraziti ovako: silnice električkog polja E , koje izlaze iz tijela nabijenog nabojem Q , influencirat će na svim prvotno neutralnim vodljivim tijelima, koja zaokružuju spomenuto tijelo, ukupni naboj koji je upravo jednak naboju Q .

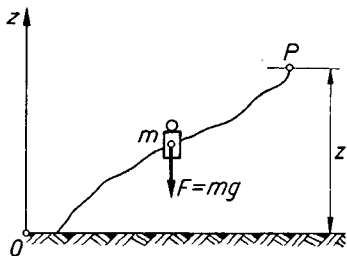
10.2.6. Tok vektora D . Kao što smo u slikovitoj predodžbi električkog polja vektore E i D prikazali linijama polja, moguće je i matematičkom izrazu skalar-nog produkta $D \cdot S$ dati neko slikovito značenje.

Veličini D odgovara naime gustoća linija, a umnožak $D \cdot S$ predstavlja onda ukupan broj linija koje »prolaze« kroz površinu S . Taj umnožak naziva se »tok« vektora D kroz površinu S i označuje slovom Ψ

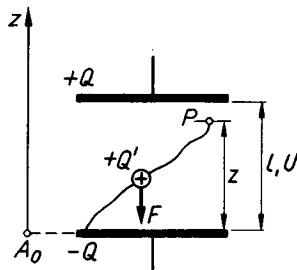
$$\Psi = D \cdot S = D \cdot S \cdot \cos \alpha$$

Prema prijašnjim izvodima tok Ψ vektora D kroz površinu S skalarna je veličina i jednak je naboju influenciranom na plohi S , a ako je ta ploha zatvorena, onda je tok ujedno jednak obuhvaćenom naboju koji se nalazi unutar zatvorene plohe.

10.2.7. Električki potencijal. Pri daljnjem razmatranju prilika u električkom polju vidjet ćemo da važnu ulogu ima fizikalna veličina koja se naziva električni potencijal. Kao pomoćna računaska veličina bio je potencijal već uveden u analizi električkih strujnih krugova, no njegovo će se pravo značenje vidjeti tek na osnovi određivanja energetske odnosa u električkom polju.



Sl. 10.18. Potencijalna energija mase m podignute na visinu z .



Sl. 10.19. Potencijalna energija naboja $+Q'$ u polju kondenzatora.

Radi lakšeg shvaćanja pojma potencijala ponovit ćemo na jednom primjeru iz mehanike što je to potencijalna energija. Zamislimo da se na slici 10.18 prikazani uteg mase m nalazi u početku na donjem nivou, koji uzimamo kao referentni, odakle

mjerimo vertikalno udaljenosti z . Ako taj uteg dignemo na visinu z do točke P , obavili smo pri tome pomicanju protiv sile teže $F = m \cdot g$ rad: $A' = m g z$. Taj rad je neovisan o obliku puta, ovisi samo o koordinatama početne i krajnje točke puta, jer u obzir dolazi samo put u smjeru sile F koja ima vertikalni smjer.

Izvršeni rad nije pri tom izgubljen, već je njegov ekvivalent sadržan u utegu kao potencijalna energija koja se može od utega dobiti natrag, ako se uteg pod utjecajem sile F vrati u početni položaj $z = 0$.

Ako je uteg već u početnom položaju posjedovao neku energiju A_0 , onda je ukupna potencijalna energija u točki P $A_p = A_0 + A'$

$$A_p = A_0 + m g z$$

Slične odnose imamo ako se pokusni naboj $+ Q'$ nalazi u homogenom električkom polju između ploča nabijenog kondenzatora. Ako apstrahiramo utjecaj sile teže i promatramo samo sile električkog polja, onda na $+ Q'$ djeluje u tom prostoru konstantna sila $F = Q' \cdot U/l$ u smjeru vektora $\mathbf{E}$, dakle na slici 10.19 prema donjoj negativnoj ploči.

Pomaknemo li taj naboj od negativne ploče na udaljenost z prema pozitivnoj ploči, mora se zbog protivljenja sile F potrošiti rad A' . Isto kao i u mehaničkom primjeru, ovaj rad ovisi samo o početnom i konačnom položaju naboja, a ne ovisi o obliku puta

$$A' = F \cdot z = Q' \cdot \frac{U}{l} \cdot z$$

Ako je u početnom položaju $z = 0$ naboj posjedovao već neku energiju A_0 , onda će u položaju z ukupna potencijalna energija biti

$$A_p = A_0 + Q' \cdot \frac{U}{l} \cdot z$$

Na osnovi ove jednadžbe vidi se da potencijalna energija ne ovisi samo o slučajno odabranom pokusnom naboju $+ Q'$, već je ovisna i o veličinama u električkom polju kondenzatora. Da bismo eliminirali Q' i time izdvojili samo taj faktor koji karakterizira polje kondenzatora, podijelit ćemo cijelu jednadžbu sa $+ Q'$, pa tako dobivamo veličinu φ koja je jednaka

$$\varphi = \frac{U}{l} \cdot z + \varphi_0$$

gdje smo označili

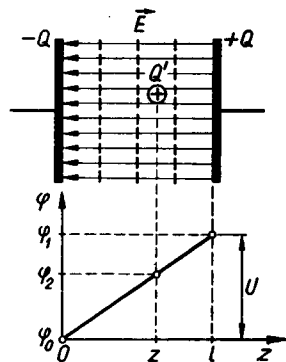
$$\varphi = \frac{A_p}{Q'} \quad \text{i} \quad \varphi_0 = \frac{A_0}{Q'}$$

Ovako dobivena veličina φ naziva se električki potencijal homogenog električkog polja, jer je upravo izvedena za polje pločastog kondenzatora. Pri tome naziv potencijal upućuje na to da je ta karakteristična veličina u vezi s potencijalnom energijom naboja u električkom polju.

Pogledajmo sada kako se mijenja potencijal od točke do točke u zadanom električkom polju, pa kao početnu uzмимо točku $z = 0$ na negativnoj ploči kondenzatora. Ta promjena jednaka je $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$, a kad u ovu jednadžbu uvrstimo za φ gornju vrijednost, dobivamo

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \left(\frac{U}{l} \cdot z + \varphi_0\right) - \varphi_0 = \frac{U}{l} \cdot z$$

Točke ovog električkog polja imaju, dakle, potencijale čija vrijednost u odnosu na referentni potencijal φ_0 negativne ploče kondenzatora ovisi linearno o koordinati z . Prema tome će sve točke koje imaju isti potencijal ležati u ravnini paralelnoj s kondenzatorskim pločama. Te ravnine nazivaju se ekvipotencijalne plohe. Na slici 10.20, koja prikazuje homogeno električko polje pločastog kondenzatora, projiciraju se ekvipotencijalne ravnine kao pravci okomiti na silnice polja. Može se, međutim, i posve općenito reći, da su u elektrostatskom polju ekvipotencijalne plohe okomite na silnice, ili, da su silnice toga polja ortogonalne trajektorije na ekvipotencijalne plohe. To slijedi i samo po sebi iz definicije energije, odnosno rada. Ako, naime, pomičemo naboj Q' po ekvipotencijalnoj plohi koja je okomita na jakost polja E odnosno silu F , onda se gibanje naboja vrši okomito na smjer sile, što znači da se ne vrši neki rad, pa prema tome potencijalna energija ostaje nepromijenjena ili, što je isto: vrijednost potencijala na toj plohi je konstantna.



Sl. 10.20. Ekvipotencijalne ravnine homogenog električkog polja.

10.2.8. Napon kao razlika električkih potencijala. Izračunamo li razliku potencijala među gornjom i donjom pločom kondenzatora dobivamo da je ta razlika jednaka

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = \left(\frac{U}{l} \cdot l + \varphi_0\right) - \varphi_0 = \frac{U}{l} \cdot l = U$$

jer je za gornju ploču $z = l$, a njezin potencijal $\varphi_1 = \frac{U}{l} \cdot l + \varphi_0$.

Oдавде se vidi da je razlika potencijala ovih ploča upravo jednaka naponu U koji vlada među pločama

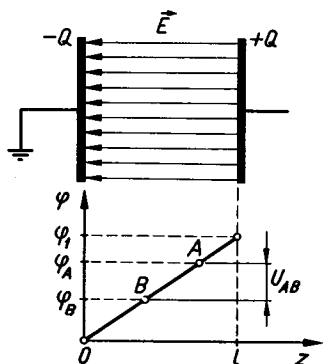
$$U = \varphi_1 - \varphi_0$$

Prema gornjem izvodu možemo, dakle, reći da nam nazivi »razlika potencijala među dvjema točkama« i »napon među dvjema točkama« predočuju u elektrostatskom polju jednu te istu električku veličinu. Tako je pojam napona, koji je prvotno bio uveden i objašnjen samo za dvije točke metalnih vodiča, proširen i sada se može primijeniti i na dvije točke u prostoru gdje uopće nema nekih vodiča.

Na primjer, za bilo koje točke A i B u polju, slika 10.21, čiji su potencijali φ_A i φ_B , napon koji vlada među tim točkama jednak je

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

Na osnovi jednadžbe $\varphi = (U/l) \cdot z + \varphi_0$, kojom je definiran potencijal, možemo zaključiti da potencijal promatrane točke nije neka apsolutna veličina, jer je njegova vrijednost određena relativno prema nekom po volji odabranom referentnom položaju u kojem naboju $+Q'$ posjeduje već neku početnu energiju A_0 . U našem razmatranju uzeli smo da je taj početni položaj negativna ploča kondenzatora koja ima, dakako, prema nekom »nultom položaju« potencijal φ_0 .



Sl. 10.21. Napon kao razlika potencijala u homogenom električkom polju.

Budući da nas u svim energetskim razmatranjima zanima uglavnom napon, a to je diferencija potencijala dviju točaka, ova neodređenost početnog potencijala ne ulazi u račun jer se φ_0 u razlici dvaju potencijala eliminira.

Ipak, da se dobije neki određeniji izraz za sam potencijal korisno je referentnoj točki pripisati vrijednost potencijala $\varphi_0 = 0$, a redovno se uzima da je to zemlja, pa tako računamo potencijale s obzirom na potencijal zemlje $\varphi_0 = 0$.

Uz ovu pretpostavku moguće je potencijal promatrane točke definirati kao napon što ga ima ta točka s obzirom na zemlju, jer je

$$U = \varphi - \varphi_0$$

pa uz $\varphi_0 = 0$ slijedi da je

$$\varphi = U$$

Oдавде vidimo da se potencijali mjere istom jedinicom (V) kao i naponi.

Dijagram na slici 10.20 prikazuje promjenu potencijala za homogeno polje pločastog kondenzatora, uz pretpostavku da je negativna ploča kondenzatora uzemljena, pa je njezin potencijal jednak nuli. Budući da potencijal raste linearno s udaljenošću z , bit će pozitivna ploča višeg potencijala nego negativna.

10.2.9. Rad pri gibanju električnog naboja u homogenom električkom polju. Pojam električnog potencijala izveden je na osnovu određivanja potencijalne energije koju posjeduje naboju $+Q'$ u električkom polju. Ako uzmemo u obzir jednadžbu $\varphi = A_p/Q'$ kojom je definiran potencijal, slijedi da je moguće potencijal, a i napon, brojčano definirati kao rad koji se izvrši pri pomicanju jedinичnog naboja od mjesta gdje je potencijal jednak nuli, do promatrane točke polja.

Taj rad smatramo pozitivnim ako sila polja vrši gibanje naboja, a to znači ako se troši energija polja, pri čemu se smjer sile poklapa sa smjerom gibanja. No ako bismo protiv sile F pomicali naboj za to bismo trošili energiju, pa radu pridajemo predznak minus, sl. 10.22.

Obavljeni rad (ili utrošena energija) računa se po jednadžbi

$$A = F \cdot l$$

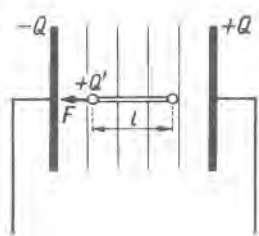
koja međutim, vrijedi, samo ako pravac smjera sile pada zajedno sa smjerom puta. Ukoliko bi se gibanje vršilo na putu koji zatvara sa smjerom sile kut α , treba umjesto punog iznosa sile F uzeti u račun samo komponentu sile u smjeru puta: $F \cdot \cos \alpha$, pa je tako prema slici 10.23.

$$A = F \cdot \cos \alpha \cdot l$$

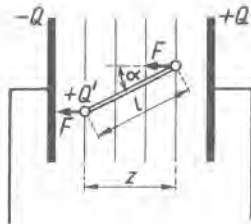
Smatramo li vektorom ne samo silu već i put (jer ima određeni smjer), tada gornja jednadžba predočuje skalarni produkt vektora F i l pa se može prikazati u obliku

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}$$

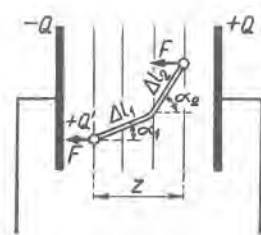
Ova jednadžba može se napisati i u obliku $A = F \cdot l \cos \alpha$, pa prema slici izlazi poznata jednadžba $A = F \cdot z$.



Sl. 10.22. Rad pri gibanju električnog naboja u električkom polju.



Sl. 10.23. Smjer sile zatvara sa smjerom gibanja kut α .



Sl. 10.24. Neovisno o obliku u elektrostatskom polju rad je određen koordinatama početne i krajnje točke puta.

Ako je put sastavljen od više dijelova, na primjer od dva dijela Δl_1 i Δl_2 koji nemaju isti smjer, bit će ukupni iznos rada (ili energije) jednak rezultanti pojedinih iznosa rada. Pri tome se zbog skalarnog karaktera rada rezultat dobiva kao obična algebarska suma pojedinih dijelova, sl. 10.24.

$$A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{l}_1 + \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{l}_2$$

ili

$$A = F \Delta l_1 \cos \alpha_1 + F \Delta l_2 \cos \alpha_2 = F(\Delta l_1 \cos \alpha_1 + \Delta l_2 \cos \alpha_2)$$

što je opet

$$A = F \cdot z$$

jer je

$$\Delta l_1 \cos \alpha_1 + \Delta l_2 \cos \alpha_2 = z$$

Neovisno o obliku puta rad je određen samo koordinatama početne i konačne točke puta, kako je već u uvodu spomenuto.

U općenitom slučaju, ako ima još više dijelova Δl , bit će

$$A = \sum \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{l}$$

a uz supstituciju

$$\mathbf{F} = Q \cdot \mathbf{E}$$

se dobiva

$$A = Q \cdot \sum \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{l}$$

Zamislimo sada da se naboj nakon što smo ga pomakli od negativne ploče kondenzatora u točku $P(z)$ vrati pod utjecajem sile polja natrag na isto početno mjesto, dakle na negativnu ploču. Opet je i pri povratku izvršen rad $A = F \cdot z$, samo što je sada sila F vršila taj rad na račun energije polja, dok smo pri gibanju od negativne ploče do $P(z)$ mi morali trošiti energije za svladavanje sile F . Obje količine rada su po iznosu jednake, samo imaju suprotne predznake, pa je ukupan rad koji je jednak algebarskoj sumi jednak nuli

$$A = 0$$

Ako se, dakle, u elektrostatskom polju naboj iz početnog položaja giba i vrati natrag u taj isti položaj, ukupni iznos rada jednak je nuli.

10.2.10. Potencijal i jakost elektrostatskog polja. Veza između skalara potencijala i vektora jakosti polja može se u homogenom električkom polju pločastog kondenzatora lako dobiti ako za obje ploče izrazimo s jedne strane napon kao diferenciju potencijala, te ako s druge strane uzmemo u obzir da je jakost polja jednaka kvocijentu napona i razmaka ploča. Iz

$$U = \varphi_1 - \varphi_0 \quad \text{ i } \quad E = \frac{U}{l}$$

slijedi

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{l}$$

Zbog linearnih odnosa u homogenom polju možemo umjesto cijelog napona na cijeloj duljini uzeti samo napon među bilo koje dvije ekvipotencijalne plohe s razmakom među njima, pa dobijamo brojčani iznos jakosti polja

$$E = \frac{\Delta U}{\Delta l} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta l}$$

Budući da je vektor E usmjeren od pozitivne ploče prema negativnoj (jer u tom smjeru djeluje sila F na $+Q'$), a jer potencijali rastu od negativne ploče prema pozitivnoj, smjer vektora E suprotan je smjeru porasta potencijala, pa je

$$\mathbf{E} = - \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$$

Na osnovi ove relacije možemo zaključiti da se napon između dvije točke, a to je razlika potencijala tih točaka u elektrostatskom polju, može izračunati kao umnožak jakosti polja s udaljenošću tih točaka, mjerene u smjeru jakosti polja. Dakle

$$\Delta U = \Delta\varphi = \mathbf{E} \cdot \Delta l$$

Za neki veći razmak l , koji je sastavljen od više dijelova Δl , bit će sav napon U jednak sumi svih pojedinih napona

$$U = \sum \Delta U = \sum \mathbf{E} \cdot \Delta l$$

10.3.

MATERIJA U ELEKTRIČKOM POLJU

10.3.1. Uvodna razmatranja. Da bi se pravilno shvatio utjecaj materije izolatora na prilike u električkom polju, potrebno je imati na umu da je sva materija osim od neutralnih čestica, neutrona, sastavljena i od elementarnih električnih čestica.

Električki vodljive materije, vodiči, su takve tvari koje posjeduju gibljive električke čestice, elektrone, i ione, čije usmjereno gibanje pod utjecajem jakosti električkog polja predstavlja ono što se naziva provodna električna struja. Takve su tvari uglavnom metali, te elektroliti i ionizirani plinovi.

Izolacioni materijali su, naprotiv, tvari koje nemaju slobodno gibljivih električkih čestica, pa zato se u idealnim izolatorima ne može ostvariti provodna struja. Dakako da idealnih izolatora nema, no električka vodljivost dobrih izolatora tako je mala da se može praktički zanemariti.

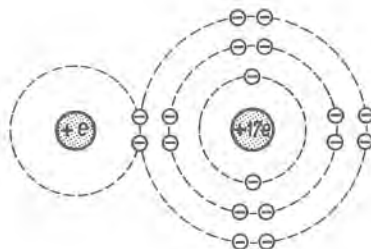
U daljnjim razmatranjima pretpostavit ćemo da su izolatori idealni, što znači da su u njihovim atomima i molekulama elementarne električki nabijene čestice međusobno čvrsto vezane unutarnjim električkim silama, pa se prema tome ne mogu odvojiti i slobodno gibati od jednog atoma k drugome.

Kako se normalno sva materija, pa i ona izolatora, očituje prema van kao neelektrična, zaključujemo da se u njoj nalazi jednaka količina pozitivnog i negativnog elektriciteta. Tu se međutim, izolacioni materijali mogu, podijeliti u dvije grupe. U jednoj su oni kod kojih u atomima i molekulama centar djelovanja negativnih elektrona pada zajedno sa centrom djelovanja pozitivnih naboja jezgre. Takav je npr. atom vodika, pa kisika, dušika, slika 10.25. U drugoj grupi su oni izolacioni

materijali kod kojih se centar djelovanja negativnih električkih naboja nalazi od centra djelovanja pozitivnih naboja razmaknut za neku udaljenost d . Kao primjer se može navesti molekula klorovodika HCl, što je prikazano na slici 10.26. Kovalentna veza obaju iona, atoma H i Cl uzrokuje nesimetričnu raspodjelu električkih



Sl. 10.25. Atom u kome centar djelovanja negativnih naboja pada zajedno sa centrom djelovanja pozitivnih naboja.

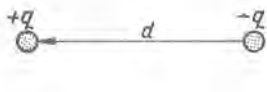


Sl. 10.26. Molekula klorovodika kao polarni dipol.

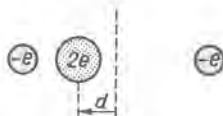
naboja u molekuli, te je tako centar ukupnog djelovanja pozitivnog elektriciteta u jezgri vodika, a centar ukupnog djelovanja negativnog električkog, naboja nešto odmaknut i nalazi se u centru atoma klora. Vidi se da je ukupni pozitivni naboj $+e$, a ukupni negativni naboj $-e$.

10.3.2. Električki dipoli i moment dipola. Dva jednaka električka naboja, a suprotnih predznaka razmaknuta na udaljenosti d , predstavljaju tzv. električni dipol, čija je os spojnica obaju naboja, a električki moment toga dipola jednak je umnošku naboja i njihova razmaka, slika 10.27.

$$p = q \cdot d = e \cdot d$$



Sl. 10.27. Uz definiciju električkog momenta dipola.



Sl. 10.28. U električkom polju inducirani dipoli.

Vidimo da su molekule izolatora druge vrste već zbog naravi svog sastava električki polarizirane, pa ih zato nazivamo polarnim. Ipak se prema van ne opaža ova električka polariziranost, jer se zbog kaotičnih termičkih oscilacija mnoštva tih dipola nađe uvijek uz pozitivni naboj jedne molekule negativni naboj neke druge molekule, pa se njihovi utjecaji prema van poništavaju.

Stavimo li sada izolator u vanjsko električko polje, pomaknut će se pod utjecajem djelovanja sila toga polja pozitivni naboji u atomima nešto u smjeru jakosti polja E , dok će se negativni naboji (elektroni) pomaknuti u suprotnom smjeru.

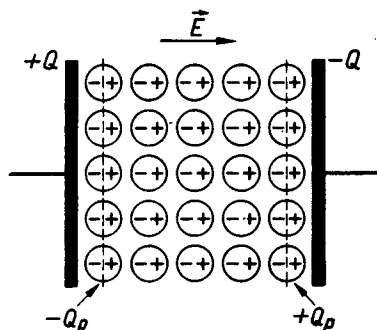
Pod utjecajem ovih sila postat će, dakle, i molekule one prve vrste, sl. 10.25 izolatora polarizirane, pa će se osi ovih »induciranih«, kao i osi dipola polarnih molekula, postaviti u smjer vektora jakosti vanjskog polja $\mathbf{E}$. Osim toga će se u polarnim molekulama nešto povećati razmak d dipola.

10.3.3. Električka polarizacija izolatora. Na slici 10.29 vidimo slikovito prikazano što se događa kada se u homogeno električko polje pločastog kondenzatora stavi umjesto vakuuma neki izolator. Električko polje $\mathbf{E}$ usmjeruje osi dipola u smjeru vektora $\mathbf{E}$, pa će se tako na ploči izolatora uz pozitivnu ploču kondenzatora pojaviti negativni polovi dipola, izolatora, a uz negativnu ploču kondenzatora pozitivni polovi dipola izolatora.

Iako je, dakle, u cjelini izolator neelektričan, imamo u ovom slučaju na jednoj njegovoj plohi istaknute negativne, a na suprotnoj plohi pozitivne električke naboje. Kažemo da je izolator električki polariziran.

Stepen električke polariziranosti nekog izolatora može se karakterizirati gustoćom stvorenog naboja na plohi polariziranog izolatora, σ_p . Ako je, dakle, površina ove plohe S , a ukupni naboj Q_p , onda je

$$\sigma_p = \frac{Q_p}{S}$$



Sl. 10.29. Materija izolatora u homogenom električkom polju.

Ispitivanja pokazuju da je polariziranost σ_p za one jakosti polja koje normalno dolaze u obzir proporcionalna jakosti električkog polja E , dakle

$$\sigma_p = \alpha \cdot E$$

Jedino bismo pri vrlo velikim jakostima polja $\mathbf{E}$ mogli zamisliti da više neće biti proporcionalnosti između σ_p i E , jer kada su već svi dipoli usmjereni, onda više neće povećanje jakosti polja povećati gustoću stvorenih naboja. Redovno bi to bile za uobičajene izolatore tako velike vrijednosti jakosti polja $\mathbf{E}$ kod kojih bi već prije došlo do proboga izolatora.

Budući da je veličina $\mathbf{E}$ vektor, pridaje se i polariziranosti izolatora vektorski karakter, pa se polarizacija izolatora često računa vektorom

$$\mathbf{P} = \alpha \cdot \mathbf{E}$$

10.3.4. Slobodni i vezani električki naboji. Uz pozitivnu ploču kondenzatora pojavit će se, dakle, na izolatoru negativni naboj, a uz negativnu ploču kondenzatora bit će na izolatoru pozitivni naboj. Naboji na plohama izolatora su vezani, dok su naboji na pločama kondenzatora slobodni. Razlika među njima je u tome da se pod utjecajem električkog polja slobodni naboji mogu gibati, dok se vezani

mogu tek malo elastično pomaknuti protiv unutarnjih atomskih, odnosno molekularnih električkih sila, te se vraćaju natrag u prvobitni položaj kad nestaje vanjskog električkog polja.

Zbog pojave vezanih naboja, koji se nalaze na izolatoru tik uz ploče kondenzatora, bit će dio slobodnog naboja na kondenzatoru u svom djelovanju kompenziran, jer je naboj polariziranog izolatora suprotan naboju koji se nalazi na ploči kondenzatora. Prisustvo materije izolatora bitno će, dakle, promijeniti prilike u električkom polju u odnosu na električko polje stvoreno samo u vakuumu.

Pri tom je moguće razmotriti dva različita slučaja:

- 1) Kondenzator je trajno priključen na stalni izvor napona $U = \text{konst.}$
- 2) Ploče kondenzatora su nabijene i odvojene od izvora, pa je tako naboj na pločama stalan, $Q = \text{konst.}$

Promotrimo najprije prvi slučaj. Stalni istosmjerni napon izvora stvorit će između ploča kondenzatora homogeno električko polje konstantne jakosti E , pa ono ostaje nepromijenjeno dok je napon nepromijenjen, i ne može se promijeniti niti onda ako se umjesto vakuuma stavi između ploča neki izolator. Imamo, dakle, $U = \text{konst}$ i $E = U/l = \text{konst.}$

Vezani naboji suprotnog polariteta na krajnjim plohama polariziranog izolatora žele smanjiti jakost električkog polja između ploča kondenzatora. Budući da se to u ovom slučaju ne može dogoditi jer napon izvora održava to polje konstantnim, bit će pločama kondenzatora iz izvora predano još upravo toliko dodatnih slobodnih naboja, koliko je potrebno da se kompenziraju u svom djelovanju polarizacijom stvoreni vezani naboji na izolatoru. Ukupni naboj na kondenzatoru bit će

$$Q = Q_0 + Q_p'$$

gdje su

Q - ukupni naboj na kondenzatoru uz prisustvo izolatora,

Q_0 - naboj na kondenzatoru ako je izolacija vakuum,

$Q_p' = -Q_p$ - dodatni naboj na ploči kondenzatora.

Ako se, dakle, među pločama nalazi neki izolator, kondenzator će na pločama umjesto gustoće $\sigma_0 = \epsilon_0 E$ imati gustoću slobodnog naboja $\sigma = \sigma_0 + \sigma_p$.

10.3.5. Susceptibilitet i dielektrička konstanta izolatora. Budući da je σ_p gustoća naboja mjerena u As/m^2 i jer je $\sigma_p = \alpha \cdot E$, mora i koeficijent α imati istu dimenziju As/Vm kao i dielektrička konstanta vakuuma ϵ_0 . Samo je, kako mjerenja pokazuju, α za različite izolacione materijale numerički različito od ϵ_0 . Može se, dakle, staviti $\alpha = \chi \cdot \epsilon_0$, gdje je χ bezdimenzionalan broj, a naziva se susceptibilitet promatranog izolacionog materijala. Prema tome je gustoća slobodnog naboja σ jednaka

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_p = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 \cdot (1 + \chi) \cdot E$$

ili

$$\sigma = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E = \epsilon \cdot E$$

gdje je sada ϵ dielektrička konstanta prisutnog izolacionog materijala. Veličina $\epsilon_r = 1 + \chi$ naziva se relativnom dielektričkom konstantom izolacionog materijala, jer je prema gornjoj definiciji

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

pa je

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

omjer dielektričke konstante promatranog materijala i dielektričke konstante vakuuma. ϵ_r je bezdimenzionalan broj.

Zbog porasta gustoće σ bit će uz prisustvo izolacionog materijala i količina privedenog naboja Q veća nego Q_0 , pa je

$$Q = \sigma \cdot S = E \cdot \epsilon \cdot S = \frac{U}{l} \cdot \epsilon \cdot S = U \cdot \epsilon \frac{S}{l} = U \cdot C$$

I u ovom slučaju vrijedi, dakle, osnovna jednadžba $Q = C \cdot U$, samo je sada

$$C = \epsilon \cdot \frac{S}{l} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{l} = \epsilon_r \cdot C_0$$

što znači da je kapacitet C kondenzatora s umetnutim izolatorom ϵ_r puta veći nego kapacitet C_0 kondenzatora s vakuumom među pločama.

Općenito za proračun kapaciteta pločastog kondenzatora vrijedi jednadžba

$$C = \epsilon_r \cdot \frac{S}{l}$$

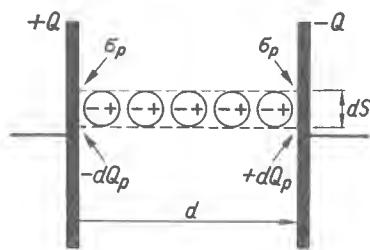
Na osnovi izvedenih relacija može se jednostavno mjerenjem odrediti vrijednost ϵ_r za razne izolacione materijale, jer je $\epsilon_r = C/C_0$, pa se zato u elektrotehnici redovno računa baš s veličinom ϵ_r , a ne sa χ , koja se češće koristi u fizici.

ϵ_r je za razne izolacione materijale različito, a u tablici su navedene orijentacione vrijednosti za neke materijale koji se češće upotrebljavaju u praksi.

Izolacioni materijali

Naziv	Relativna dielekt. konstanta ϵ_r	Dielektrička čvrstoća kV/mm	Naziv	Relativna dielekt. konstanta ϵ_r	Dielektrička čvrstoća kV/mm
Celuloid	7 - 9	20 - 30	Polivinilklorid	3,4	40 - 60
Izolac. lak	< 3,5	40 - 120	Staklo alkalično	4 - 12	10 - 45
Kvarc	~ 3,5	12 - 15			
Mramor	8 - 10	20 - 50	Tinjac	6 - 7	25 - 200
Papir u ulju	~ 4	50 - 60	Ulje (transf.)	2,4	8 - 20

Prema definiciji je relativna dielektrička konstanta vakuuma jednaka točno 1, a kako je ona za zrak jednaka 1,00058, dakle praktički gotovo jednaka kao i za vakuum, jednadžbe koje su izvedene za vakuum vrijede približno i za električna polja u zraku $\epsilon_{\text{zrak}} = \epsilon_0$. Upada u oči da čista voda ima naročito veliku dielektričku konstantu, jer je ϵ_r za vodu 81.



Sl. 10.30. Polarizacija izolatora prikazana kao moment po jedinici volumena.

Polarizacija izolatora u električkom polju može se osim gustoćom naboja σ_p izraziti na još jedan način. Ako, naime, izdvojimo u izolatoru, slika 10.30 jedan dio koji na dodirnoj plohi izolatora i kondenzatora ima površinu dS , onda je količina naboja polarizacije $dQ_p = \sigma_p \cdot dS$, pa je

$$\sigma_p = \frac{dQ_p}{dS}$$

ili

$$\sigma_p = \frac{dQ_p \cdot d}{dS \cdot d} = \frac{M}{V}$$

što znači da se formalno numerički polariziranost izolatora može izraziti kao električki moment promatranog volumena po jedinici volumena, $P = M/V$.

Materija izolatora svojim prisustvom u električkom polju kondenzatora koji je priključen na konstantni napon U uzrokuje, dakle, povećanje slobodnog naboja na pločama kondenzatora, kako bi jakost polja zadržala svoju vrijednost što je određuje napon U . Prema tome je $E = E_0$ ili

$$E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q_0}{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q - Q_p}{S}$$

Vidimo da je za određivanje jakosti polja mjerodavna prema gornjoj relaciji, kad računamo s dielektričkom konstantom vakuuma, ne sama količina slobodnog električkog naboja na pločama, već rezultatna količina koja se dobije ako od slobodnog naboja na ploči odbijemo zbog suprotnog djelovanja vezani naboj izolatora.

Ako pak umjesto faktora $1/\epsilon_0$ u jednadžbi za izračunavanje jakosti polja E uzmemo u obzir polarizaciju izolatora njegovom odgovarajućom dielektričkom konstantom $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$, onda je

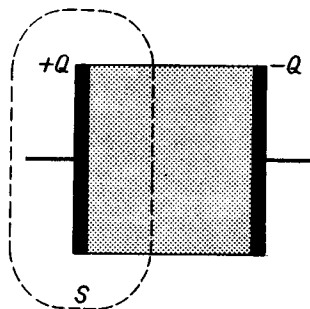
$$E = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{S}$$

što znači da tada u obzir dolazi slobodni naboj koji se doista nalazi na ploči kondenzatora.

10.3.6. Maxwellov postulat. Pogledajmo još kako prisustvo materije izolatora utječe na drugu osnovnu veličinu električkog polja, na vektor gustoće električkog pomaka D .

Prema definiciji je veličina D jednaka gustoći influenciranog naboja na površini vodiča, uvedenog u električko polje. Pokusi pokazuju da influencirani naboj ovisi samo o slobodnom naboju koji se nalazi na vodiču što stvara električko polje, a da vezani naboji na izolatoru ne utječu na veličinu D .

To je jedan od osnovnih zakona električkog polja, nazvan postulat Maxwella, a može se fizikalno objasniti na slijedeći način: Poznato je da je ukupna količina influenciranog naboja na zatvorenoj vodljivoj plohi jednaka ukupnom naboju sadržanom unutar volumena što ga zatvara promatrana ploha. Ako to primijenimo na pločasti kondenzator s materijalnim izolatorom, onda prema slici 10.31 vidimo da crtkano označena zatvorena ploha obuhvaća, osim slobodnog naboja na pozitivnoj ploči kondenzatora, još i materiju izolatora, čiji se pozitivni i negativni naboji međusobno količinski kompenziraju. Preostaje, dakle, kao rezultatni obuhvaćeni naboj samo slobodni naboj na ploči kondenzatora.



Sl. 10.31. Maxwellov postulat.

Odnos veličine D uz prisustvo materijalnog izolatora u električkom polju i veličine D_0 za vakuum dobije se na osnovu prijašnjih relacija. Znamo da je

$$D = \frac{Q}{S} = \frac{Q_0 + Q_p}{S} = \epsilon_0 E + \epsilon_0 E \cdot \chi = \epsilon_0 E \cdot (1 + \chi)$$

ili

$$D = D_0 \cdot \epsilon_r$$

pa je

$$\frac{D}{D_0} = \epsilon_r$$

10.3.7. Nabijeni kondenzator odvojen od izvora. Drugačije su prilike ako je kondenzator bio priključkom na izvor nabijen i onda odvojen od izvora. Tada ploče imaju određeni naboj Q_0 , koji se zbog principa konzervacije naboja neće promijeniti i ako umjesto vakuuma stavimo između ploča kondenzatora neki materijalni izolator, $Q = Q_0$.

Vezani naboji na polariziranom izolatoru smanjit će prvotnu jakost polja E_0 u vakuumu na iznos E , čija se vrijednost može odrediti jednadžbom

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{S}$$

a to je

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_0 - Q_p}{S} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} - \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \chi \epsilon_0 \cdot E = E_0 - \chi \cdot E$$

pa je

$$E(1 + \chi) = E_0 \quad \text{ili} \quad E \cdot \epsilon_r = E_0$$

i konačno

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

U vezi s ovim smanjivanjem jakosti polja smanjit će se i napon U među pločama od prvotne vrijednosti U_0 na

$$U = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

Budući da je pri stalnom naboju $Q = Q_0$ umetanjem izolatora napon smanjen od vrijednosti U_0 na $U = U_0/\epsilon_r$, time je kapacitet kondenzatora povećan od C_0 na C , pa je

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_0}{U_0/\epsilon_r} = \epsilon_r \cdot \frac{Q_0}{U_0} = \epsilon_r \cdot C_0$$

ili

$$C = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \frac{S}{l} = \epsilon \cdot \frac{S}{l}$$

Kako je u ovom slučaju naboj na pločama konstantan neovisno o vrsti izolatora, i vektor električkog pomaka D ostao je nepromijenjen, $D = D_0$.

Gornji izvodi mogu se ukratko rezimirati ovako: ako se vakuum (ili zrak) nadomjesti izolatorom relativne dielektričke konstante ϵ_r , onda se na pločama kondenzatora uz konstantnu jakost polja E (odnosno uz $U = \text{konst}$) povećavaju ϵ_r puta naboj Q i vektor D , dok se uz konstantno Q (odnosno uz $D = \text{konst}$) jakost polja E , a isto tako i napon U , ϵ_r puta smanjuje. Kapacitet C neovisno o uvjetu priključka kondenzatora postaje ϵ_r puta veći.

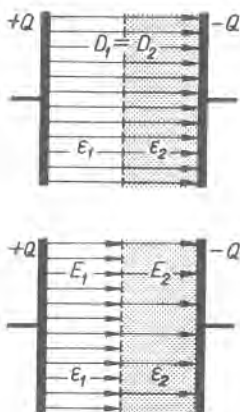
10.3.8. Višeslojna izolacija kondenzatora. Prostori elektrostatskih polja koja smo do sada razmatrali bili su potpuno ispunjeni jednom vrsti izolacije, pa je zato u svim jednadžbama kojima smo opisivali prilike u polju dolazila samo dielektrička konstanta upotrijebljene izolacije. Moguće je, međutim, izolacioni prostor ispuniti i s više raznih vrsta izolacija, pa treba i takve slučajeve pobliže ispitati i za njih postaviti odgovarajuće jednadžbe.

Pogledajmo prvo polje pločastog kondenzatora u kojem se nalaze dva sloja raznih izolacija smještenih prema slici 10.32 tako, da silnice prelaze kao u serijskom spoju iz jednog sloja u drugi. Dielektričke konstante tih slojeva neka su ϵ_1 i ϵ_2 . Kad je kondenzator nabijen, ispunjen je prostor između ploča tokom Ψ_D , čije linije izlaze iz pozitivne ploče i ulaze u negativnu, tako da tok ima u svakom poprečnom presjeku istu gustoću, pa je $D_1 = D_2$. Ako za gustoću uvrstimo izraz $D = \epsilon \cdot E$, može se ova jednadžba napisati u obliku $\epsilon_1 \cdot E_1 = \epsilon_2 \cdot E_2$, odakle slijedi

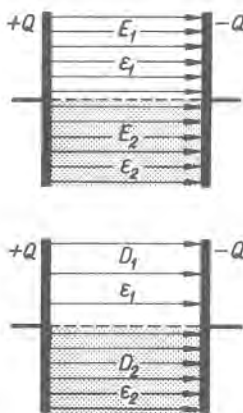
$$E_1 : E_2 = \epsilon_2 : \epsilon_1$$

To znači da jakost polja E u cijelom polju nije sada na svakom mjestu ista, već se jakosti polja pojedinih slojeva odnose obrnuto nego njihove dielektričke konstante. Prema tome će u onom izolatoru koji ima veću dielektričku konstantu jakost polja biti manja i obrnuto, izolator s manjom dielektričkom konstantom imat će veću jakost polja.

Za elektrotehničke konstrukcije ima ta pojava naročitu važnost. Ako se npr. u izolacionom prostoru uz sloj zraka nalazi još serijski postavljen sloj kojeg drugog izolatora, npr. tinjca, bit će sloj zraka izvrnut povećanom električkom naprežanju, što se ne bi dogodilo da tinjca nema. Relativna dielektrička konstanta zraka je naime 1, a tinjca oko 6, pa je $E_{\text{zraka}} = 6 \cdot E_{\text{tinjca}}$, zbog čega može doći do električkog proboja zraka, koji ima manju električku čvrstoću nego tinjac.



Sl. 10.32. Dva različita izolatora u serijskom spoju.



Sl. 10.33. Dva različita izolatora u paralelnom smještaju.

Ako su razne vrste izolacija u polju pločastog kondenzatora postavljene s obzirom na smjer električkog polja paralelno jedna uz drugu tada, kako vidimo na slici 10.33, u jednom i drugom sloju vlada između ploča isti napon, pa je i jakost polja $E = U/l$ u oba sloja ista. No kako je općenito električka gustoća $D = \epsilon \cdot E$, bit će ona u pojedinim slojevima različita i ovisna o dielektričkim konstantama. Iz

$$D_1 = \epsilon_1 \cdot E \quad \text{i} \quad D_2 = \epsilon_2 \cdot E$$

slijedi

$$D_1 : D_2 = \epsilon_1 : \epsilon_2$$

Na slikama 10.32 i 10.33 prikazane su linije E i D i pripadni dijagrami za oba karakteristična načina složenih izolacija, a kao primjer uzeli smo da je $\epsilon_1 : \epsilon_2 = 1 : 2$.

Kondenzator u čijem se razmaku ploča l nalaze dvije različite vrste izolacije možemo zamisliti kao serijski spoj dvaju kondenzatora, od kojih jedan ima na razmaku l_1 dielektričku konstantu ϵ_1 , a drugi odgovarajuće l_2 i ϵ_2 . Kapacitet takvog kondenzatora izračunava se prema poznatoj jednadžbi $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$

$$\frac{1}{C} = \frac{l_1}{\epsilon_1 S} + \frac{l_2}{\epsilon_2 S} = \frac{\epsilon_2 \cdot l_1 + \epsilon_1 \cdot l_2}{\epsilon_1 \epsilon_2 \cdot S}$$

pa je

$$C = S \cdot \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{\epsilon_2 \cdot l_1 + \epsilon_1 \cdot l_2}$$

Pretpostavimo li da je kondenzator prvotno imao zrak kao izolaciju ($\epsilon_1 = \epsilon_0$) na cijelom razmaku l , tada je uz napon U jakost polja bila $E_0 = U/l$, odnosno $U = E_0 \cdot l$.

Umetanjem sloja izolacije ϵ_2 , l_2 promijenile su se prilike u kondenzatoru pa je sada

$$U = E_1 \cdot l_1 + E_2 \cdot l_2 = E_1 \cdot l_1 + E_1 \cdot \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot l_2$$

ili

$$U = E_1 \cdot \frac{\epsilon_2 \cdot l_1 + \epsilon_1 \cdot l_2}{\epsilon_2}$$

odakle slijedi

$$E_1 = U \cdot \frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 \cdot l_1 + \epsilon_1 \cdot l_2}$$

i analogno

$$E_2 = U \cdot \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 \cdot l_1 + \epsilon_1 \cdot l_2}$$

U odnosu na prvotnu jakost polja E_0 dobivamo

$$E_1 = \frac{U}{l} \cdot \frac{\epsilon_2 \cdot l}{\epsilon_2 \cdot l_1 + \epsilon_1 \cdot l_2} = E_0 \cdot \frac{l}{l_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot l_2}$$

i analogno

$$E_2 = E_0 \cdot \frac{l}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot l_1 + l_2}$$

Na sličan način dobili bismo jednadžbe i za više različitih izolacija.

Iz prijašnjih slika vidimo da linije D prolaze kroz plohu na granici dvaju izolatora okomito bez ikakve promjene, pa zaključujemo da za električku gustoću vrijedi općenito da se njena normalna komponenta pri prolazu iz jednog sloja u drugi ne mijenja

$$D_{1n} = D_{2n}$$

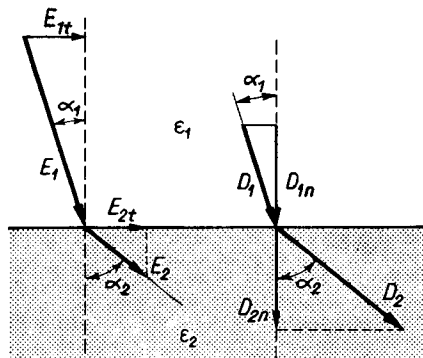
Na slikama vidimo i to da se u tangencijalnom smjeru s obzirom na graničnu plohu ništa ne mijenja tok linija E , pa posve općenito zaključujemo da pri prijelazu iz jednog sloja u drugi tangencijalna komponenta vektora jakosti polja ostaje nepromijenjena

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Naprotiv, na prijelazu iz jednog sloja u drugi, obzirom na graničnu plohu, promijenit će se normalna komponenta vektora E i tangencijalna komponenta vektora D .

Na osnovi ovih izvoda zaključujemo da će pri prijelazu električkog polja iz jednog izolacionog sloja u drugi, ako linije polja udaraju na graničnu plohu koso, doći do loma silnica. Iz prije izvedenih odnosa, uz pomoć slike 10.34, možemo odrediti pravilo loma silnica.

Označimo sve veličine koje pripadaju jednom izolacionom sloju indeksom 1, a one drugog izolacionog sloja indeksom 2. Ako silnice, tj. linije vektora E i D u sloju 1, zatvaraju s normalom na graničnu plohu kut α_1 , doći će do loma tih linija, pa će u sloju 2 taj kut biti α_2 .



Sl. 10.34. Prijelaz električkog polja iz jednog izolacionog sloja u drugi.

Prije izvedene jednadžbe primijenjene na našu sliku 10.34 glase sada

$$D_1 \cdot \cos \alpha_1 = D_2 \cdot \cos \alpha_2$$

i

$$E_1 \cdot \sin \alpha_1 = E_2 \cdot \sin \alpha_2$$

odakle dijeljenjem dobivamo

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_2 \cdot D_1}{E_1 \cdot D_2}$$

a supstitucijom $D = \epsilon E$ za oba izolatora dobivamo konačno zakon loma

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

10.4. NEHOMOGENO ELEKTRIČKO POLJE

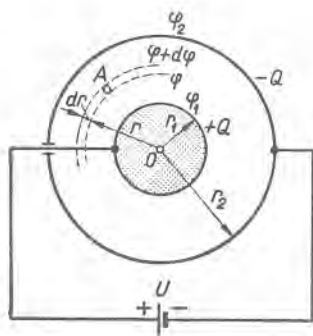
10.4.1. Osnovna razmatranja. Električko polje u kojem se jakost polja E mijenja od točke do točke naziva se nehomogeno polje. Osnovne veličine električkog polja, njihove definicije i jednadžbe koje prikazuju njihove međusobne odnose, a izvedene su za homogeno polje, zadržavaju u biti svoju vrijednost i pri nehomogenim elektrostatskim poljima, jer su te jednadžbe zapravo zakoni proporcionalnosti među promatranim veličinama. Samo treba uzeti u obzir da se u nehomogenom polju te veličine prostorno mijenjaju od točke do točke, pa se na takva polja ne mogu bez daljnijega primijeniti jednadžbe koje su izvedene i vrijede za prostore konačnih dimenzija.

Ako se, međutim, u nehomogenom polju izdvoji jedan infinitezimalno mali dio, može se pretpostaviti da se unutar tog sitnog djelića prostora električne veličine tako malo mijenjaju da smijemo taj dio smatrati homogenim, pa se na nj mogu onda primijeniti jednačbe dobivene za homogeno polje.

Za bilo kakvo nehomogeno polje dobiju se time samo općenite jednačbe kojima su povezane veličine električkog polja, a tek je u nekim specijalnim slučajevima moguće iskoristiti ove općenite jednačbe da se dobiju gotovi analitički izrazi za proračun tih polja. Tako se relativno lako mogu matematički riješiti centrično i aksijalno simetrična prostorno nehomogena polja.

10.4.2. Kuglasti kondenzator. Kao prvo razmatrat ćemo centralno simetrično nehomogeno polje kuglasta kondenzatora.

Kuglasti kondenzator sastavlja se tako da se, kako pokazuje slika 10.35, dvije kugline plohe smjeste koncentrično jedna unutar druge. Radijus manje, unutarnje kugle, je r_1 , a veće, vanjske, r_2 , pa je unutarnja površina $4 \cdot r_1^2 \cdot \pi$, a vanjska $4 \cdot r_2^2 \cdot \pi$. Kad se kugle priključe na izvor napona U stvorit će se u izolacionom prostoru među njenim ploham električko polje, no kako ovdje plohe nisu jednakih površina, bit će to polje nehomogeno.



Sl. 10.35. Kuglasti kondenzator.

Svaka metalna kugla ima po cijeloj svojoj površini isti potencijal kao i stezaljka izvora na koju je kugla priključena, jer promatramo stanje statičke ravnoteže naboja, dakle stanje kad su naboji Q na metalnim površinama u mirovanju. Prema tome kugle predstavljaju dvije ekvipotencijalne plohe, pa je između njih napon U jednak

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

Unutar ovih ploha možemo zamisliti da će zbog centralno simetrične konstrukcije i ostale ekvipotencijalne plohe u polju biti koncentrične kugle.

Na slici 10.35 su prikazane dvije takve ekvipotencijalne kugline plohe, jedna po volji odabrana radijusa r , a druga radijusa $r + dr$, tako da je zbog koncentričnog smještaja okomiti razmak među njima dr na svakom mjestu isti. Označimo li potencijal jedne sa φ , a druge sa $\varphi + d\varphi$, tada je napon među njima $dU = d\varphi$.

Obje koncentrične kugline plohe su veoma blize, a na granici kad $dr \rightarrow 0$ smijemo pretpostaviti da su im površine jednake i polje među njima homogeno, pa možemo zato na njih primijeniti jednačbe izvedene za homogeno polje.

Tako će jednačba napona homogenog polja ravnog pločastog kondenzatora $U = (Q \cdot l) : (\epsilon_0 \cdot S)$ poprimiti ovdje oblik

$$dU = \frac{Q \cdot dr}{\epsilon_0 \cdot 4 \pi r^2}$$

ili

$$dU = \frac{Q}{4 \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2}$$

Ovdje je Q naboj koji predstavlja tok električkog pomaka kroz svaku kuglu, jer sve koncentrične kugle obuhvaćaju isti slobodni naboj koji je dobila priključkom na izvor napona unutarnja kugla. Kao izolator pretpostavljen je vakuum.

Na cijelom razmaku između unutarnje i vanjske metalne kugle kondenzatora vlada napon U , jednak sumi svih ovako zamišljenih diferencijalnih napona dU , koji su samo funkcije variable r . Ovo sumiranje svodi se na integriranje veličine dU unutar granica što ih određuju vanjska i unutarnja kugla

$$U = \int dU = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Ovaj izraz predstavlja za kuglasti kondenzator vezu napona s nabojem, pa se prema definiciji kapaciteta $C = Q/U$ ili $1/C = U/Q$ dobiva za taj kondenzator da je recipročna vrijednost kapaciteta

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$$

a sam kapacitet

$$C = 4 \pi \epsilon_0 \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

10.4.3. Kapacitet osamljene kugle. Može se zamisliti da je radijus vanjske kugle znatno veći od radijusa unutarnje kugle kondenzatora, $r_2 \gg r_1$. Onda se u preoblikovanoj jednadžbi kapaciteta

$$C = 4 \pi \epsilon_0 \cdot \frac{r_1}{1 - \frac{r_1}{r_2}}$$

može vrijednost r_1/r_2 zanemariti, pa se dobiva kapacitet kuglastog kondenzatora

$$C = 4 \pi \epsilon_0 \cdot R$$

u kojem je unutrašnja kugla radijusa $r_1 = R$, dok vanjsku kuglu predstavlja sav okolni prostor do u beskonačnu udaljenost.

Taj kapacitet često se naziva kapacitet osamljene kugle radijusa R , što ne smije zavesti na misao da ne postoji i druga kugla, samo što je njena ploha veoma udaljena, slika 10.36.

U nekoherentnom cgs sustavu jedinica, u kojem se nije obziralo na pravo značenje dielektričke konstante



Sl. 10.36. Osamljena kugla u prostoru.

vakuuma, te joj se svojevolumno pridala bezdimenzionalna vrijednost $1 : 4 \pi$, bila je ova jednađba temelj pri određivanju jedinice za mjerenje kapaciteta. Tamo je ta jedinica (prema gornjoj jednađbi) jednaka 1 cm, što nikako ne odgovara fizikalnoj stvarnosti, jer je kapacitet posve različita veličina od duljine. Kao kapacitet od 1 cm uzeto je da ima u vakuumu osamljena kugla radijusa 1 cm.

Kako još uvijek ima ponegdje kondenzatora kojima je kapacitet označen jedinicom cm, korisno je znati kako je povezana jedinica kapaciteta cm s jedinicom farad. Ta veza dobiva se ako se uzme u promatranje osamljena kugla radijusa 1 cm koja, kao što je rečeno, ima kapacitet 1 cm. Taj isti kapacitet izražen jedinicom farad dobiva se ako se u jednađbu $C = 4 \pi \epsilon_0 R$ uvrste vrijednosti

$$\epsilon_0 = 8,85416 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}, \quad R = 10^{-2} \text{ m}$$

pa uz približnu vrijednost

$$4 \pi \epsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \text{ As/Vm}$$

izlazi

$$C = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \text{ As/Vm} \cdot 10^{-2} \text{ m} = \frac{10}{9} \cdot 10^{-12} \text{ F} = \frac{10}{9} \text{ pF}$$

Dakle kapacitet od 1 cm odgovara kapacitetu 10/9 pF. Spomenimo još da npr. kugla Zemlje u odnosu na Svemir ima kapacitet

$$C_z = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \approx 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ F} = 700 \mu\text{F}$$

10.4.4. Jakost električkog polja kuglastog kondenzatora. Pogledajmo i ostale električke veličine u polju kuglastog kondenzatora. Tu nas u prvom redu zanima jakost električkog polja u nekoj točki A , koja se nalazi na ekvipotencijalnoj plohi kugle radijusa r , pa je tako udaljenost točke A od centra jednaka r , slika 10.35.

Jakost polja E odredit ćemo uz pomoć jednađbe $E = \Delta U / \Delta l$ koja je izvedena za homogeno električko polje, a ovdje za dvije veoma blize ekvipotencijalne kugle dobiva oblik

$$E = \frac{dU}{dr}$$

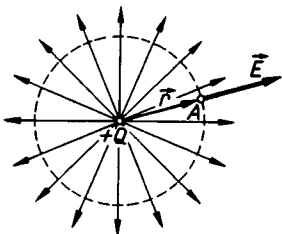
Supstituiranjem vrijednosti $dU = (Q/4 r^2 \pi \epsilon_0) \cdot dr$ za dvije infinitezimalno blize ekvipotencijalne kugle dobivamo

$$E = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

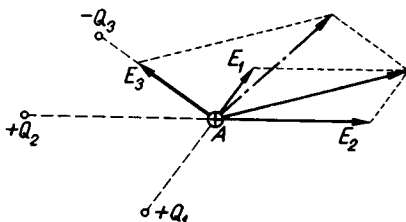
Kao vektor ima ova veličina smjer radijusa r , jer je diferenciranje vršeno po varijabli r , dakle po radijusu

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Tu $\mathbf{r}/r$ predočuje jedinični vektor u smjeru radijusa r i to ako je naboj kugle pozitivan smjer se računa od centra prema točki A , a ako je naboj negativan, od točke A prema centru, slika 10.35.



Sl. 10.37. Električno polje točkastog naboja.



Sl. 10.38. Rezultantno električno polje od više točkastih naboja.

Uvidom u gornju jednadžbu možemo zaključiti da se u pogledu stvaranja električkog polja cijela unutarnja kugla sa svim svojim nabojem Q , koji je raspodijeljen po cijeloj površini, može nadomijestiti nabojem Q koncentriranim u središtu kugle, jer je za E u točki A mjerodavna samo količina Q i udaljenost r točke A od središta.

Takav u mislima na jednu točku sakupljen naboj naziva se točkasti naboj. Iako se u jednoj točki bez ikakvih dimenzija ne može sakupiti neki naboj, ipak nam ova apstrakcija dobro služi pri matematičkim proračunima električkih polja stvorenih od različito raspoređenih naboja na tijelima. Sav naboj nekog tijela možemo, naime, zamisliti da je sastavljen od elementarnih tačkastih naboja, na koje možemo primijeniti gornju jednadžbu.

Silnice ili linije vektora jakosti polja $\mathbf{E}$ za pozitivni točkasti naboj izlaze dakle (kao i u polju kuglastog kondenzatora) u prostor u svim smjerovima radijalno, Kako je svaka ekvipotencijalna ploha kugla po čijoj je površini jakost polja konstantna, na površini kugle silnice su svagdje jednako guste, slike 10.37.

Kako drugi, negativni naboj, zamišljamo u velikoj udaljenosti na koncentričnoj kugli velikog radijusa, silnice i tamo ulaze okomito na kuglinu plohu.

Električke sile više točkastih naboja sastavljat će se vektorskim sumiranjem, uz pretpostavku da se ovi naboji nalaze u prostoru posve nepomični.

Vektor rezultantne jakosti električkog polja stvorenog od više naboja računa se, dakle, po jednadžbi

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_i}{r_i}$$

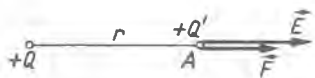
Slika 10.38 prikazuje grafičko određivanje rezultantne jakosti polja E u točki A nastale zbog djelovanja točkastih naboja Q_1 , Q_2 i Q_3 , pri čemu je radi primjera jedan od naboja suprotnog predznaka od ostalih.

10.4.5. Priestleyev (Coulombov) zakon i princip djelovanja na blizini.

Sila F , kojom električko polje jakosti E , stvoreno od točkastog naboja Q , djeluje na pokusni naboj Q' u točki A , jednaka je

$$F = Q' \cdot E = Q' \cdot \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2} \quad \text{Slika 10.39}$$

Posljednji izraz u gornjoj jednadžbi poznati je Priestleyev zakon, koji se često naziva i Coulombov zakon, a kazuje da je sila, kojom se dva električka točkasta naboja privlače (ili odbijaju) proporcionalna umnošku oba naboja, a indirektno proporcionalna kvadratu njihove udaljenosti. Ako su naboji istog predznaka oni se odbijaju, a ako su različitih predznaka, oni se privlače



Sl. 10.39. Sila između dva točkasta električka naboja.

$$F = k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2}$$

pri čemu je za vakuum kao izolator među nabojima faktor proporcionalnosti $k = 1/4 \pi \epsilon_0$.

Ako je umjesto vakuuma između naboja neki drugi materijalni izolator, treba umjesto ϵ_0 uvrstiti $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$, pa će uz iste naboje i isti razmak sila biti

$$F = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2} = \frac{1}{\epsilon_r} \cdot \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2}$$

dakle umanjena u odnosu na silu u vakuumu, jer u jednadžbi dolazi još faktor $1/\epsilon_r$, gdje je $\epsilon_r > 1$.

Ovo smanjivanje električkih sila zbog prisustva materije izolatora također je jedan od osobito važnih utjecaja materije na prilike u električkom polju. Time se može nekako objasniti i disocijacija u elektrolitima, tj. u vodenim otopinama soli i kiselina, jer voda ima veliku relativnu dielektričnu konstantu (81) pa će zbog toga veoma smanjiti unutarnje sile između pozitivnih i negativnih iona otopljenih molekula u vodi.

Ovim izvođenjima dobiven je ovdje Coulombov zakon, uz pretpostavku da su Q i Q' točkasti naboji. Pokazalo se, međutim, da Coulombov zakon zadržava svoju valjanost i onda ako su dimenzije tijela koja nose na sebi električke naboje Q i Q' neznatne u odnosu na njihovu međusobnu udaljenost r .

Taj zakon bio je otkriven eksperimentalno koncem 18. stoljeća i tada se smatralo, da je sila F kojom oba naboja djeluju jedan na drugi ovisna samo o tim nabojima i o njihovoj udaljenosti. Smatralo se, dakle, da sila nastaje djelovanjem naboja »na daljinu« i da prostor među nabojima ne sudjeluje u prijenosu sile od jednog tijela na drugo. No kasnije su Faraday i Maxwell uvođenjem pojma električkog polja pokazali da je zapravo izolacioni prostor glavni nosilac ovog djelovanja, tj. posrednik pri prijenosu nastalih sila. Taj način tumačenja stvaranja sila među nabojima naziva se djelovanje na blizini. Zamišljamo, naime, da električki naboji

$Q_1, Q_2 \dots$ itd. u svojoj okolini dovode cijeli prostor u neko osobito energetska stanje, neovisno o tome da li će ti naboji izvršavati neki učinak na druge naboje ili ne. Kažemo da u cijelom prostoru na svakom mjestu postoji od ovih naboja neka jakost električkog polja, a ona se ispoljava silom F ako uvedemo u polje naboj Q' .

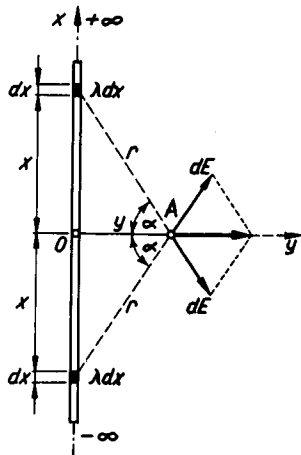
10.4.6. Primjena zakona superpozicije. Na osnovi zakona superpozicije, kojim se računa rezultatna jakost električkog polja E većeg broja točkastih naboja, mogu se analitički odrediti električka polja raspoređenih naboja u onim slučajevima kad je matematičkim postupcima moguće provesti sumiranje pojedinih komponentata.

Kao prvi primjer kako se primijenjuje zakon superpozicije odredit ćemo jakost polja u prostoru oko teoretski beskonačno dugog i beskonačno tankog ravnog vodiča jednolično nabijenog pozitivnim električkim nabojem, tako da je količina elektriciteta po jedinici duljine vodiča jednaka λ As/m.

U točki A bit će rezultatno električko polje sastavljeno od svih elementarnih jakosti polja što ih proizvode elementarni naboji na elementima duljine dx , koji kad dx teži k nuli postaju točkasti naboji, pa na njih možemo primijeniti Coulombov zakon i izvedenu jednadžbu za jakost polja.

Prema slici 10.40 stvorena je u točki A od naboja $\lambda \cdot dx$ jakost polja

$$dE = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{r^2}$$



Sl. 10.40. Električko polje u okolišu nabijenog ravnog vodiča (pravca).

a ukupna jakost E od cijelog vodiča bit će jednaka sumi, tj. integralu svih diferencijalnih jakosti, pri čemu se integracija po varijabli x mora za beskonačno dugi vodič provesti od $-\infty$ do $+\infty$.

Pri tome se lako može na slici vidjeti da će od nožišta O okomice y na istoj udaljenosti x prema jednoj i drugoj strani pravca obje jakosti polja od ovih naboja biti jednake po veličini, samo će se u rezultanti od obje jakosti poništiti komponente okomite na normalu y , te preostaju samo komponente u smjeru normale

$$dE \cdot \cos \alpha = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{dx \cdot \cos \alpha}{r^2}$$

na koje se mora primijeniti integracija

$$E = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx \cdot \cos \alpha}{r^2}$$

Račun se pojednostavnjuje ako se umjesto variable x uzme kao varijabla kut α , koji se za beskonačno dugi pravac x mijenja od -90° do $+90^\circ$.

Pri tom imamo, prema slici 10.40 supstituciju

$$x = y \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad dx = y \cdot \sec^2 \alpha \cdot d\alpha; \quad r = y \cdot \sec \alpha; \quad r^2 = y^2 \cdot \sec^2 \alpha$$

pa je

$$E = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{y} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha$$

i nadalje

$$E = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 \cdot y} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 \cdot y} \cdot \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

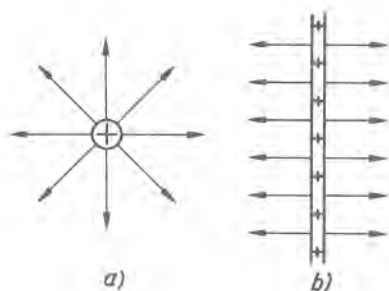
te konačno

$$E = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 \cdot y}$$

Budući da su u obzir došle samo komponente u smjeru okomice y , to je E okomito na pravac pa je

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 \cdot y} \cdot \frac{\mathbf{y}}{y}$$

gdje je $\mathbf{y}/y$ jedinični vektor okomite udaljenosti promatrane točke A od pravca.



Sl. 10.41. Raspored silnica nabijenog pravca

Zbog aksijalne simetrije imat će svaka točka prostora na okomitoj udaljenosti y od pravca istu jakost polja, pa se raspored silnica može prikazati slikom 10.41. Na slici a) prikazane su silnice u ravnini okomitoj na vodič, a na slici b) vidimo silnice u ravnini položenoj kroz vodič.

Budući da u gornjim jednadžbama dolazi dielektrička konstanta ϵ_0 , bilo je pretpostavljeno da se nabijeni vodič (pravac) nalazi u vakuumu. Ako je pak prostor ispunjen nekim drugim materijalnim izolatorom, treba umjesto ϵ_0 staviti njegovu dielektričku konstantu $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$.

U sljedećem izvodu izračunat ćemo jakost električkog polja u nekoj točki A koja je na razmaku z udaljena od ravnine jednolično nabijene gustoćom naboja σ As/m². Zamišljamo beskonačnu ravninu, tako da će okomica puštena iz A na ravninu probadati ravninu u ishodištu 0 koordinata (x, y) , što je središte od kojeg će se ravnina neograničeno protezati u oba smjera, x i y .

Pojedini elementarni (točkasti) naboji zamišljamo da se nalaze na plošnim elementima površine dS , koji su dio kružnog vijenca, slika 10.42, $dS = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$.

Elementarni naboj $dQ_1 = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$ stvorit će u točki A električno polje jakosti

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{dQ_1}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho}{r_1^2}$$

pri čemu vektor dE_1 ima smjer udaljenosti r_1 od dQ_1 do A .

Isto takvu jakost polja dE_2 proizvest će i na kružnom vijencu za 180° razmaknut elementarni naboj dQ_2 , ali u smjeru spojnice r_2 . Elementarne jakosti polja dE_1 i dE_2 rastave se na komponente u smjeru normale $OA = z$ i okomite na taj smjer. Obje komponente u smjeru z iznose $dE_1 \cdot \cos \alpha$ i one se aritmetički sumiraju, dok se komponente okomite na z $dE_1 \cdot \sin \alpha$ kompenziraju.

Tako će oba promatrana elementarna naboja stvoriti u točki A polje jakosti

$$dE = 2 dE_1 \cdot \cos \alpha$$

Rezultantna jakost polja za cijeli elementarni kružni vijenac za radijusu ρ dobije se sumiranjem komponenata od svih elementarnih površina dS , dakle za granične vrijednosti kuta φ od 0° do $180^\circ = \pi$.

A da se izračuna djelovanje naboja cijele ravnine, treba uračunati utjecaj svih elementarnih kružnih vijenaca za koje se mijenja ρ od vrijednosti 0 do beskonačno.

Dakle je

$$dE = 2 \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \sigma \rho \frac{d\varphi \cdot d\rho}{r^2} \cdot \cos \alpha$$

a

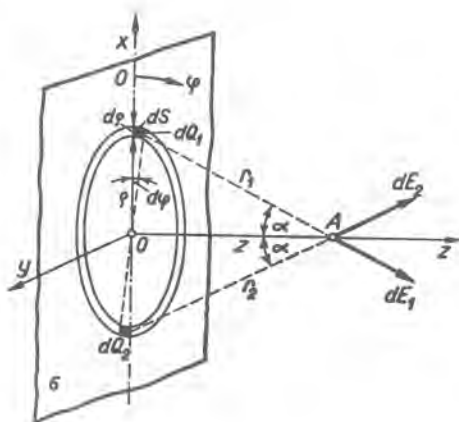
$$E = \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{\sigma}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\cos \alpha}{r^2} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$$

Iz slike slijedi da je $\cos \alpha = z/\sqrt{z^2 + \rho^2}$; $r^2 = z^2 + \rho^2$, pa je

$$\frac{\cos \alpha}{r^2} = \frac{z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

što uvršteno daje

$$E = \frac{\sigma}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot z \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{\rho \cdot d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \cdot d\varphi = \frac{\sigma \cdot z \cdot \pi}{2\pi \cdot \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{\rho \cdot d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$



Sl. 10.42. Električno polje el. nabijene ravnine.

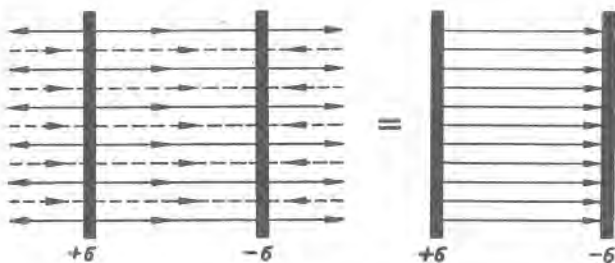
Vrijednost integrala je

$$\int_0^{\infty} \frac{\rho \cdot d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{1}{z} \quad \text{pa je} \quad E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

Dobiveni rezultat pokazuje da je jakost električkog polja E usmjerena okomito na ravninu, a da je neovisna o udaljenosti z promatrane točke, jer je z eliminiran. Budući da je moguće isti račun provesti i za točku A' na drugoj strani ravnine, jasno je da se polje nabijene ravnine rasprostire jednako na obje strane što znači da je u cijelom prostoru polje homogeno i okomito na ravninu. Slika 10.43 prikazuje silnice koje izlaze okomito iz ravnine ako je ona pozitivno nabijena, a ako je negativna, silnice ulaze u ravninu. Silnice su ekvidistantni paralelni pravci.



Sl. 10.43. Silnice električkog polja nabijene ravnine.



Sl. 10.44. Električko polje između 2 ravnine nabijene suprotnim električkim nabojima.

Metodom superpozicije može se sada odrediti i polje između dviju ravnina nabijenih električkim nabojima iste gustoće, ali suprotnih predznaka. Slika 10.44 prikazuje takve dvije ravnine, što su u biti ploče ravnog pločastog kondenzatora. Vidimo da polje između ploča nastaje sumiranjem obaju polja, jer su u tom prostoru oba polja istog smjera, dok se u ostalom prostoru izvan ploča jakosti polja obiju ravnina poništavaju. Među pločama je polje homogeno, a jakost je

$$E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

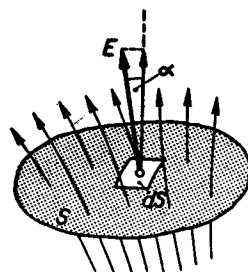
kao što smo je izračunali i prije za pločasti kondenzator, pretpostavljajući da se zanemaruje, ili pomoću zaštitnih prstena sprečava, nehomogenost na rubovima ploča.

U gornjim izvodima opet je pretpostavljeno da je sav prostor bio vakuum. Ako bi umjesto vakuuma bio razmak među pločama potpuno ispunjen nekim drugim izolatorom, došla bi umjesto ϵ_0 dielektrička konstanta ϵ upotrijebljenog izolatora.

10.4.7. Gaussov teorem. Pri teoretskim razmatranjima koja se odnose na pri-like u električkom polju mogu se često računati znatno pojednostavniti ako se poslužimo Gaussovim teoremom. Taj teorem, koji vrijedi za homogene i izo-tropne izolacione prostore, kaže da je tok vektora jakosti električnog polja kroz zatvorenu plohu jed-nak omjeru plohom obuhvaćenog naboja i dielek-tričke konstante prostora.

Kao što je poznato tok nekog vektora kroz neku plohu zove se produkt površine te plohe, s okomitom komponentom vektora na plohu. Kod nehomogenih polja treba najprije odrediti tok za diferencijal površine, jer se može smatrati da će u tom slučaju vek-tor jakosti polja biti po toj plohi konstantan, pa je $d\psi_E = E \cdot dS \cdot \cos \alpha$, a onda se za cijelu površinu S dobije ukupni tok integriranjem

$$\psi_E = \int_S E \cdot dS \cdot \cos \alpha$$



Sl. 10.45. Tok vektora jakosti električnog polja.

Na slici 10.45. su prikazane silnice polja E i ploha S , jedan element površine i okomita komponenta vektora E . Gornja jednađžba je skalarni produkt vektora ja-kosti polja E i vektora dS koji reprezentira površinu dS , pa se tok ψ_E može prikazati jednađžbom

$$\psi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Za zatvorenu plohu S je prema Gaussovu teoremu tok ψ_E jednak

$$\psi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

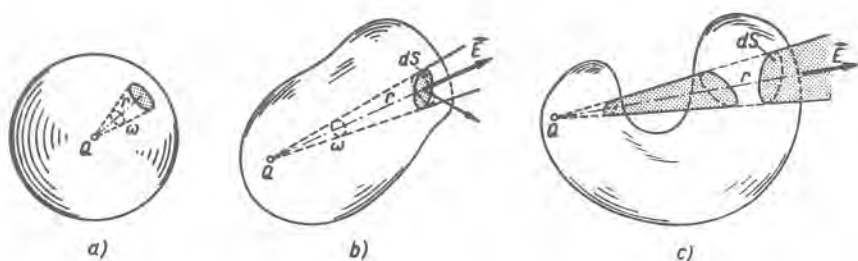
ako je električko polje stvoreno u vakuumu za koji je dielektrička konstanta jed-naka ϵ_0 . Ako je dielektrikum izolaciona materija dolazi umjesto ϵ_0 konstanta mate-rije ϵ .

Dokaz ispravnosti Gaussova teorema za kuglinu plohu oko točkastog naboja Q jednostavan je, treba samo uvrstiti u gornju jednađžbu za E vrijednost $(1/4 \pi \epsilon_0) \cdot (Q/r^2)$ i uzeti u obzir da je na kuglinoj površini $4 r^2 \pi$ vektor E svagdje normalan, pa je

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \oint_S \frac{Q}{r^2} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4 \pi r^2} \oint_S dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{1}{4 r^2 \pi} \cdot 4 r^2 \pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Za bilo kakvu nepravilnu zatvorenu plohu S izvodi se dokaz uz pomoć slike 10.46. Promotrimo najprije element površine dS koji se od naboja Q nalazi na udaljenosti r . Tok $d\psi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot dS \cdot \cos \alpha$, a izraz $dS \cdot \cos \alpha$ možemo smatrati projekcijom površine dS na plohu pomoćne kugle radijusa r , jer isti kut što ga zatvara vektor $\mathbf{E}$ s vektorom $d\mathbf{S}$, koji reprezentira površinu dS , zatvara i elemenat plohe dS s elementom kugline plohe. Površina na kugli može se izraziti kao umnožak prostornog kuta i kvadrata radijusa, pa je za naš promatrani slučaj $dS \cos \alpha = r^2 \cdot d\omega$, gdje prostorni kut označujemo slovom ω . To uvršteno u gornju jednadžbu daje

$$d\psi_E = E \cdot r^2 \cdot d\omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\omega = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot d\omega$$



Sl. 10.46. Tok vektora jakosti električkog polja kroz zatvorenu plohu S .

- a) Električki naboj unutar zatvorene kugline plohe; b) Nepravilna zatvorena ploha;
c) Električki tok prodire plohu više puta.

Vidimo da je $d\psi_E$ neovisno od udaljenosti r , pa će za isti prostorni kut $d\omega$ biti za sve površine iste vrijednosti, jedino treba još uzeti u obzir predznak. Jedan te isti snop silnica koji iz Q izlazi pod istim kutom $d\omega$ može, naime, površinu S (kako se na slici vidi) probadati jedanput ili neparan broj puta. Pri tome će vektor $\mathbf{E}$ biti usmjeren prema unutrašnjosti površine S , ili okrenut prema van. Budući da vektor $d\mathbf{S}$ koji reprezentira element površine crtamo uvijek normalno, a usmjeren prema vanjskom prostoru, bit će $d\psi_E$ pozitivno ako je kut $\alpha < 90^\circ$, a ako je $\alpha > 90^\circ$ bit će $d\psi_E$ negativno.

Na slici se vidi da će i kad snop silnica prodire plohu S više od 1 puta u obzir doći tok $d\psi_E$ samo jedanput jer se ostali pribrojnici suprotnih predznaka poništavaju. Stoga je, neovisno o obliku zatvorene plohe, ukupni tok ψ_E jednak

$$\psi_E = \oint_S d\psi_E = \oint_S \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi} d\omega = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi} \oint_S d\omega$$

a jer je $\oint_S d\omega = 4\pi$, tj. suma svih elementarnih prostornih kutova jednaka je 4π , onda je

$$\psi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Dakle je

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

U prostoru unutar zatvorene plohe može biti više pojedinih naboja: $Q_1, Q_2, \dots$, pa je tada Q jednako algebarskoj sumi svih obuhvaćenih naboja

$$Q = \sum Q_i$$

Ako pak unutar plohe nema električkih naboja $Q = 0$, pa je

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Pomoću Gaussova teorema možemo odrediti kako će se u stanju statičke ravnoteže rasporediti privedeni električki naboj u masivnim vodljivim tijelima.

Lako je zaključiti da će se sav naboj nalaziti samo na površini tijela i da ništa slobodnog naboja neće biti u unutrašnjosti tijela, što također potvrđuju precizna mjerenja.

Vidjeli smo, naime, da naboji stvaraju električko polje, a ovo djeluje silama na naboj. No kako su u električki vodljivom tijelu naboji pomični, svaka će se količina slobodnog naboja koja se nađe u tijelu pod utjecajem tih sila gibati, a statičko stanje će se uspostaviti tek kad unutar tijela nestane električko polje. To će biti onda kad se zbog međusobnog odbijanja svi slobodni naboji smjeste na površini tijela (zapravo u tankom sloju tik ispod površine tijela).

Može se pokazati da se slobodni električki naboji ne mogu nalaziti unutar masivnog električki vodljivog tijela u statičkom stanju upravo zato i samo zato, što je sila kojom naboji djeluju jedan na drugi obrnuto ovisna o kvadratu njihove udaljenosti. A to je baš dano Coulombovim zakonom.

Elektrostatsko polje ne može, dakle, postojati u električki vodljivim tijelima već samo u nevodljivoj materiji (izolatorima) i vakuumu, pa se oni zato nazivaju dielektrici.

10.4.8. Kapacitet cilindričnog kondenzatora. I prijašnji proračuni električkih polja nabijenog pravca i ravnine mogu se mnogo jednostavnije izvesti pomoću Gaussova teorema, a u nastavku ćemo izračunati kao primjer primjene toga teorema električko polje i kapacitet cilindričnog kondenzatora, koji se u praksi pojavljuje kao koaksijalni kabel.

Polazimo od idealizirane predodžbe gdje je unutarnji vodič pravac, a vanjski koaksijalna cilindrična ploha radijusa r_2 . Pri velikoj dužini l u odnosu na radijus bit će polje zbog aksijalne simetrije predočeno silnicama koje kao kod beskonačnog pravca izlaze radijalno iz pravca, pa su tako ekvipotencijalne plohe onda koaksijalni cilindri. Ako uzmemo u razmatranje samo dio duljine l na kojoj pravac ima naboj $+Q$, imat će cilindar naboj $-Q$.

Promotrimo tačku A na udaljenosti r od pravca, slika 10.47. Crtkano označena cilindrična ploha s pobočnim bazama predstavlja zatvorenu plohu S na koju možemo primijeniti Gaussov stavak, pa imamo

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Integral za ovu zatvorenu plohu raspada se na tri dijela: na dvije pobočne baze i na cilindrični plašt $2r\pi \cdot l$. Kako je vektor jakosti polja tangencijalan na pobočnim bazama, u ukupnom integralu baze uopće ne ulaze u račun, već samo cilindrični plašt kao jedina površina kroz koju prolazi tok vektora $\mathbf{E}$.

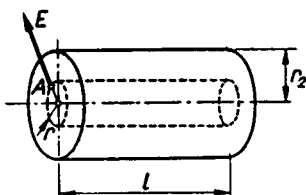
Budući da je na svim elementima plašta jakost polja E iste vrijednosti, a njen vektor okomit na površinu, $\mathbf{E}$ i $d\mathbf{S}$ se poklapaju po smjeru, kut $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, pa se jednadžba Gaussova teorema može prikazati jednostavno

$$E \cdot \int_S dS = \frac{Q}{\epsilon}$$

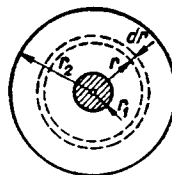
a kako je $\int_S dS = 2r\pi \cdot l$, izlazi da je $E \cdot 2r\pi \cdot l = Q/\epsilon$, ili

$$E = \frac{Q}{2r\pi l \cdot \epsilon}$$

ako uzmemo kao izolator materiju dielektričke konstante ϵ .



Sl. 10.47. Koaksijalni kabel kao primjer cilindričnog kondenzatora.



Sl. 10.48. Cilindrični kondenzator u poprečnom presjeku.

Zamijenimo li nabijeni pravac koaksijalnim metalnim cilindrom radijusa r_1 koji zadržava na sebi naboj Q , na slici polja između unutarnjeg i vanjskog cilindra ništa se ne mijenja i E na radijusu r zadržava prema Gaussovu teoremu istu vrijednost $E = Q/2\pi\epsilon l r$, slika 10.48.

Time smo dobili konstrukciju cilindričnog kondenzatora čiji kapacitet možemo računati posve istim načinom kako smo računali kapacitet kuglastog kondenzatora.

Unutarnji i vanjski cilindar priključeni na napon U dvije su ekvipotencijalne plohe, a zbog aksijalne simetrije i ostale ekvipotencijalne plohe su koaksijalni cilindri.

Između dvaju infinitezimalno blizih cilindara radijusa r i $r + dr$ postoji napon dU , a kako zbog neznatnog razmaka možemo pretpostaviti da je polje između tih cilindara homogeno, primijenit ćemo jednadžbu $dU = Q dr / \epsilon S$, pa dobivamo

$$dU = \frac{Q \cdot dr}{2 \pi \epsilon l r}$$

Cijeli napon U koji je priključen na kondenzator jednak je sumi (integralu) pojedinih elemenata dU u granicama r_1 i r_2

$$U = \int_{r_1}^{r_2} dU = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q \cdot dr}{2 \pi \epsilon l r} = \frac{Q}{2 \pi \epsilon l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2 \pi \epsilon l} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Oдавде se dobije kapacitet kao kvocijent $C = Q/U$, pa je

$$C = \frac{2 \pi \epsilon \cdot l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

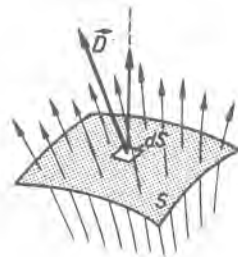
Ako u jednadžbu za E uvrstimo vrijednost napona U na koju je kabel priključen, vidimo da je

$$E = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Jakost polja bit će, dakle, na unutarnjem vodiču kabela najveća i izolator najviše naprezan, jer je na unutarnjem cilindru $r = r_1$, dakle najmanje, a

$$E = E_{\max} = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

10.4.9. Tok vektora $\mathbf{D}$ u nehomogenom polju. Slično kao što pri prolazu vektora $\mathbf{E}$ kroz površinu S dobivamo tok Ψ_E toga vektora, tako i vektoru električkog pomaka $\mathbf{D}$ pripada u prolazu kroz površinu S tok električkog pomaka Ψ_D . U općenitom slučaju, kad je polje nehomogeno, ne može se izračunati tok Ψ_D kao u polju pločastog kondenzatora odmah za površinu S jednostavnim množenjem cijele površine S vektorom $\mathbf{D}$, već se mora i ovdje najprije uzeti u razmatranje element površine dS , slika 10.49, za koji se smije pretpostaviti da je na njemu polje homogeno. Tako dobivamo diferencijal toka



$$d\Psi_D = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Sl. 10.49. Tok vektora $\mathbf{D}$.

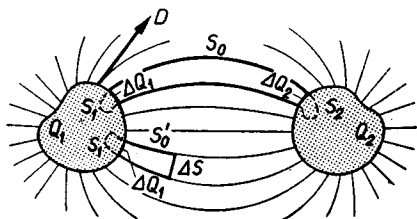
a ukupni tok kroz cijelu površinu S jednak je

$$\Psi_D = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Za zatvorenu površinu S bit će prema Maxwellovu postulatu Ψ_D jednak ukupnom slobodnom naboju Q što ga ta površina zatvara

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

Ako nam je za svaku točku polja poznat vektor $\mathbf{D}$, možemo i u nehomogenom polju nacrtati linije vektora $\mathbf{D}$ tako da nam gustoća njihova pokazuje veličinu, a tangenta na liniju smjer vektora $\mathbf{D}$. Te linije počinju na pozitivno nabijenom tijelu Q_1 , slika 10.50, a završavaju na negativno nabijenom tijelu Q_2 .



Sl. 10.50. Cijevi električnog pomaka u nehomogenom polju.

Odaberemo li od svih ovih linija samo jedan snop koji prolazi okomito na površinu S , tada te linije predstavljaju jednu cijev električnog pomaka. Na jednom kraju te cijevi nalazi se na površini pozitivnog tijela količina naboja $+\Delta Q_1$, a na drugom kraju $-\Delta Q_2$.

Primijenimo li gornju jednadžbu na zatvorenu površinu koju tvore plašt cijevi S_0 i dvije površine S_1 i S_2 koje zamišljamo unutar tijela 1 i 2, dobivamo

$$\oint_{S_0 + S_1 + S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Delta Q_1 + \Delta Q_2$$

Površinski integral možemo pisati rastavljeno, pa je

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = \int_{S_0} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Lako možemo vidjeti da je $\int_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ jer vektor $\mathbf{D}$ tangira površinu S_0 , pa je po cijeloj površini svaki produkt $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ jednak nuli. I druga dva integrala jednaka su nuli, jer unutar metalnih tijela nema polja, pa je $D = 0$. Slijedi da je

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0$$

ili

$$\Delta Q_2 = -\Delta Q_1$$

što potvrđuje tvrdnju da linije polja izviru na pozitivno nabijenim tijelima, a po-
niru u negativno nabijena tijela.

Kroz okomitu površinu ΔS na bilo kojem mjestu cijevi prolazi tok $\Delta \Psi_D =$
 $= \int_{\Delta S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ za koji se po istom postupku dobiva

$$\oint_{S_1 + \Delta S + S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Delta Q_1 \quad \text{a kako je} \quad \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{i} \quad \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

preostaje samo $\int_{\Delta S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Delta Q_1$, pa je prema tome tok $\Delta \Psi_D$ na svakom mjestu
cijevi jednak naboju ΔQ_1 na tijelu iz kojeg ta cijev izlazi.

Ako se na to mjesto stavi metalna ploha ΔS bit će influencirani naboj jednak
 ΔQ_1 , a ako se plohom S obavije cijelo tijelo 1, onda je na toj plohi S ukupna količina
influenciranog naboja jednaka Q_1 .

Ako je ukupni naboj Q sastavljen od pojedinih naboja raspoređenih na bilo
koji način u prostoru, može se taj ukupni naboj izračunati kao suma svih naboja
u elementima volumena dV promatranog prostora, u kojem prostorna gustoća ρ
može biti na pojedinim mjestima i različita. Tako je $Q = \int_V \rho \cdot dV$, pa gornja
jednadžba dobiva oblik

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \cdot dV$$

gdje je V volumen što ga zatvara ploha S .

Za prostore ispunjene jednoličnim i izotropnim izolacionim materijalom (ili
vakuumom) mogla bi se gornja jednadžba izvesti i iz Gaussova teorema. Za vektor
 $\mathbf{D}$ možemo, naime staviti $\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}$, a kako je u tom prostoru ϵ konstanta, može
se jednadžba Gaussova teorema $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon$ napisati u obliku

$$\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

što je jednako

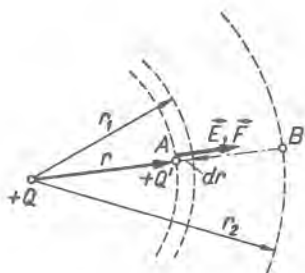
$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

Pri tom treba ponovno istaknuti bitnu razliku između dva izraza

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon} \quad \text{i} \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

Dok prvi od njih ima valjanost samo u prostorima jednolično ispunjenim izotropnom izolacijom i vrijedi samo za elektrostatska polja, drugi se izraz može primijeniti na bilo kakva električna polja ispunjena izolacionom materijom raznih kvaliteta, a važno je istaći da ta relacija zadržava svoju valjanost i pri vremenski promjenljivim poljima. To se objašnjava spomenutim odnosima veličina E i D pri polariziranju materije izolatora u električkom polju.

10.4.10. Potencijal u nehomogenom polju. Elektrostatsko polje može se umjesto vektorom $\mathbf{E}$ okarakterizirati i skalarnom veličinom: potencijalom φ . Na primjeru električkog polja točkastog naboja objasniti ćemo kako se računa s potencijalom u nehomogenom električkom polju.



Kao i u primjeru s homogenim poljem pločasta kondenzatora, odredit ćemo potencijal neke točke A tako da izračunamo potencijalnu energiju koju će imati pokusni naboj $+Q'$ ako ga pomaknemo iz mjesta za koje uzimamo da ima potencijal jednak nuli, u promatranu točku A .

Slika 10.51 prikazuje električko polje točkastog naboja $+Q$. Jakost polja u točki A jednaka je $E = Q/4\pi\epsilon r^2$, a sila na pokusni naboj $+Q'$ je

Sl. 10.51. Potencijal točkastog naboja.

$$F = E \cdot Q' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot Q'$$

Ta sila djeluje u smjeru radijusa, a ovisna je o udaljenosti r , pa se u polju mijenja od točke do točke. Zbog nehomogenosti polja moramo, dakle, ovdje pri izračunavanju rada što ga izvrši sila najprije odrediti elementarni rad dA na elementu puta dr u smjeru sile, a onda će sav izvršeni rad na nekom konačnom putu biti jednak $A = \int dA = \int F \cdot dr$. Nakon supstitucije gornjeg izraza za silu dobivamo

$$dA = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot Q \cdot Q' \cdot \frac{dr}{r^2}$$

a izvršeni ukupni rad na putu između dviju točaka jest

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot Q \cdot Q' \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot Q \cdot Q' \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Taj rad vršila bi sila F na račun energije električkog polja. No ako bismo u obrnutom smjeru, dakle protiv djelovanja sile polja, pomicali taj naboj, morali bismo za obavljanje toga rada na tom istom putu potrošiti vanjsku energiju, čiji je iznos također jednak

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon} Q Q' \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Tu energiju, nakon izvršena gibanja sakupljenu u naboju, smatramo potencijalnom energijom. Od položaja B do A narasla je, dakle, potencijalna energija za iznos

$$W_p = W$$

a ako taj iznos podijelimo sa Q' dobit ćemo da je potencijal od B do A narastao za

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

ili

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_2}$$

Budući da je potencijalna energija to veća što je točka A bliža naboju $+Q$, a to manja što je razmak obaju naboja Q i Q' veći, možemo uzeti da će potencijal točke u polju, koja je od točkastog naboja beskonačno udaljena, biti jednak nuli, jer kad $r_2 \rightarrow \infty$ postaje $1/r_2 = 0$.

Tako se dobije općenito da je potencijal φ točke udaljene za r od naboja Q jednak

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r}$$

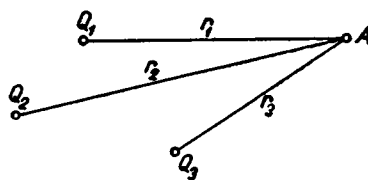
Električki potencijal je veličina dobivena iz izraza za energiju, pa kako je energija skalar na veličina, i potencijal je skalar. Zbog toga ćemo mnoge proračune električkog polja moći primjenom potencijala znatno pojednostavniti, jer umjesto da npr. u polju s više naboja tražimo rezultantu jakosti polja vektorskim zbrajanjem, možemo rezultatni potencijal odrediti jednostavnim aritmetičkim zbrajanjem.

Ako, dakle, prema slici 10.52 imamo električko polje proizvedeno nabojima $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots$ u promatranoj točki bit će rezultatni potencijal

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}$$

Općenito nam je, dakle, moguće za zadani raspored električkih naboja odrediti potencijal svake točke u polju, pa ako povežemo točke istog potencijala, dobijemo time ekvipotencijalne plohe polja, odnosno u nacrtanoj ravnini ekvipotencijalne linije. Slika 10.53 je primjer takvog nehomogenog polja predloženog pomoću nekoliko ekvipotencijalnih linija.

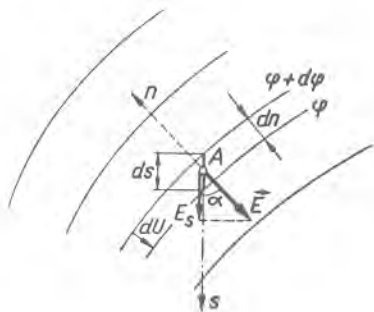
Poznavajući električko polje definirano pomoću potencijala možemo nadalje odrediti i jakost električkog polja za svaku točku polja, jer postoji međusobna povezanost veličina E i φ , koju smo već upoznali u homogenom polju, a sad je možemo izvesti i za nehomogeno polje.



Sl. 10.52. Rezultantni potencijal više točkastih naboja.

Osnovnu relaciju $E = \Delta U / \Delta l$ koja vrijedi za homogeno polje smijemo ovdje primijeniti na dvije infinitezimalno blize ekvipotencijalne linije φ i $\varphi + d\varphi$, slika 10.53.

Između tih dviju linija vlada napon dU na razmaku dn , pa je jakost polja $E = dU/dn$. Napon dU možemo izraziti kao razliku potencijala promatranih linija: $dU = (\varphi + d\varphi) - \varphi = d\varphi$, pa je po apsolutnom iznosu



$$E = \frac{d\varphi}{dn}$$

dn je okomiti razmak obiju linija.

Da bismo odredili još i predznak od E , moramo imati na umu da je jakost polja E istog smjera kao i sila F koja djeluje na pozitivni pokusni naboj $+Q'$, a da pri transportu toga naboja protiv sile (dakle suprotno smjeru $\mathbf{E}$) potencijalna energija i time potencijal rastu. Smjer porasta potencijala protivan je, dakle, smjeru vektora $\mathbf{E}$.

To možemo na slici 10.53 prikazati na taj način da u točki A postavimo normalu na ekvipotencijalnu liniju čiji pozitivni smjer odaberemo tako da pokazuje prema rastućim potencijalima. Za $dn > 0$ također je i $d\varphi > 0$. Međutim je smjer vektora $\mathbf{E}$ suprotan porastu potencijala i zato pokazuje u negativnu stranu.

Na osnovi ovih izlaganja jakost polja dana je jednadžbom

$$\mathbf{E} = - \frac{d\varphi}{dn}$$

Iako je prema definiciji jakost polja usmjerena okomito na ekvipotencijalne linije, dakle u smjeru normale, ipak se može $\mathbf{E}$ kao vektorska veličina rastaviti na komponente, pa se tako govori o jakosti polja E_s u nekom smjeru s , koji s normalom zatvara kut α . Prema slici je $E_s = E_n \cdot \cos \alpha$, gdje smo sa E_n označili jakost polja E da istaknemo njezin smjer u pravcu normale.

Ako za E_n uvrstimo prijašnju vrijednost, dobivamo

$$E_s = E_n \cdot \cos \alpha = - \frac{d\varphi}{dn} \cos \alpha = - \frac{d\varphi}{\frac{dn}{\cos \alpha}} = - \frac{d\varphi}{ds}$$

jer je $dn/\cos \alpha$ upravo jednako udaljenosti obiju linija u smjeru s .

Zbog faktora $\cos \alpha$ uvijek je jakost polja E_s u svakom drugom smjeru manja od jakosti polja E_n . A kako je baš $E_n = E$ mjera za jakost polja, za jednadžbu $\mathbf{E} = - d\varphi/dn$ imamo posebni matematički izraz

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi$$

Gradijent prema pravilima matematike znači ovdje promjenu potencijala po jedinici duljine u smjeru u kojem je ta promjena najveća.

Iz jednadžbe $E_s = -d\varphi/ds$ slijedi da je $E_s ds = -d\varphi$, a integral

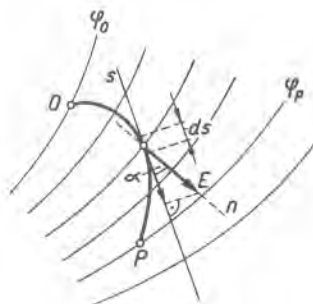
$$\int_l E_s \cdot ds$$

protegnut na neku liniju l čiji su elementi ds , naziva se, linijski integral veličine E . Značenje tog integrala dobit ćemo ako izvršimo integriranje između dviju krajnjih točaka na liniji l . Tako je prema slici 10.54 između O i P linijski integral jednak

$$\int_O^P E_s \cdot ds = - \int_O^P d\varphi$$

a to je

$$\int_O^P E_s \cdot ds = -\varphi \Big|_O^P = \varphi_O - \varphi_P = U_{OP}$$



Sl. 10.54. Značenje linijskog integrala jakosti elektrostatskog polja.

Budući da je razlika potencijala $\varphi_O - \varphi_P$ među točkama O i P jednaka naponu U_{OP} , možemo reći da linijski integral jakosti električnog polja u elektrostatskom polju predstavlja napon među krajnjim točkama linije l . Ako bi linija l bila zatvorena tako da točka P padne u točku O , postala bi vrijednost linijskog integrala jednaka nuli

$$\oint_l E_s \cdot ds = 0$$

što je posve razumljivo, jer jedna točka prema samoj sebi nema napona

$$\varphi_O - \varphi_O = 0$$

Nabijeni električki vodiči, na primjer metalna tijela kod kojih se u elektrostatskim prilikama nalazi naboj samo na njihovoj površini, imaju po cijeloj toj površini isti potencijal pa je, dakle, ta površina jedna ekvipotencijalna ploha. Taj isti potencijal ima i svaka točka toga tijela u svojoj unutrašnjosti. Ako bi, naime, ostale točke imale neki drugi potencijal postojala bi razlika potencijala, a to je napon koji bi uzrokovao gibanje naboja, što nije u skladu s pretpostavkom da promatramo statičko stanje kad je naboj u mirovanju.

Prije izvedenu jednadžbu

$$\int_1^2 E \cdot dn = \varphi_1 - \varphi_2$$

možemo iskoristiti i za određivanje potencijala neke točke A , ako nam je električno polje zadano time što poznamo analitički izraz za jakost polja E . No kako primjenom linijskog integrala vektora $\mathbf{E}$ dobivamo zapravo diferenciju potencijala, taj će nam račun dati vrijednost potencijala φ_A točke A , ako znamo koja točka B u polju ima vrijednost potencijala jednaku nuli. Tada, naime, diferencija potencijala

$$\varphi_A - \varphi_B = \varphi_A - 0 = \varphi_A$$

Tako za polje točkasta naboja Q znamo da su potencijalna energija i potencijal u beskonačno udaljenoj točki B od naboja Q jednaki nuli, pa prema tome gornja granica linijskog integrala u tom primjeru mora bit ∞ .

Imamo, dakle

$$\varphi_A - \varphi_B = \varphi_A = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^\infty \frac{Q}{4 \pi \epsilon} \frac{dr}{r^2}$$

što daje

$$\varphi_A = \frac{Q}{4 \pi \epsilon} \cdot \left. \frac{-1}{r} \right|_r^\infty = \frac{Q}{4 \pi \epsilon} \cdot \frac{1}{r}$$

10.4.11. Električki potencijal nabijenog pravca. Pokušajmo u polju nabijenog beskonačno dugog pravca na isti način izračunati potencijal točke A udaljene za r od pravca. Za jakost polja E imamo već otprije izraz $E = \lambda / 2 \pi \epsilon r$, pa ako još pretpostavimo da je točka B , čiji je potencijal jednak nuli, opet kao i prije u beskonačnosti, linijski integral nam daje

$$\varphi_A = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon} \int_r^\infty \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon} \cdot \ln r \Big|_r^\infty = \infty.$$

Rezultat pokazuje da je uz gornju pretpostavku potencijal φ_A potpuno nedefiniran, pa zaključujemo da je pretpostavka da je potencijal nabijenog pravca u beskonačnosti jednak nuli ovdje kriva. Zato ćemo po volji uzeti da neka druga točka B , koja je od pravca razmaknuta na konačnoj udaljenosti r_0 , ima potencijal upravo jednak nuli. Tada dobivamo potencijal točke A

$$\varphi_A = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon} \ln r \Big|_r^{r_0} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon} \cdot \ln \frac{r_0}{r}$$

Ova svojevoljnost u odabiranju referentne točke B neće nas uopće smetati u daljnjim računima s potencijalima, jer u tim računima dolaze uvijek naponi, tj. diferencije potencijala dviju točaka, pa će se nametnuti potencijal φ_B eliminirati.

I doista, ako promatramo dvije točke, A i C , pa ako prikažemo, dalje

$$\varphi_A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot (\ln r_0 - \ln r_1) \quad \text{i} \quad \varphi_C = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} (\ln r_0 - \ln r_2)$$

vidimo da je

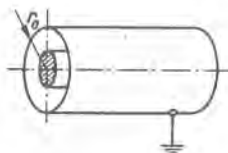
$$U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} (\ln r_0 - \ln r_1 - \ln r_0 + \ln r_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} (\ln r_2 - \ln r_1)$$

$$U_{AC} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Budući da se nabijena metalna kugla može nadomijestiti nabojem koncentriranim u središtu kugle, a metalni nabijeni valjak nabijenim pravcem, potencijal kugle će na površini biti jednak $\varphi = Q/4\pi\epsilon r$, gdje su r radijus kugle, a Q njezin naboj.

Isto tako za potencijal nabijenog valjka dobivamo izraz

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$



Sl. 10.55. Potencijal nabijenog valjka.

gdje su r polumjer valjka, λ naboj po jedinici duljine, a r_0 radijus na kojem se nalazi po volji odabran $\varphi = 0$, slika 10.55.

Ekvipotencijalne plohe nabijene kugle su opet kugle, a ekvipotencijalne plohe nabijenog valjka su valjci, kako to pokazuju gornje jednadžbe, što je i razumljivo zbog simetrije, pa smo se mogli time već prije u izvodima koristiti.

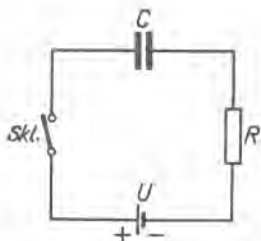
10.5.

ENERGIJA ELEKTROSTATSKOG POLJA

Budući da na naboje u električkom polju djeluje mehanička sila F , zaključujemo da električko polje posjeduje izvjesnu količinu energije koju nazivamo električkom energijom. Da dobijemo uvid o tome kolika je ta energija i o kojim sve faktorima ona ovisi, mogli bismo provesti razmatranja na više načina.

10.5.1. Priključak kondenzatora na istosmjerni napon. Jedan način zasniiva se na mehanizmu vršenja rada sile F . No mi ćemo ovu analizu provesti promatrajući koliku će energiju primiti kondenzator od izvora za vrijeme kad mu se dovođenjem naboja stvara u prostoru između ploča električko polje.

Slika 10.56 prikazuje shemu gdje na izvor stalnog istosmjernog napona U sklopkom uključujemo kondenzator kapaciteta C . Kao u svakom strujnom krugu, tako i ovdje moramo uzeti u račun još i otpor kruga R .



Sl. 10.56. Prijelazna pojava pri nabi-
janju kondenzatora istosmjernim na-
ponom.

Već smo u uvodu spomenuli da se pri ukapćanju dobiva strujni udarac, tako da struja od vrijednosti nula prije ukapćanja, teče u krugu kratko vrijeme, da opet kad se kondenzator nabije poprimi vrijednost nula. Ovu promjenu jakosti struje od stanja nenabijenog kondenzatora pa do stanja kad je potpuno nabijen zovemo prijelaznom pojavom.

Uvid u strujne i naponske prilike tokom procesa nabijanja dobit ćemo ako na prikazanu spojnu shemu primijenimo II Kirchhoffov zakon. Budući da je struja promjenljiva označujemo je malim slovom, tako da naponska jednadžba II Kirchhoffova zakona glasi

$$\sum \text{napona} = \sum i \cdot R$$

Ovdje osim napona izvora djeluje još u krugu pri procesu nabijanja stvoreni napon na kondenzatoru u , koji u strujnom krugu djeluje suprotno naponu izvora, pa ga možemo smatrati protunaponom

$$U - u = i \cdot R$$

Taj napon na kondenzatoru ovisan je o količini naboja stvorenog na pločama kondenzatora, a izračunava se iz zakona proporcionalnosti $Q = C \cdot U$, koji primijenjen na promjenljive vrijednosti glasi

$$q = C \cdot u, \quad \text{odnosno} \quad dq = C \cdot du \quad \text{i} \quad u = \frac{q}{C}$$

Količina promjenljivog naboja q u vezi je s jakošću struje prema jednadžbi

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{pa je} \quad i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Naponska jednadžba glasi, dakle

$$U - u = C \cdot \frac{du}{dt} \cdot R \quad \text{ili} \quad U - u = C R \cdot \frac{du}{dt}$$

Ova diferencijalna jednadžba prikazuje ovisnost promjenljivog napona u na kondenzatoru o vremenu, pa se iz nje može odrediti ta ovisnost u obliku $u = f(t)$, a onda i vremenska ovisnost ostalih veličina, $q(t)$ i $i(t)$.

U gornjoj jednadžbi ima umnožak konstanta $R \cdot C$, kako se lako može vidjeti, dimenziju vremena, jer je

$$[R \cdot C] = \Omega \cdot \text{As/V} = \Omega \cdot \text{S} \cdot \text{s} = \text{s},$$

pa se zato naziva vremenska konstanta i označuje slovom τ :

$$\tau = R \cdot C$$

Time jednadžba dobiva oblik $U - u = \tau \cdot (du/dt)$, pa se može lako integrirati ako iste variable stavimo na istu stranu

$$\frac{du}{U - u} = \frac{dt}{\tau} \quad \text{ili} \quad \frac{d(U - u)}{U - u} = -\frac{dt}{\tau}$$

Rješenje nakon integriranja glasi $\ln(U - u) = -(1/\tau) \cdot t + K$. Konstantu K odredit ćemo iz početnog uvjeta, koji kaže da je u početnom trenutku ukapčanja $t = 0$ i napon na kondenzatoru jednak nuli, $u = 0$, pa je $\ln(U - 0) = -(1/\tau) \cdot 0 + K$, odakle je $K = \ln U$, što uvršteno gore daje $\ln(U - u) = -(t/\tau) + \ln U$, ili

$$\ln \frac{U - u}{U} = -\frac{t}{\tau}$$

Ako od ovog logaritamskog oblika prijeđemo na eksponencijalni oblik, dobivamo

$$\frac{U - u}{U} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

odakle konačno slijedi

$$u = U \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Uvrštenjem ovog izraza u jednadžbu $q = C \cdot u$, te $i = C(du/dt)$, uz primjenu jednadžbi $Q = C \cdot U$ i $I = U/R$, dobivamo

$$q = Q \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}); \quad i = I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Rezultati dobiveni matematičkim rješavanjem osnovne diferencijalne jednadžbe pokazuju, dakle, da se sve promjenljive električke veličine ovog sklopa za vrijeme prijelaznog stanja mijenjaju po eksponencijalnom zakonu.

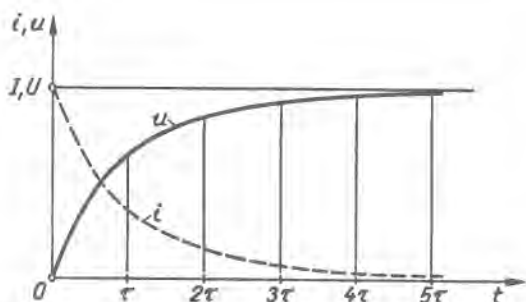
U prvom trenutku kad sklopku zatvorimo, a to znači za $t = 0$, ima napon na kondenzatoru, a i naboj q , još vrijednost nula, no struja i ima maksimalnu vrijednost I , koju određuju samo otpor R strujnog kruga i napon izvora U . To znači da u trenutku priključivanja kondenzatora na istosmjerni napon izgleda strujni krug kao da je kondenzator vodljivo premošten, dakle kratko spojen.

Da bismo zornije vidjeli kako se ove veličine mijenjaju, prikazat ćemo grafički njihovu promjenu u ovisnosti o vremenu t , koju kao varijablu nanosimo na horizontalnoj osi koordinatnog sustava, slika 10.57. Numeričke vrijednosti izraza $e^{-t/\tau}$ i $(1 - e^{-t/\tau})$ za različita vremena mogu se najjednostavnije dobiti ako se varijabla t uzme kao mnogokratnik vremenske konstante τ .

Računom dobivamo za

$t = 0$	$e^{-t/\tau} = e^0 = 1$	$1 - e^{-t/\tau} = 0$
$t = \tau$	$e^{-t/\tau} = e^{-1} = 0,368$	$1 - e^{-t/\tau} = 0,632$
$t = 2\tau$	$e^{-t/\tau} = e^{-2} = 0,135$	$1 - e^{-t/\tau} = 0,865$
$t = 3\tau$	$e^{-t/\tau} = e^{-3} = 0,0498$	$1 - e^{-t/\tau} = 0,9502$
$t = 4\tau$	$e^{-t/\tau} = e^{-4} = 0,0183$	$1 - e^{-t/\tau} = 0,9817$
$t = 5\tau$	$e^{-t/\tau} = e^{-5} = 0,0067$	$1 - e^{-t/\tau} = 0,9933$

Pomoću ovih vrijednosti nacrtani graf funkcije u pokazuje da se napon na kondenzatoru u početku vrlo naglo povećava od prvotne vrijednosti nula, no nakon



Sl. 10.57. Eksponencijalni porast naboja i napona na kondenzatoru kod priključka na konstantni napon izvora.

izvjesnog vremena biva taj porast sve polaganiji, tako da bi se konačna vrijednost napona u , a to je puni napon izvora U , postigla tek nakon beskonačno dugog vremena $t = \infty$. To izlazi direktno iz jednadžbe $u = U(1 - e^{-t/\tau})$, ako postavimo zahtjev $u = U$, koji će biti ispunjen ako je $(1 - e^{-t/\tau}) = 1$, ili $e^{-t/\tau} = 0$, što se može pisati $1/e^{t/\tau} = 0$, odakle slijedi $t = \infty$.

Dakako da se u praksi može smatrati kondenzator potpuno nabijenim ako je vrijednost napona u neznatno različita od U , što se prema gore izračunatim vrijednostima smije smatrati ispunjenim ako je od trenutka ukapčanja kondenzatora prošlo vrijeme koje je jednako 4 ili 5 vremenskih konstanti τ . I doista nakon $t = 5\tau$ napon na kondenzatoru u samo je za nekoliko tisućinka od U manji nego puni napon izvora U .

U odgovarajućem mjerilu može ista eksponencijalna krivulja kojom je predočen porast napona na kondenzatoru prikazati i porast naboja q do pune vrijednosti Q , kad je kondenzator potpuno nabijen. I ova vrijednost Q postići će se teoretski nakon beskonačno dugog vremena, a u praksi se zadovoljavamo redovno s vrijednošću nakon $(4 \div 5)\tau$.

Budući da je $\tau = R \cdot C$, vidimo da će trajanje nabijanja biti dulje ako su R i C veliki, dok će se pri malim vrijednostima R i C kondenzator brzo nabiti.

Grafički prikaz struje i pokazuje da se struja nabijanja mijenja tokom vremena upravo obratno. Ona od maksimalne vrijednosti $I = U/R$ postepeno pada, te

konačno (teoretski nakon $t = \infty$) postiže vrijednost nula. I ovdje smatramo da taj tok struje (strujni udarac) traje tako dugo dok se ne postigne bar približno vrijednost $i = 0$, a i to je nakon $t = (4 \div 5) \cdot \tau$.

Eksponencijalna krivulja porasta napona u prvom svom dijelu prolazi gotovo linearno, pa se za kratko vrijeme po ukopčanju može uzeti da se napon u na kondenzatoru povećava proporcionalno s vremenom. To isto vrijedi i prvi trenutak po ukopčanju za struju i , čija vrijednost od maksimalne I pada neko vrijeme gotovo linearno.

Ako bismo kondenzator koji je nabijen na napon U ispraznili preko otpora R , dobili bismo tokom ispražnjivanja promjenu napona od pune vrijednosti U na vrijednost $u = 0$, prema jednadžbi

$$u = U \cdot e^{-t/\tau}$$

a struja pri ispražnjavanju jednaka je

$$i = -\frac{U}{R} \cdot e^{-t/\tau}$$

Objek jednadžbe ćemo dobiti ako promatramo prijašnju spojnu shemu i uzmemo da za vrijeme ispražnjavanja nema izvora, a da su ploče kondenzatora priključene direktno na otpor R . U osnovnoj naponskoj jednadžbi treba, dakle, staviti $U = 0$, a kao početni uvjet za određivanje konstante integracije treba postaviti zahtjev da je u vrijeme $t = 0$ napon na kondenzatoru jednak $u = U$. Negativni predznak uz struju i znači da je smjer struje izbijanja u strujnom krugu suprotan smjeru struje pri nabijanju kondenzatora.

10.5.2. Energija nabijenog kondenzatora. Da bismo sada odredili energiju koja je sakupljena u električkom polju nabijenog kondenzatora izračunat ćemo najprije ukupnu energiju koju izvor pri nabijanju kondenzatora predaje strujnom krugu. Opći izraz za energiju $W = U \cdot I \cdot t = U \cdot Q$, dobiven za konstantno strujanje, zadržava i ovdje pri nejednolikom strujanju svoju vrijednost ako ga primijenimo na infinitezimalno malo vrijeme dt za koje možemo pretpostaviti da se struja i praktički ne mijenja. Napon istosmjernog izvora je stalno jednak U i dijeli se na dvije komponente, koje predstavljaju dijelove predane pojedinim priključenim elementima kruga R i C

$$U = i \cdot R + u$$

Od naponske jednadžbe prelazimo na energetska ako naponsku pomnožimo sa $i \cdot dt$, što je jednako dq . Pri tome množimo lijevu stranu i prvi član desne strane sa $i \cdot dt$, a drugi član desne strane sa dq , pa dobivamo

$$U \cdot i \cdot dt = i^2 \cdot R \cdot dt + \frac{q}{C} \cdot dq$$

gdje smo za napon na kondenzatoru stavili vrijednost $u = (q/C)$. $U i dt$ je diferencijal energije koju je izvor predao u strujni krug i on je sastavljen od dva dijela

$$dW_{izv} = i^2 \cdot R \cdot dt + \frac{1}{C} \cdot q \cdot dq$$

Ukupna energija W_{izv} koju je izvor dao od početka ukapćanja do trenutka kad je kondenzator potpuno nabijen dobit će se integriranjem unutar granica $t = 0$ i (teoretski) $t = \infty$. Pri tome se varijabla q drugog člana desne strane, a to je naboj na kondenzatoru, mijenja od 0 do punog naboja Q . Prema tome je

$$W_{izv} = \int_0^{\infty} i^2 \cdot R \cdot dt + \frac{1}{C} \int_0^Q q \cdot dq$$

Prvi član desne strane $\int_0^{\infty} i^2 \cdot R \cdot dt = W_{topl}$ je ukupna energija pretvorena tokom cijelog procesa nabijanja u toplinu, a drugi član je energija predana kondenzatoru za vrijeme dok mu se naboj povećao od vrijednosti 0 na punu vrijednost Q . To je, dakle, energija sakupljena u kondenzatoru, a nju smo označili kao energiju električkog polja W_{el} , pa je

$$W_{izv} = W_{topl} + \frac{1}{C} \frac{Q^2}{2}$$

Supstituiramo li: $Q = U \cdot C$ ili $C = Q/U$ dobijemo za električku energiju nabijenog kondenzatora slijedeće istovrijedne izraze

$$W_{el} = \frac{Q^2}{2C} = C \cdot \frac{U^2}{2} = U \cdot \frac{Q}{2}$$

Osvjedočit se možemo da se i W_{el} mjeri kao svaka energija jedinicom džul, jer je prema $W_{el} = U \cdot Q/2$

$$[W_{el}] = V \cdot A \cdot s = J$$

U homogenom električkom polju pločastog kondenzatora sila F je na svakom mjestu iste jakosti, pa smatramo da je energija u cijelom volumenu $V = S \cdot l$ jednolično razdijeljena. Slijedi, dakle, da je prostorna gustoća energije w , to jest količina energije po jedinici volumena, jednaka

$$w = \frac{W_{el}}{V} = \frac{C}{V} \cdot \frac{U^2}{2} = \frac{\epsilon \cdot S}{S \cdot l} \cdot \frac{U^2}{2} = \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{U^2}{l^2} = \frac{\epsilon E^2}{2}$$

a supstitucijom $D = \epsilon E$ dobiju se za gustoću energije tri istovrijedna izraza

$$w = \frac{\epsilon \cdot E^2}{2} = \frac{D \cdot E}{2} = \frac{D^2}{2 \cdot \epsilon}$$

Ovdje je gustoća energije električkog polja prikazana veličinama E i D koje se odnose samo na pojedine točke električkog polja, i zato se ove jednadžbe mogu iskoristiti i za proračun električke energije nehomogenog električkog polja. Ako nam je, dakle, nehomogeno polje zadano veličinama E i D , možemo za nj postaviti jednadžbu za gustoću energije u elementu volumena

$$w = \frac{dW_{el}}{dV} = \frac{D \cdot E}{2} = \frac{\epsilon \cdot E^2}{2} = \frac{D^2}{2 \cdot \epsilon}$$

pa će za cijeli volumen V ukupna energija biti

$$W_{el} = \int_V \frac{E \cdot D}{2} \cdot dV$$

10.5.3. Sile u električkom polju pločastog kondenzatora. Pri razmatranju mehaničkih sila i energetskih odnosa u električkom polju još je interesantno pogledati kolika će sila djelovati na element površine nabijenog tijela ako se ono nalazi u električkom polju. Tu ćemo opet zbog jednostavnijeg i lakšeg shvaćanja provesti račun za idealizirano homogeno polje pločastog kondenzatora, a dobiveni rezultat možemo primijeniti na infinitezimalno mali element površine u nehomogenom polju.

Slika 10.58 prikazuje pločasti kondenzator u kojem će se pod utjecajem električkog polja obje ploče nabijene suprotnim nabojima privlačiti, pa ako je negativna ploča nepomična, cijela pozitivna ploča će biti izvrgnuta djelovanju sile F , koja je rezultanta svih elemenata sile na pojedine električke naboje pozitivne ploče.

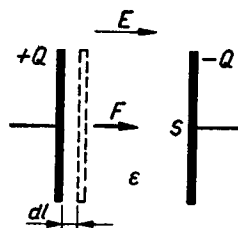
Ako zamislimo da se je u nekom položaju obiju ploča pozitivna ploča pomaknula za dl od početnog položaja, izvršila je sila F rad $dA = F \cdot dl$, za koji je potrošen ekvivalent energije električkog polja. Količina te energije bila je sadržana u volumenu $dV = S \cdot dl$ što ga je ploča opisala pri svom gibanju na putu dl .

Prema prijašnjoj jednadžbi za energiju je

$$dW_{el} = \epsilon \frac{E^2}{2} \cdot dV = \frac{\epsilon \cdot E^2}{2} \cdot S \cdot dl$$

a kako je $dA = dW_{el}$, slijedi da je

$$\frac{\epsilon E^2}{2} \cdot S \cdot dl = F \cdot dl,$$



Sl. 10.58. Sila F kojom negativna ploča kondenzatora privlači pozitivnu.

pa je za cijelu ploču S sila

$$F = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot S = \frac{Q^2}{2\varepsilon S}$$

Sila na jedinicu površine ili električki tlak jednaka je

$$\frac{F}{S} = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon} = \frac{D \cdot E}{2}$$

Vidimo da su površinski električki tlak i volumenska gustoća električke energije numerički iste veličine, jer su obje stvorene istim produktom dviju karakterističnih veličina polja: E i D .

Pri proračunu ukupne sile na neku plohu dolazi, dakako, kao faktor i površina S te plohe, dok za proračun energije sadržane u prostoru treba uzeti kao faktor još volumen toga prostora. Za nehomogeno je polje

$$F = \int_S \frac{D \cdot E}{2} dS$$

Jednadžbe

$$W_{el} = C \frac{U^2}{2} \quad \text{i} \quad W_{el} = \frac{Q^2}{2C}$$

omogućuju detaljniju analizu energetskih odnosa pri promjenljivim uvjetima u radu kondenzatora. Razmotrit ćemo dva karakteristična slučaja promjenljivih uvjeta: kad su ploče kondenzatora stalno priključene na izvor istosmjernog napona, kad je, dakle, $U = \text{konst.}$ i kad je kondenzator nabijen i odvojen od izvora, tako da je na njegovim pločama stalno $Q = \text{konst.}$

Uz konstantni napon izvora mijenjat će se s promjenom kapaciteta C direktno proporcionalno i sakupljena električka energija, pa će promjena energije polja ΔW_{el} pri promjeni ΔC biti jednaka

$$\Delta W_{el} = \frac{U^2}{2} \cdot \Delta C$$

Promotrimo prvo slučaj kad se promjena kapaciteta vrši na taj način da se pri nepromijenjenoj površini S promijenio, i to smanjio razmak ploča za Δl . Znamo da će se pri smanjivanju razmaka ploča povećati kapacitet, pa će se povećati i energija polja. Osim toga će sila F pri pomicanju na putu Δl vršiti rad ΔA . Prirast energije električkog polja i iznos energije za vršenje rada dobavlja energija izvora, time da se kondenzatoru zbog povećanog kapaciteta ΔC uz konstantni napon izvora U priveo dodatni naboj ΔQ . Prema tome je dodatna energija izvora $\Delta W_{izv} = U^2 \cdot \Delta C$, pa je

$$\Delta W_{izv} = \Delta W_{el} + \Delta W_A$$

ili

$$\Delta W_A = \Delta W_{izv} - \Delta W_{el}$$

a nakon uvrštenja

$$\Delta W_A = U^2 \Delta C - \frac{U^2 \cdot \Delta C}{2}$$

$$\Delta W_A = \frac{1}{2} U^2 \cdot \Delta C$$

Za mehanički rad ΔA potroši se, dakle, ista količina energije kao što je ona sakupljena u električkom polju.

Obrnuto bismo pri povećanju razmaka morali djelovati vanjskom silom protiv sile polja E , pa bismo time dovodili izvana cijelom sistemu i nešto mehaničke energije. Osim toga će se zbog povećanja razmaka smaniti kapacitet kondenzatora, a kraj konstantnog napona i energija električkog polja. U ovom će, dakle, slučaju oba iznosa energija: mehanička energija vanjske sile i energija polja, imati suprotan predznak, što znači da se te energije predaju izvoru. Ako je to akumulator, one će ga puniti.

Ako je nabijeni kondenzator odvojen od izvora računamo s konstantnim nabojem Q i sva zbivanja zbog promjene kapaciteta odvijaju se bez učešća izvora. Pri gibanju kondenzatorske ploče pod utjecajem sile F smanjuje se razmak među pločama i time povećava kapacitet C . Za vrijeme gibanja izvršen je rad, a energija za to ne može se sada dobiti iz izvora, već ga namiruje polje nabijenog kondenzatora. Može se pokazati da se energija električkog polja smanjila upravo za toliko koliko je potrebno da se obavi taj rad.

Pri konstantnom naboju na kondenzatoru je sila $F = Q^2/2 \epsilon S$, pa je za pomak $\Delta l = (l - l')$ potrebna energija

$$W_A = F \cdot \Delta l = \frac{Q^2}{2 \epsilon S} (l - l')$$

što se može prikazati u obliku

$$W_A = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{l}{\epsilon \cdot S} - \frac{l'}{\epsilon \cdot S} \right) = \frac{Q^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C'} \right)$$

a to je upravo jednako smanjivanju u polju kondenzatora sakupljene energije zbog promjene kapaciteta, jer je

$$W_A = \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q^2}{2C'} = \Delta W_{el}$$

Ako bismo, obrnuto, vanjskom silom htjeli protiv sile F pomicati ploču i povećati razmak za Δl , morali bismo potrošiti mehaničku energiju W_A za savladavanje sile polja F . Ta energija opet je upravo jednaka promjeni električke energije, samo je ona sada promijenjenog predznaka, što znači da se mehanička energija pretvorila u električku i predala polju kondenzatora. I doista, zbog povećanja razmaka l smanjuje se C , a time se povećava W_{el} .

Slični promjenljivi uvjeti pogona zbog promjene kapaciteta mogu se u nekom elektrostatskom sistemu s konstantnim nabojem postići i bez učešća mehaničke energije, ako na stezaljke jednog nabijenog kondenzatora priključimo drugi kondenzator. Time će se promijeniti ukupni kapacitet sistema, a kako je zbog konzervacije naboja Q konstantno, mogu se za analizu upotrijebiti gornje jednačbe. Budući da je u ovom slučaju promjena kapaciteta vezana samo uz promjenu elemenata spojne sheme, svaka promjena energije polja (a to može biti samo smanjivanje, jer se izvana ništa ne dovodi) odvija se trošenjem energije u omskom otporu kruga.

10.5.4. Odnos električke i toplinske energije pri nabijanju kondenzatora. Rješenje energetske jednačbe za nabijanje kondenzatora može se prikazati i u obliku

$$U \cdot Q = W_{\text{topl}} + \frac{U \cdot Q}{2}$$

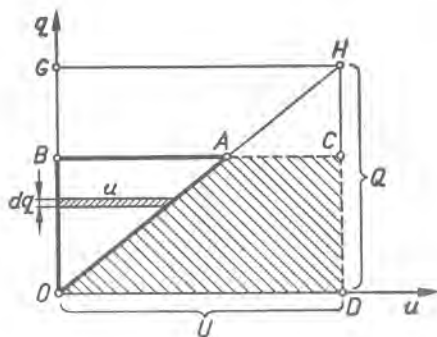
gdje je ukupna energija što ju je dao izvor do kraja procesa nabijanja prikazana u obliku

$$W_{\text{izv}} = \int_0^Q U \cdot dq = U \cdot Q.$$

Odavde slijedi da je u otporu potrošena energija

$$W_{\text{topl}} = U \cdot Q - \frac{UQ}{2} = \frac{UQ}{2}$$

Kad je proces nabijanja završen bit će, dakle, upravo toliko energije potrošeno u otporu i pretvoreno u toplinu, koliko je energije od izvora predano kondenzatoru.



Sl. 10.59. Određivanje potrošene energije za Jouleovu toplinu pri nabijanju kondenzatora.

No odnos potrošenih energija W_{topl} i W_{el} za vrijeme samog procesa nabijanja nije uvijek 1 : 1, već je svakog trenutka drugačiji, što se lako može vidjeti ako predočimo odnos napona o naboju u koordinatnom sustavu (u, q) . Zbog direktne proporcionalnosti $q = C \cdot u$ dijagram je predočen pravcem koji izlazi iz ishodišta koordinatnog sustava, a krajna točka dijagrama odgovara konačnom stanju kad je kondenzator potpuno nabijen, tada su na njegovim pločama naboj i napon postigli konačne vrijednosti Q i U , slika 10.59.

Za bilo koje drugo stanje prije završenog nabijanja, kad je na ploče od izvora predan naboj $q = OB$, postignut je napon na pločama $u = BA$. Ukupna energija koju je do tada dao izvor jednaka je $U \cdot q$, a predočena je pravokutnikom $OBCD$,

dok se u kondenzatoru sakupljena energija izračuna, zbog promjenljivog napona i naboja, kao

$$\int_0^t u \cdot i \cdot dt = \int_0^q u \cdot dq,$$

što je u dijagramu predloženo trokutom OAB . Prema tome je veći dio energije izvora do toga vremena potrošen u otporu, što je predloženo kao diferencija ovih energija četverokutom $OACD$. Tek na kraju procesa bit će $\triangle OGH = \triangle ODH$, što odgovara jednakosti energija $W_{el} = W_{topl}$, kako je i prije bilo analitički izvedeno.

10.6.

STRUJA DIELEKTRIČKOG POMAKA

Kod priključka kondenzatora na konstantni istosmjerni napon izvora U trebalo je proći neko vrijeme da se dovođenjem naboja q iz izvora na ploče stvori na kondenzatoru napon $u = U$ i time uspostavi statička ravnoteža.

U to vrijeme bili su napon i naboj na kondenzatoru promjenljivi, što je uzrokovalo promjenljivost električnog polja E i promjenljivost vektora D . U vezi s time istom će se brzinom mijenjati polarizacija u izolatoru pa možemo, koristeći jednadžbu $\sigma = \epsilon \cdot E = D$, postaviti relaciju

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dD}{dt}$$

a kako je

$$D = \epsilon_0 \cdot E + \chi \cdot \epsilon_0 \cdot E = \epsilon_0 \cdot E + P$$

slijedi da je

$$\frac{d\sigma}{dt} = \epsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt} + \frac{dP}{dt}$$

Lijeva strana jednadžbe predstavlja gustoću struje kojom se na pločama stvarao naboj, pa prema tome mora i svaki član desne strane imati to isto fizikalno značenje. Tako član desne strane dP/dt predstavlja brzinu polarizacije materije izolatora. To je u vezi s rotacijom permanentnih dipola, odnosno s formiranjem influencijom stvorenih dipola i s njihovim premještanjem u smjer polja. Prema tome taj sumand možemo lako shvatiti kao električnu struju po jedinici površine, jer se radi o fiktivnom gibanju elementarnih naboja unutar atoma i molekula.

Pribrojnik $\epsilon_0 \cdot dE/dt$ ima također dimenziju jakosti struje po jedinici površine, a nastaje zbog vremenske promjene jakosti polja u vakuumu koji je među elementarnim česticama: molekulama izolacione materije. Tu nije moguće zamisliti neko gibanje električkih naboja, jer se zbivanje odnosi na vakuum koji nema električkih naboja. Iako dakle, za to ne postoji neko fizikalno objašnjenje u vezi s osnovnom definicijom električne struje $i = dq/dt$, ipak i taj član treba smatrati, kao i pri

gibanju naboja, gustoćom električne struje, jer kako pokazuju eksperimenti uzrokovat će promjena jakosti polja i u vakuumu magnetske učinke, što je osnovna karakteristika električne struje.

Suma obaju članova — dakle dD/dt — zove se gustoća pomaćne struje u izolatoru, a naziv joj dolazi iz pojave dielektričkog pomaka, koji je doduše vezan samo uz materiju izolatora.

Pomaćna struja određuje se iz njezine gustoće, kao i provodna struja iz gustoće provodne struje

$$i_D = \frac{dD}{dt} \cdot S = \frac{d(DS)}{dt} = \frac{d\Psi_D}{dt}$$

Izvedeni odnosi pokazuju da pomaćna struja u dielektriku postoji samo kad se mijenja vektor $\mathbf{D}$, a to znači kad se mijenja napon koji stvara električko polje, dok provodna električna struja u vodljivim materijalima može postojati i pri konstantnom naponu.

U stacionarnom, konstantnom električnom polju, nema pomaćne struje iako znamo da postoji tok Ψ_D električkog pomaka.

Ako je električko polje u prostoru i vremenu promjenljivo, onda se za element površine dS izračuna jakost pomaćne struje u dielektriku

$$di_D = \frac{dD_n}{dt} \cdot dS = \frac{d}{dt}(D_n \cdot dS)$$

Možemo, dakle, reći da se u krugu priključenog kondenzatora promjenljiva provodna struja u vodljivom dijelu kruga nastavlja kao struja dielektričkog pomaka u izolaciji među pločama, tako da se opet dobiva zatvoren strujni krug.

11.

MAGNETSKA POLJA

11.1.

MAGNETSKE VELIČINE

11.1.1. Permanentni i elektromagneti. Treći osnovni učinak električne struje je stvaranje magnetskog polja u okolišu vodiča i u samome vodiču kroz koji prolazi električna struja. Do tog otkrića došao je posve slučajno god. 1820. H. C. Oersted, a istraživanja koja su nakon toga proveli Ampère, Faraday i Maxwell nedvojbeno su utvrdila da i magnetizam permanentnih magneta ima svoj uzrok u elementarnim strujama unutar molekula samog magneta. Time je u nauci odbačeno mišljenje da postoje, slično električkim česticama, i pozitivne i negativne magnetske mase koje bi se nalazile na polovima permanentnih magneta.

Otprije nam je poznato da električna struja nastaje u vodiču zbog napona, tj. zbog razlike potencijala koja vlada među pojedinim točkama na vodiču. Istovremeno će se zbog te potencijalne razlike u okolišnom izolacionom prostoru oko vodiča stvoriti i električko polje. Treba doista uvijek imati u vidu da uz magnetsko polje postoji i električko, dakle neko elektromagnetsko polje.

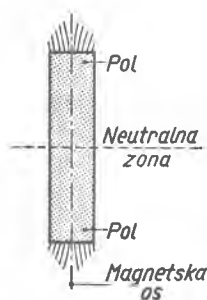
U dijelu o elektrostatskom polju promatrali smo samo električko polje kao jednu komponentu elektromagnetskog polja, jer druga komponenta nije postojala, budući da su u elektrostatici električki naboji u mirovanju. Općenito se može i inače računati samo s električkim poljem, ako je magnetska komponenta tako mala da se smije zanemariti. Isto se tako može razmatrati i samo magnetsko polje, kao naročit slučaj elektromagnetskog polja, ako se smije električka komponenta zanemariti.

Sve pojave koje se odnose na istovremeno sudjelovanje električkog i magnetskog polja bit će obuhvaćene u teoriji elektromagnetskog polja.

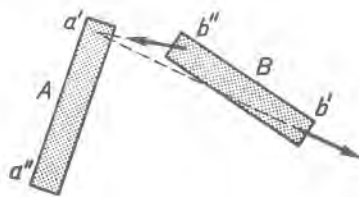
Prelazeći sada na detaljnije razmatranje, možemo reći da magnetskim poljem nazivamo prostor u kome se opažaju naročite pojave, koje nazivamo učincima magnetskog polja. Dva su osnovna učinka magnetskog polja, osobito važna za cjelokupnu elektrotehniku. To je u prvom redu učinak mehaničkih sila kojima npr. magneti djeluju jedan na drugog ili jedan magnet na meko željezo. Druga je pojava nazvana elektromagnetska indukcija.

Uvodna razmatranja o magnetskom polju, te glavne veličine kojima se ono karakterizira, možemo lako izvesti na temelju bilo kojeg od osnovnih učinaka magnetskog polja. Kao prvo, objasniti ćemo kojom silom djeluje jedan permanentni magnet (magnetska šipka) na drugi magnet, i na neko nemagnetičko meko željezo.

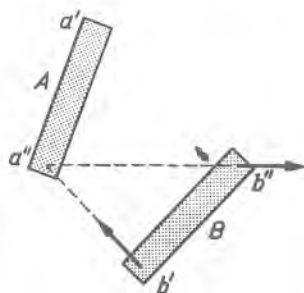
Na osnovi pokusa sa slike 11.1 vidi se da magnet najviše sitnih čestica mekog željeza privuče na svojim krajevima, dok se u sredini magnetskog štapa ne opaža neka magnetska sila. Krajevi magneta, gdje je učinak privlačnih sila najveći, zovu se polovi magneta, a sredina neutralna zona. Spojnica obaju polova naziva se magnetska os. Meko željezo biva, dakle, jednako privučeno na jednom i na drugom magnetskom polu, no drugačije su prilike ako se polovima jednog magneta približe polovi kojeg drugog magneta.



Sl. 11.1. Permanentni magnet u obliku šipke.

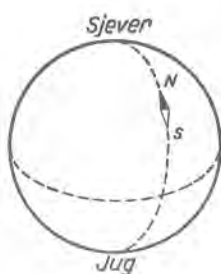


Sl. 11.2. Privlačne i odbojne sile dvaju magneta.

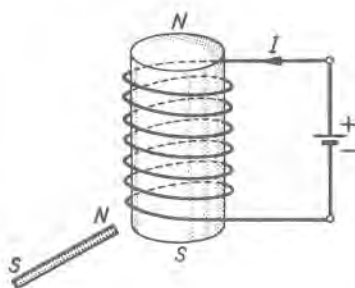


Sl. 11.3. Određivanje polariteta magnetskih polova.

Tu se lako može vidjeti, slika 11.2, da će npr. jedan te isti pol a' magneta A privući pol b'' magneta B , dok će drugi pol b' biti od a' odbijen. Zbog toga se kaže da su polovi b' i b'' magneta B suprotno magnetični, pa bi ih se moglo označiti matematičkim simbolima $+$ i $-$.



Sl. 11.4. Orijentiranje magnetske igle na Zemlji.



Sl. 11.5. Elektromagnet.

Daljnji pokus, slika 11.3, pokazuje da i drugi pol a'' magneta A djeluje na polove magneta B suprotnim silama, ali sada obrnuto nego što je djelovao pol a' , pa odavde zaključujemo da i magnet A ima suprotne magnetske polove.

Ako treći magnetski štap, C , iskoristimo za uspoređivanje polova magneta A i B , možemo one polove magneta A i B označiti npr. oznakom $+$ koje isti pol magneta C privlači, a oznakom $-$ one koje taj isti pol odbija.

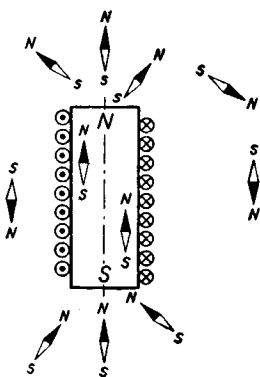
Općenito možemo, dakle, na osnovi gornjih pokusa međusobno djelovanje magnetskih polova obaju magneta prikazati ovako: istoimeni polovi se odbijaju a raznoimeni privlače.

Odavna je već opaženo da i Zemlja djeluje na magnete privlačnim silama, jer se mala magnetska igla (kompas) uvijek orijentira u smjeru sjever – jug. Tako je onaj kraj, tj. pol magnetske igle, koji je okrenut prema sjeveru označen kao sjeverni pol (N) magnetske igle, a suprotni pol, koji pokazuje prema jugu, kao južni pol (S) te igle. Te oznake magnetskih polariteta zadržale su se općenito i u nauci iako u matematičkim relacijama za razlikovanje polova koristimo oznake $+$ i $-$, slika 11.4.

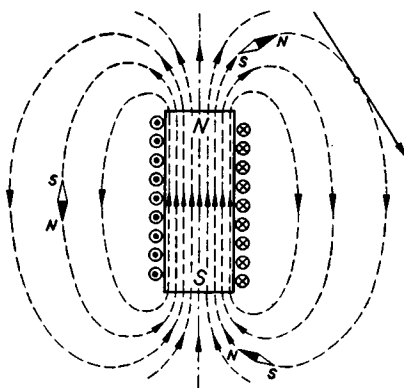
Budući da se prema prijašnjem pravilu o djelovanju magnetskih sila suprotni magnetski polovi privlače, zaključujemo da se na sjevernom geografskom polu Zemlje nalazi južni magnetski pol i obratno, na južnom geografskom polu nalazi se sjeverni magnetski pol Zemlje.

Već su prva istraživanja Ampèrea pokazala da se i svitak protjecan električnom strujom vlada isto kao permanentni magnet, pa ga prema tome možemo smatrati također magnetom, a nazivamo ga i elektromagnetom, slika 11.5.

11.1.2. Magnetske silnice. Predodžbu o magnetskom polju u okolišu nekog magneta dobit ćemo ako malom magnetskom iglom (kompasom) ispitujemo u prostoru oko magneta od točke do točke silu koja će otkloniti iglu iz njenog normalnog položaja sjever-jug. Tako će se u magnetskom polju elektromagneta (kao



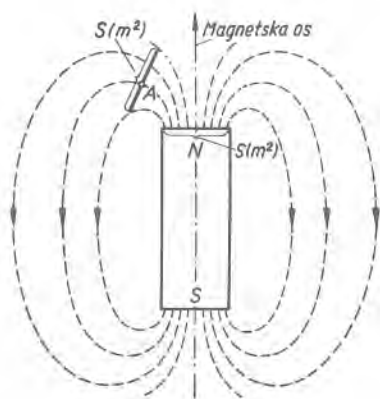
Sl. 11.6. Ispitivanje magnetskog polja svitka pomoću magnetske igle.



Sl. 11.7. Magnetske silnice elektromagneta.

i u polju permanentnog magneta) na različitim mjestima postavljene magnetske igle orijentirati kako to pokazuje slika 11.6. Još detaljniju sliku daju sitne čestice željezne piljevine koje u magnetskom polju magneta i same postaju sitne magnetske iglice, pa će se one poredati u nizove, u linije, koje točno pokazuju

kako djeluje magnetska sila na pojedinim mjestima prostora. Te linije zovemo silnicama magnetskog polja i one nam, prema ideji Faradaya, daju o magnetskoj sili, koja je vektorska veličina, oba karakteristična podatka: veličinu i smjer, slika 11.7. Naime, tangenta na silnicu u promatranoj točki pokazuje pravac smjera sile, a dogovorno se uzima kao smjer sile onaj smjer na tangenti u kojem će se



Sl. 11.8. Magnetske silnice permanentnog magneta.

otkloniti N pol male magnetske igle. To se onda označuje tako da se na silnicu ucrta strelica odgovarajuće otklonu N pola kompasa. Veličinu pak sile na svakom mjestu polja pokazuje u izvjesnom mjerilu gustoća magnetskih silnica koju ima polje na tome mjestu. Da je to ispravno vidi se odatle što su silnice najgušće na polovima magneta, gdje je već na osnovi pokusa poznato da je i magnetska sila najjača.

Možemo reći da raspored silnica u magnetskom polju magneta izgleda tako kao da silnice iz N pola izlaze te obilazeći prostor u raznim linijama ulaze u magnet na S polu. A što se tiče unutrašnjosti magneta, vidi se da sve silnice u punom iznosu prolaze kroz magnet i to od S pola prema N polu. To vrijedi ne samo za elektromagnet, već i za permanentni magnet slika 11.8.

Zaključujemo, dakle, da su magnetske silnice same u sebe zatvorene linije bez ikakva početka i svršetka, za razliku od linija elektrostatskog polja koje su izvirale na pozitivno nabijenim tijelima, a ponirale na negativno nabijenim tijelima.

11.1.3. Magnetski tok i gustoća silnica. Skup linija polja koje prolaze kroz neku plohu naziva se općenito tok polja kroz tu plohu, pa se tako i u magnetskom polju ukupni broj silnica kroz zadanu plohu zove magnetski tok a označuje slovom Φ . Skup svih silnica koje prolaze kroz poprečnu plohu S_0 u unutrašnjosti magneta, a sve na slici prolaze i na polovima magneta, zove se ukupni tok magneta. Taj tok Φ_0 može, dakle, reprezentirati magnetičnost magneta kao što se to prije označivalo magnetskim masama.

Osim magnetskog toka Φ , što je ukupan broj silnica kroz neku promatranu plohu S , još je, kako smo spomenuli veoma važna veličina magnetskog polja gustoća silnica, koju označujemo slovom B . Na slici se vidi da između Φ i B postoji međusobni odnos

$$B = \frac{\Phi}{S} \quad \text{i} \quad \Phi = B \cdot S$$

gdje S predstavlja površinu okomitu na smjer magnetskih silnica.

Nadalje se vidi da je u unutrašnjosti magneta i na polovima gustoća B najveća, pa je i sila najveća, dok će negdje u prostoru izvan magneta zbog razilaženja silnica biti gustoća B manja, pa je tamo i sila manja.

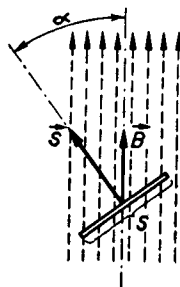
Općenito se u teoriji intenzitet ili jakost polja određuje prema učinku što ga polje vrši u promatranoj točki dotičnog polja. U magnetskom polju zaključujemo o jakosti polja prema stvorenoj sili, a što znači prema gustoći silnica. Kažemo, dakle, da gustoća B predstavlja jakost magnetskog polja.

Znamo da je sila vektorska veličina, pa je tako i sila u magnetskom polju vektor. Budući da je ona u svakoj točki polja stvorena pod utjecajem jakosti polja B , moramo i veličinu B smatrati vektorom, pa je označujemo simbolom $\mathbf{B}$.

Za magnetsko polje kažemo da je homogeno ako je veličina $\mathbf{B}$ u svakoj točki promatranog prostora jednaka po veličini i po smjeru, a ako se $\mathbf{B}$ mijenja od točke do točke, polje je nehomogeno.

Tok Φ homogenog magnetskog polja kroz površinu S , koja je okomita na smjer vektora $\mathbf{B}$ (dakle na magnetske silnice), izračuna se, kako je gore rečeno, po jednadžbi $\Phi = B \cdot S$. Ako silnice ne ulaze na plohu S okomito, već s normalom na plohu tvore kut veći od nule $\alpha > 0$, onda je za proračun toka mjerodavna samo efektivna površina $S \cdot \cos \alpha$, pa je prema slici 11.9 tok jednak

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$



Sl. 11.9. Magnetski tok homogenog magnetskog polja.

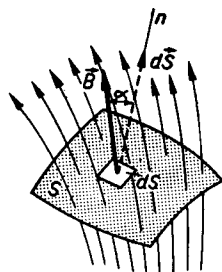
Kako se iz gornjih izvoda vidi tok Φ ovisi o položaju, dakle o usmjerenju plohe S , pa se može i ploha S simbolički prikazivati vektorom $\mathbf{S}$, čija je veličina jednaka površini plohe S , a smjer toga vektora je okomit na plohu S , slika 11.9.

Time možemo onda jednadžbu kojom se izračunava tok prikazati kao skalarni produkt vektora $\mathbf{B}$ i vektora $\mathbf{S}$, što se označuje

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$$

U nehomogenim poljima ne može se tok Φ kroz zadanu plohu S računati po prijašnjoj jednadžbi, jer B nije u svakoj točki plohe S iste vrijednosti. Ta jednadžba vrijedi, međutim, općenito ako promatramo infinitezimalno mali element dS bilo kakve plohe S , jer se za nj može uzeti da mu je B po cijeloj površini konstantno. Tada dobivamo samo element, diferencijal, toka koji je jednak

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$



Sl. 11.10. Magnetski tok nehomogenog magnetskog polja.

a ukupni tok Φ kroz cijelu plohu S dobije se sumiranjem svih elemenata, dakle prema slici 11.10.

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Pri numeričkom izračunavanju toka Φ moramo, dakako, skalarni produkt $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ prikazati kao umnožak $B \cdot dS \cdot \cos \alpha$ i tako dobivamo

$$\Phi = \int_S B \cdot dS \cdot \cos \alpha$$

Faktor $\cos \alpha$ možemo pridružiti veličini B , pa nam

$$B \cdot \cos \alpha = B_n$$

predstavlja samo normalnu komponentu vektora $\mathbf{B}$ na površinu dS i onda jednadžba za Φ poprima oblik

$$\Phi = \int_S B_n \cdot dS$$

Ako bismo sada prema gustoći silnica htjeli i brojčano odrediti silu i time jakost polja, izgledalo bi već na prvi pogled takvo računanje nešto posve neodređeno, jer se slika magnetskog polja može nacrtati sa po volji odabranim većim ili manjim ukupnim brojem silnica, što pri pokusu ovisi o tome kako je sitna željezna pilovina. Moguće je, naime, uvijek zamisliti između dviju silnica još jednu ucrtanu silnicu.

Ipak nam i slika polja nacrtana bilo kojim ukupnim brojem silnica može dati uvid u gustoću i prema tome jakost magnetskog polja na pojedinim mjestima u polju, ali to, dakako, samo relativno u odnosu na jakost polja prema jednom referentnom mjestu, na primjer prema jakosti polja na samom polu magneta.

I doista, ako npr. prema slici 11.8 iz površine S magnetskog pola izlazi 9 silnica a na nekom mjestu A ih kroz istu površinu S prolazi samo 3, očito je gustoća u A trećina one na polu, pa su i sila i jakost polja samo trećina one na polu. Ako udvostručimo broj silnica preciznijim crtanjem, gustoća će se na polu i u točki A podvostručiti, ali odnos gustoća na oba mjesta ostaje isti. Vidimo da doista slika polja crtana bilo kojim ukupnim brojem silnica služi dobro za prosuđivanje relativne prostorne promjene jakosti polja.

11.1.4. Jedinice za mjerenje toka i gustoće. Da dobijemo apsolutni podatak o tome kolika je jakost polja na nekome mjestu moramo, dakako, prethodno izmjeriti apsolutni iznos jednog od učinaka polja. To bismo mogli obaviti tako da izmjerimo mehaničku silu kojom polje djeluje na magnetsku iglu ili, što je s električnog stanovišta jednostavnije, da numerički odredimo učinak elektromagnetske indukcije.

Upravo ćemo spomenutim načinom, pomoću elektromagnetske indukcije, dobiti i jedinice za mjerenje osnovno uvedenih magnetskih veličina Φ i B . Zato je potrebno najprije objasniti s nekoliko riječi fizikalnu pojavu: elektromagnetsku indukciju, iako su učinci magnetskog polja, pa i elektromagnetska indukcija, u nastavku mnogo opširnije razmotreni.

Elektromagnetska indukcija je pojava da se pri promjeni magnetskog toka Φ što ga jedan zavoj obuhvaća stvara u zavoju napon koji se naziva inducirani napon e . Kako pokazuju pokusi, veličina toga napona zavoja ovisi samo o brzini promjene magnetskog toka, pa se njegov iznos može prikazati jednačbom

$$e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Stavimo li zavoj na promatrano mjesto u magnetskom polju tako da kroz njega prolazi tok Φ i ako zavoj onda odstranimo iz polja da u njemu nestane toka izvršili smo promjenu toka od Φ na nulu, dakle je $\Delta\Phi$ upravo jednako Φ . Mjerenjem inducirano napona i na osnovi proteklog vremena dobiva se tražena vrijednost toka Φ . U principu* može se, dakle, tok Φ mjerenjem inducirano napona odrediti po apsolutnom iznosu, a jedinica kojom se mjeri tok Φ slijedi iz jednačbe $e = \Delta\Phi/\Delta t$, ako je napišemo za jedinice

$$[\Phi] = [e] \cdot [t] = \text{V} \cdot \text{s} = \text{voltsekunda}$$

Magnetski tok mjeri se u internacionalnom sistemu jedinica jedinicom voltsekunda, koja se u počast fizičaru Weberu zove veber i označuje slovima Wb. Prema tome, magnetski tok što ga obuhvaća jedan zavoj ima vrijednost 1 Wb, ako pri jednoličnom nestajanju toga toka u vremenu od 1 sekunde bude u zavoju inducirani napon od 1 volta

$$\text{Wb} = \text{V} \cdot \text{s}$$

Jedinica za gustoću magnetskog toka B određuje se prema poznatim jedinicama veličina koje ulaze u jednačbu

$$B = \frac{\Phi}{S}$$

a ta se jedinica u počast Nikoli Tesli zove tesla i označuje slovom T. Prema tome, gustoću 1 T imat će magnetski tok ako kroz površinu 1 m² prolaze okomito silnice homogenog magnetskog polja čiji je tok Φ jednak 1 Wb

$$T = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad \text{ili} \quad T = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

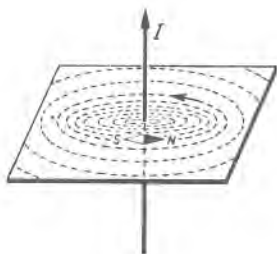
U cgs sistemu jedinica mjeri se magnetski tok Φ jedinicom maksvel (M), a gustoća B jedinicom gaus (G). Međusobna povezanost ovih jedinica, s gore izvedenim internacionalnog sistema, dana je relacijama

$$\begin{aligned} 1 \text{ M} &= 10^{-8} \text{ V} \cdot \text{s} & \text{ili} & & \text{V} \cdot \text{s} &= 10^8 \text{ M} \\ 1 \text{ G} &= 10^{-4} \text{ T} & \text{ili} & & \text{T} &= 10^4 \text{ G} \end{aligned}$$

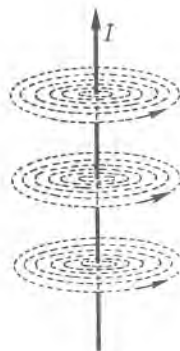
* Detaljniji postupak kako se u praksi provodi ovo mjerenje bit će objašnjen u predmetu: Električka mjerenja.

11.1.5. Slika magnetskog polja, pravilo desnog vijka. Poznavajući kako se mjere magnetske veličine i kako se magnetsko polje može prikazati silnicama, lako ćemo istražiti kakva se polja dobivaju od električne struje koja prolazi različito oblikovanim vodičem.

Kao prvo, uzet ćemo u razmatranje dug, ravni vodič protjecan strujom, slika 11.11, i odrediti njegovo magnetsko polje. Zbog aksijalne simetrije jasno je samo po sebi da će u svim točkama koje su jednako udaljene od vodiča jakost polja biti



Sl. 11.11. Slika magnetskog polja ravnog vodiča protjecanog strujom.

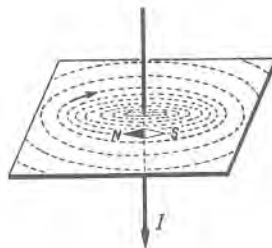


Sl. 11.12. Ukupno magnetsko polje ravnog vodiča protjecanog strujom.

jednaka, pa će se silnice, ako ih promatramo u jednoj ravni okomitoj na vodič, formirati u koncentrične kružnice sa središtem u osi vodiča. Kako je uzrok stvaranju magnetskog polja struja u vodiču, bit će jakost polja, i time gustoća silnica, najveća u najvećoj blizini uz vodič, a što se više udaljujemo od njega bit će polje slabije i silnice rjeđe.



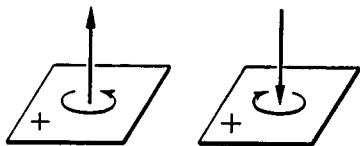
Sl. 11.13. Pravilo prstiju desne ruke.



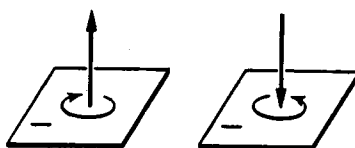
Sl. 11.14. Smjer magnetskog polja ovisi o smjeru struje.

To dokazuje i slika polja realizirana pomoću željezne pilovine nasute na ravninu papira položenu okomito na vodič. Ista slika polja dobiva se i u ostalim okomitim ravninama, pa će tako ukupno magnetsko polje ravnog vodiča biti predloženo kružnicama na koncentričnim valjcima oko vodiča protjecanog strujom, slika 11.12.

Smjer magnetskog polja, tj. magnetske sile, određuje se opet pomoću male magnetske igle, a pokus pokazuje da će se ona orijentirati u polju onako kako je naznačeno na slici 11.11, i taj smjer se označi strelicama na magnetskim silnicama. Lako se može zapamtiti da će uz zadani smjer struje biti smjer magnetskog polja povezan pravilom desnog vijka ili pravilom prstiju desne ruke, slika 11.13. Smjer magnetskog polja odgovara, naime, smjeru vrtnje desnog vijka, ako je smjer struje u pravcu pomicanja vijka duž njegove osi.



Sl. 11.15. Pozitivno geometrijsko orijentiranje.



Sl. 11.16. Geometrijski negativno orijentirani smjerovi.

Promijenimo li prema slici 11.14 smjer struje tako da ona teče suprotno, promijenit će se i smjer silnica, tj. smjer magnetskog polja. Vidimo, dakle, da suprotno protjecana struja stvara suprotno usmjereno magnetsko polje. Ova povezanost smjera električne struje ravnog vodiča i smjera magnetskog polja stvorenog oko toga vodiča naziva se prema dogovoru geometrijski pozitivno orijentiranje pravocrnog i rotacionog smjera, slika 11.15.

Ako su pak u nekoj pojavi dvije fizikalne veličine i to jedna u smjeru pravca, a druga u vrtlogu oko pravca međusobno povezane pravilom lijevog vijka, kažemo da su one geometrijski suprotno, dakle negativno, orijentirane, slika 11.16.

Ako se dva vodiča protjecana istom strujom, ali suprotnih smjerova, nalaze jedan uz drugi, bit će u točki *A*, sl. 11.17, koja je praktički jednako udaljena od oba vodiča, sile obiju struja jednake, ali suprotno usmjerene, pa će njihov rezultantni učinak biti jednak nuli. Tako dolazimo do ovog važnog zaključka u pogledu stvaranja magnetskog polja električnom strujom: magnetski učinak je nedjeljiv pratilac električne struje i on se nikako ne može izbjeći, ali se može poništiti strujom suprotna smjera.

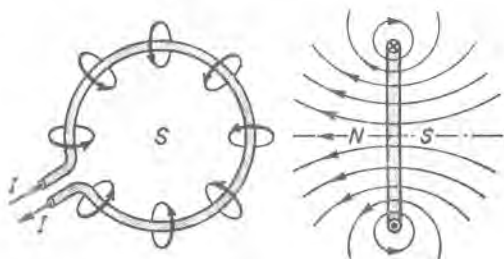


Sl. 11.17. Bifilarni vodič.

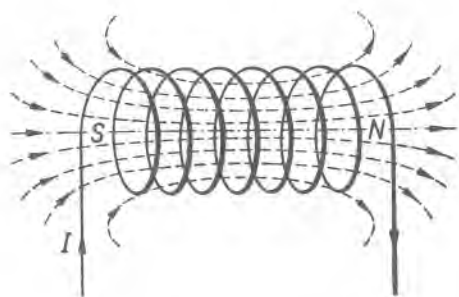
Budući da se magnetsko polje naglo oslabljuje što se više udaljujemo od vodiča protjecanog strujom, ne će se u praksi za stvaranje jakih magnetskih polja upotrebljavati ravni vodiči. Prilike se, međutim, bitno mijenjaju ako se umjesto ravnog vodiča protjecanog strujom uzme vodič savinut u jedan zavoj. U tom će slučaju, kako se na slici 11.18 vidi, sve silnice magnetskog toka biti prisiljene da prolaze kroz površinu *S* što je okružuje zavoj, jer se ni jedna silnica ne može zatvoriti izvan te površine. Time je gustoća silnica na površini *S* znatno povećana, pa se dobiva znatno jače magnetsko polje.

Sve silnice izlaze na jednoj strani iz plohe zavoja, a isto tako i sve ulaze opet na drugoj strani te plohe, pa se ovakav zavoj protjecan strujom može smatrati magnetskom pločom ili magnetskim listom koji na jednoj strani ima pol *N*, a na drugoj pol *S*.

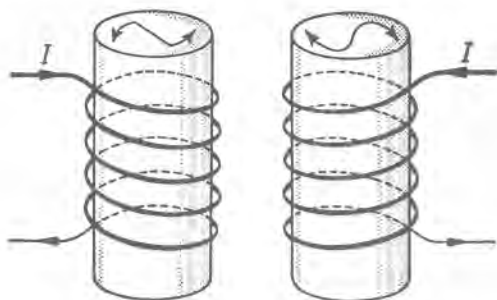
Polaritet magnetskog polja magnetskog lista vezan je sa smjerom struje u zavoju prema sl. 11.18, gdje je prikazan zavoj u presjeku, $\odot$ označuje smjer struje koja izlazi iz nacrtne ravnine, a $\otimes$ označuje smjer struje koja ulazi u nacrtnu ravninu.



Sl. 11.18. Magnetsko polje zavoja protjecanog električnom strujom.



Sl. 11.19. Određivanje smjera magnetskog polja svitka protjecanog električnom strujom.



Sl. 11.20. Strelice ucrtane na oznake N i S magnetskih polova označuju smjer električne struje.

Još jača magnetska polja dobit će se ako se umjesto jednog zavoja uzme svitak sa N zavoja, sl. 11.19. Tu se magnetska polja svih zavoja potpomažu i ukupni stvoreni tok Φ rezultat je djelovanja svih zavoja. Na slici se vidi da je tok Φ svitka potpuno sličan magnetskom toku magnetskog štapa, pa se zato svitak protjecan strujom i naziva elektromagnet. I ovdje se može pomoću sitne željezne piljevine odrediti slika magnetskog polja, a pomoću magnetske igle smjer polja. Silnice na jednom kraju svitka ulaze u svitak, a na drugom izlaze iz njega i ti krajevi su magnetski polovi elektromagneta, čiji se polaritet može odrediti prema smjeru u kojem struja obilazi svitak, kako je prikazano na slici 11.20.

Magnetski tok svitka predočen je zatvorenim silnicama koje su jedino unutar svitka, ako su zavoji gusto namotani jedan do drugoga, paralelne, i jedino u sredini unutar svitka predočuju homogeno polje. Izvan svitka silnice se razilaze na sve strane, pa je izvan svitka polje nehomogeno.

Ova tri opisana primjera magnetskih polja što ih je stvorila struja prolazeći kroz različito oblikovane vodiče pružila su nam samo kvalitativan uvid u odnos struje i stvorenog magnetskog polja. Da bismo saznali kvantitativne odnose između jakosti struje kao uzroka i magnetskog polja kao posljedice treba vršiti mjerenja, jer kao uvijek u novim istraživanjima, i ovdje je jedino eksperiment izvor saznanja.

Treba, dakle, mjeriti sve veličine koje se odnose na svitak protječan strujom, te izmjeriti sve što karakterizira tok Φ . Velika poteškoća je u tom pogledu nehomogenost magnetskog polja svitka prema slici 11.19, jer iz slike polja ne može se saznati što treba uzeti kao duljinu toka Φ (jedna se silnica, i to ona koja se poklapa s magnetskom osi, zatvara čak u beskonačnosti!), a što kao poprečnu dimenziju toka.

11.2.

MAGNETSKI KRUG

11.2.1. Magnetsko polje torusnog svitka.

Da bismo dobili dimenziono potpuno definiran i mjerenu pristupačan tok Φ , još ćemo jednom preoblikovati vodič kroz koji prolazi struja što stvara tok i to tako da svitak savinemo u jedan torus, slika 11.21.

Ako je torusni svitak, osim toga, izrađen tako da su svi zavoji namotani gusto jedan uz drugi, te ako je poprečni presjek svitka znatno manji u odnosu na njegovu duljinu, možemo uzeti da će se sve silnice zatvoriti samo unutar svitka i da je tok Φ u svitku homogen.

Ovakvo u konačnosti zatvoreno magnetsko polje možemo lako izmjeriti, pa kao duljinu toka Φ uzimamo srednju duljinu l magnetske silnice. Poprečni presjek toka jednak je poprečnom presjeku svitka S .

Veličinu toka Φ možemo saznati već spomenutim mjerenjem induciranog napona u pomoćnom zavoju, ako prekidanjem struje mijenjamo magnetski tok Φ .

Mjerenja pokazuju, slika 11.21, da tok Φ ovisi

direktno proporcionalno o jakosti struje I (A)

direktno proporcionalno o broju zavoja N

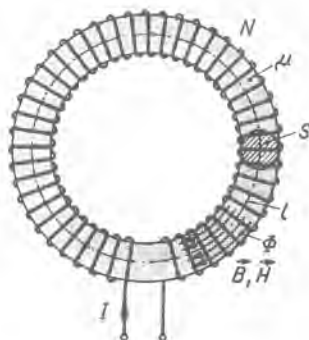
direktno proporcionalno o poprečnom presjeku S (m²)

indirektno proporcionalno o duljini l (m)

te da ovisi još i o tome čime je ispunjena šupljina svitka, dakle prostor u kojem će se formirati silnice magnetskog toka. Tamo možemo staviti različite materijale, čak ostaviti vakuum, pa će tok Φ ovisiti još i o faktoru μ koji karakterizira prostor, odnosno vrst materijala koji ispunjava šupljinu svitka.

Gornja riječima prikazana međusobna ovisnost može se matematički izraziti jednadžbom

$$\Phi = \frac{I \cdot N \cdot S}{l} \cdot \mu$$



Sl. 11.21. Magnetsko polje torusnog svitka.

Zbog toga što se ova materijalna konstanta μ uzima kao faktor proporcionalnosti, vidimo da će se u materijalima koji imaju veće μ uz isto $I \cdot N \cdot S/l$ stvoriti i veći magnetski tok Φ , pa je zato konstanta μ dobila naziv magnetska provodljivost ili magnetska permeabilnost.

Radi lakše interpretacije gornje jednadžbe dat ćemo joj oblik

$$\Phi = \frac{I \cdot N}{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S}}$$

koji podsjeća na Ohmov zakon za jakost električne struje u strujnom krugu

$$I = \frac{E}{\rho \cdot \frac{l}{S}} = \frac{E}{\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{S}} = \frac{EMS}{R}$$

Kao što je jakost struje I ovisna o elektromotornoj sili i o električkom otporu strujnog kruga, tako se može reći da i veličina magnetskog toka Φ ovisi o magnetomotornoj sili i o magnetskom otporu magnetskog kruga. Pri tome se smatra da umnožak $\Theta = I \cdot N$ predstavlja magnetomotornu silu, dakle uzrok stvaranju toka, a izraz u nazivniku $R_m = (1/\mu) \cdot (l/S)$ magnetski otpor magnetskog kruga, pa se može napisati

$$\Phi = \frac{I \cdot N}{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S}} = \frac{\Theta}{R_m}$$

Pogled na ovu jednadžbu pokazuje da pri izvjesnoj nepromijenjenoj konstrukciji magnetskog kruga ($R_m = \text{konst}$) tok Φ ne ovisi samo o jakosti struje I , već i o broju zavoja N svitka, pa se zato taj umnožak $\Theta = I \cdot N$ često naziva broj amper-zavoja svitka i označuje sa AZ, ali dimenziono se, dakako, mjeri samo jedinicom amper, jer je broj zavoja N bezdimenzionalan broj.

Tako je moguće npr. 100 AZ ili ukupno protjecanje od 100 A postići strujom od 10 A kroz 10 zavoja, i sa znatno slabijom strujom od 1 A, ali sa 100 zavoja.

11.2.2. Magnetska permeabilnost. U izrazu za magnetski otpor $R_m = (1/\mu) \cdot (l/S)$ vidimo da konstanta μ dolazi u nazivniku, pa je magnetski otpor obrnuto proporcionalan veličini μ , što je i u skladu sa značenjem te veličine, za koju smo već spomenuli da označuje specifičnu magnetsku provodljivost.

Jedinice za mjerenje magnetskih veličina R_m i μ dobiju se iz dimenzionih odnosa prema gornjim jednadžbama.

Tako je

$$R_m = \frac{\Theta}{\Phi} = \frac{I \cdot N}{\Phi}$$

pa je jedinica kojom se mjeri magnetski otpor

$$[R_m] = [I \cdot N] : [\Phi] = \text{A/Vs} = \text{S} \cdot \text{s}^{-1}$$

Za mjerenje magnetske permeabilnosti dobiva se jedinica iz odnosa

$$\mu = \frac{1}{R_m} \cdot \frac{l}{S}$$

što daje

$$[\mu] = \frac{V \cdot s}{A} \cdot \frac{m}{m^2} = \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$$

Vrijednost permeabilnosti μ za različite materijale predočuje se u odnosu na permeabilnost u vakuumu μ_0 , koja je jedna od osnovnih fizikalnih konstanta. Mjerenja pokazuju da je

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$$

Za razne materijale permeabilnost μ predočuje se jednadžbom

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0$$

gdje je μ_r relativna permeabilnost za dotični materijal, a to je bezdimenzionalan broj, koji samo pokazuje koliko puta će se uz iste prilike povećati tok Φ ako se umjesto u vakuumu magnetski tok stvara u promatranom materijalu.

Iako izvedene jednadžbe za magnetski krug pokazuju potpunu sličnost s jednadžbama električkog strujnog kruga, ne smije se ova formalna analogija proširiti i dalje, pa zamišljati da su i fizikalna zbivanja u magnetskom krugu analogna onima u električkom strujnom krugu.

Postoji, naime, bitna razlika između električne struje i magnetskog toka. Dok je električna struja doista dinamična pojava, jer predstavlja gibanje električkih čestica, magnetski tok nije neko gibanje, već samo izvjesno energetske stanje prostora stvoreno električnom strujom.

U daljnjim razmatranjima pretpostavit ćemo najprije da je magnetsko polje stvoreno u vakuumu, pa će zato u jednadžbama doći kao permeabilnost prostora konstantni faktor μ_0 . Budući da su u pogledu stvaranja magnetskog polja gotovo jednake prilike u zraku kao i u vakuumu, vrijedit će svi izvodi dobiveni za vakuum također i za zrak.

11.2.3. Magnetska uzbuda. Osnovnu jednadžbu za magnetski tok torusnog svitka

$$\Phi = \frac{I \cdot N \cdot S \cdot \mu_0}{l} = \frac{MMS}{R_m}$$

možemo preoblikovati tako da je s obje strane podijelimo s površinom S , pa dobivamo

$$\frac{\Phi}{S} = \frac{I \cdot N}{l} \cdot \mu_0$$

pri čemu razlomak na lijevoj strani označuje magnetsku gustoću B , a razlomak na desnoj strani jednadžbe označimo skraćeno slovom H , pa je

$$B = \mu_0 \cdot H \quad \text{i} \quad H = \frac{I \cdot N}{l}$$

Novouvedena veličina H pokazuje koliko od ukupnih uzбудnih amperzavoja IN otpada samo na jedinicu duljine magnetskog toka i ona se mjeri jedinicom A/m, tj. brojem ampera po metru.

Posljednje dvije jednadžbe mogu se riječima objasniti ovako: zbog magnetomotorne sile IN prostor je magnetski uzbuđen, a mjera te uzbuđene u pojedinim točkama prostora jest veličina H , i ona će već prema permeabilnosti prostora u promatranoj točki prostora stvoriti magnetsko polje gustoće B . Zato se veličina H naziva magnetska uzbuđena.

Budući da je stvorena gustoća B vektor, a faktor μ_0 skalar, mora se i veličini H pripisati vektorski karakter, pa se gornja jednadžba može pisati u obliku

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H}$$

U vakuumu su dakle, $\mathbf{H}$ i $\mathbf{B}$ istosmjerni vektori.

Promatrajući nadalje odnose veličina magnetskog kruga možemo u analogiji s jednadžbama za električni strujni krug reći da se sva magnetomotorna sila IN potrošila pri stvaranju toka Φ , da bi se savladao magnetski otpor R_m po cijeloj duljini l . To vidimo ako osnovnu jednadžbu $\Phi = IN : R_m$ napišemo u obliku

$$IN = \Phi \cdot R_m$$

koja nas sjeća na II Kirchhoffov zakon za električni strujni krug

$$E = I \cdot R$$

Iz jednadžbe $H = I \cdot N / l$ izlazi da je

$$I \cdot N = H \cdot l$$

pa prema tome umnožak $H \cdot l$, koji je jednak $\Phi \cdot R_m$, predstavlja magnetski napon V koji djeluje na cijeloj duljini l magnetskog toka

$$H \cdot l = V$$

11.2.4. Zakon protjecanja. Gornja jednadžba za proračun magnetskog napona izvedena je za magnetsko polje torusnog svitka i odnosi se na zatvorenu silnicu duljine l . U tom slučaju je polje homogeno, pa su gustoća B i time veličina H u svim točkama na cijeloj duljini silnice l iste vrijednosti. Zahvaljujući baš ovim osobito jednostavnim i pravilnim prilikama u homogenom polju omogućeno je da se dođe do gornje jednadžbe koja u biti prikazuje odnose proporcionalnosti među veličinama V , H i l .

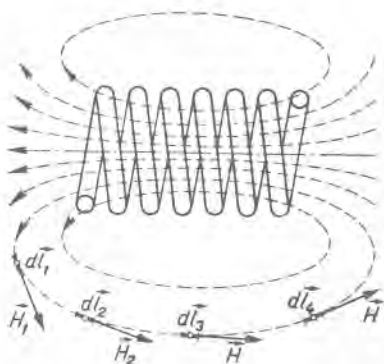
U nehomogenim poljima, kao npr. na slici 11.22, mijenja se B po cijeloj duljini silnice, pa prema tome ima H od točke do točke različite vrijednosti. Zato se ne može gornja jednačba iskoristiti općenito za proračun magnetskog napona za konačne duljine l .

Ipak se ta jednačba (kao zakon proporcionalnosti veličina) može primijeniti na element dužine dl , jer se može uzeti da je za nj H konstantno. Dakako da se sada na toj infinitezimalno maloj dužini pojavljuje samo infinitezimalno mali magnetski napon dV , koji je jednak

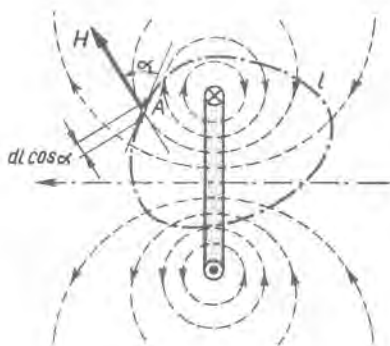
$$dV = H \cdot dl$$

Na konačnoj duljini silnice l u takvom nehomogenom polju vlada onda magnetski napon, koji se dobije sumiranjem svih infinitezimalnih napona, pa se izračuna prema jednačbi

$$V = \int H \cdot dl$$



Sl. 11.22. Magnetski napon nehomogenog magnetskog polja.



Sl. 11.23. Općenito značenje linijskog integrala magnetske uzbuđe.

Budući da je za cijelu zatvorenu silnicu i u nehomogenom polju sav magnetski napon V dobiven također od svih amperzavoja, to je opet

$$\oint H dl = I \cdot N$$

Pogledajmo sada kakve promjene nastaju ako se sumiraju pojedini magnetski naponi dV , a da se pri tome ne obilazi magnetski krug po liniji magnetske silnice već nekim, bilo kakvim zatvorenim putem. U tom slučaju, kako se vidi na slici 11.23, na jednom promatranom mjestu (A) zatvara element puta dl s elementom magnetske silnice općenito neki kut α , pa tome sada odgovara duljina elementa magnetske silnice $dl \cdot \cos \alpha$. Budući da su gornje jednačbe dobivene i vrijede

uz pretpostavku da je element puta po kojem se vrši sumiranje jedan element silnice, jednačba magnetskog napona dobiva oblik

$$\oint H \cdot dl \cdot \cos \alpha = I \cdot N$$

Ona vrijedi općenito, jer se može primijeniti na bilo koji zatvoreni put l i na nehomogena polja.

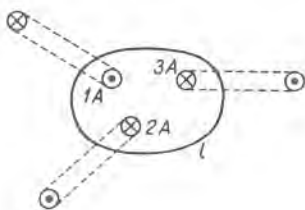
U izrazu $H \cdot dl \cdot \cos \alpha$ možemo faktor $\cos \alpha$ pridružiti veličini H , pa $H \cdot \cos \alpha$ predstavlja projekciju, tj. komponentu vektora $\mathbf{H}$ u smjeru elementa dl , što se simbolički u jednačbi označuje indeksom l uz veličinu H , tj. $H \cos \alpha = H_l$, pa je

$$\oint H_l \cdot dl = I \cdot N$$

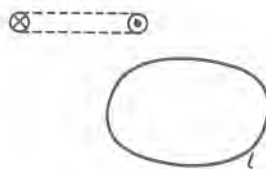
Na slici 11.24. vidimo da $I \cdot N$ možemo shvatiti kao ukupni broj ampera koji prolaze kroz plohu što je obuhvaća zatvorena linija l , pa se često $I \cdot N$ naziva ukupno strujno protjecanje I_u , a jednačba

$$\oint_l H_l \cdot dl = I_u$$

naziva se zakon protjecanja, koji se riječima može izraziti ovako: zatvoreni linijski integral magnetske uzbude H po bilo kakvoj zatvorenoj konturi l jednak je algebarskoj sumi svih struja koje linija l obuhvaća.



Sl. 11.24. Određivanje ukupnog protjecanja I_u kroz zadanu plohu.



Sl. 11.25. Ukupno protjecanje jednako nuli.

Na slikama se vidi kako se i posve općenito određuje I_u . Ako npr. linija l obuhvaća plohu kroz koju na slici 11.24 prolaze 1 A, 2 A i 3 A u naznačenim smjerovima, onda je ukupna struja algebarski zbroj koji je jednak $I_u = 3 + 2 - 1 = 4$ A u smjeru $\otimes$. Ako pak linija l ne obuhvaća niti jednu struju onda je, kao na slici 11.25 $I_u = 0$, pa je

$$\oint_l H_l \cdot dl = 0$$

Veličina $\mathbf{H}$ je vektor, a isto se tako može elementu puta $d\mathbf{l}$ kao usmjerenoj veličini pripisati vektorski karakter. Umnožak $H_t \cdot d\mathbf{l} \cdot \cos \alpha$ je u vektorskom računu tzv. skalarni produkt i označuje simbolički $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$, pa se jednačba zakona protjecanja piše u obliku

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_u$$

Zakon protjecanja upotrijebit ćemo da izračunamo magnetsku uzbudu H i magnetsku gustoću B u zadanoj točki A , koja je u magnetskom polju dugog ravnog vodiča protjecanog strujom I udaljena od osi vodiča na razmaku r .

Zbog aksijalne simetrije bit će ne samo točka A , već i sve točke na jednakoj udaljenosti r od osi vodiča u jednakim prilikama s obzirom na uzbudnu struju. To znači da će sve tačke na jednoj kružnici, a to je silnica radijusa r , imati istu vrijednost magnetske uzbude H , dok će se smjer vektora $\mathbf{H}$ u svakoj točki kružnice poklapati prema pravilu desnog vijka s tangentom na kružnicu u toj točki, slika 11.26.

Primijenimo li zakon protjecanja na ovo magnetsko polje, razumljivo je da ćemo integriranje provesti duž zatvorene linije što je predstavlja silnica kroz točku A , jer je na cijeloj duljini silnice $l = 2\pi r$ uzbuda H konstantna i u smjeru elementa linije $d\mathbf{l}$. Time je $\alpha = 0$, a $\cos \alpha = 1$. Osim toga vidimo da je ukupno protjecanje upravo jednako struji I , pa se zakon protjecanja može napisati u obliku

$$\oint H_t \cdot d\mathbf{l} = I$$

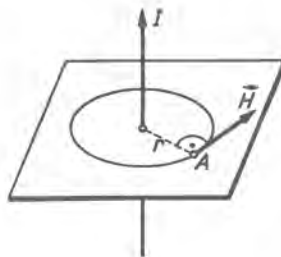
Konstantnu vrijednost H izlučimo izvan znaka integrala, pa je

$$H \cdot \oint d\mathbf{l} = I$$

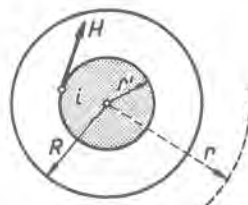
$$H \cdot 2\pi r = I$$

odakle je

$$H = \frac{I}{2\pi r} \text{ (A/m)}$$



Sl. 11.26. Primjena zakona protjecanja na magnetsko polje ravnog vodiča.



Sl. 11.27. Magnetsko polje u unutrašnjosti vodiča.

Poznavajući H možemo izračunati i gustoću B za vakuum (ili zrak)

$$B = \mu_0 \cdot H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{2\pi r} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{r} \text{ (T)}$$

Zbog prolaska struje stvara se i u unutrašnjosti samog vodiča magnetsko polje, čije su silnice također koncentrične kružnice oko osi vodiča. Na slici 11.27 je vidljivo

da su te silnice unutar vodiča stvorene samo jednim dijelom ukupne struje I , koja prolazi kroz cijeli presjek $R^2 \cdot \pi$ vodiča.

Pri istosmjernoj struji, gdje se može uzeti da je njezina gustoća $\Gamma = I/R^2 \pi$ konstantna po cijelom poprečnom presjeku vodiča, izračuna se struja koja uzbuđuje jednu silnicu radijusa $r' < R$ prema jednadžbi

$$i = \Gamma \cdot r'^2 \pi = \frac{I}{R^2 \pi} \cdot r'^2 \pi = I \cdot \frac{r'^2}{R^2}$$

pa je

$$\oint_{2r'\pi} H \, dl = i \quad \text{odakle je} \quad H \cdot 2r'\pi = i$$

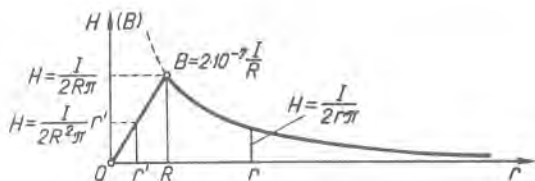
ili

$$H = \frac{i}{2r'\pi} = I \cdot \frac{r'^2}{R^2} \cdot \frac{1}{2r'\pi} = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot r' \quad (\text{A/m})$$

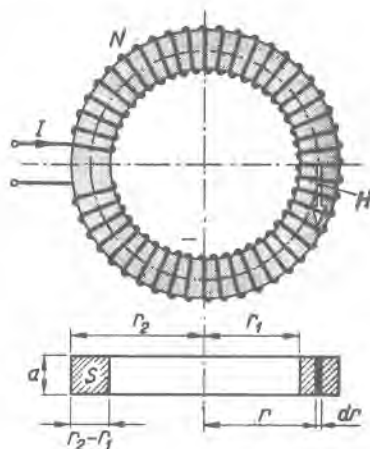
Ako je vodič izrađen od neferomagnetskog materijala za koji je $\mu = \mu_0$, bit će gustoća magnetskog toka

$$B = \mu_0 \cdot H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{2R^2\pi} \cdot r' = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{R^2\pi} \cdot r' \quad (\text{T})$$

Promjena uzbude H (odnosno gustoće B pri neferomagnetskom vodiču) u ovisnosti od udaljenosti r od osi vodiča, prikazana je grafički na slici 11.28. Unutar vodiča gustoća magnetskog polja raste linearno od nule (u osi vodiča) do maksimalne vrijednosti $2 \cdot 10^{-7} \cdot (I/R)$ na samoj površini vodiča, a onda što se više uda-



Sl. 11.28. Grafički prikaz magnetske uzbude u vodiču i izvan vodiča.



Sl. 11.29. Zakon protjecanja primijenjen na torusni svitak.

ljujemo od vodiča protjecanog strujom, polje biva sve slabije. Teoretski bi polje postigao vrijednost nula tek u beskonačnoj udaljenosti od vodiča.

Primjenom zakona protjecanja može se sada točnije odrediti kakvo se magnetsko polje dobiva u torusnom svitku ako poprečna dimenzija svitka nije znatno manja od dužine l , te ako zato nije ispunjena pretpostavka da je magnetsko polje svitka homogeno, slika 11.29. Ipak su i u tom slučaju zbog aksijalne simetrije konstrukcije magnetske silnice kružnice, pa zato se može na silnicu bilo kojeg radijusa primijeniti zakon protjecanja.

Ako, dakle, promatramo jednu silnicu radijusa r , onda nam zakon protjecanja za tu silnicu daje vrijednost magnetske uzbude

$$\oint_{l=2r\pi} H \cdot dl = I \cdot N$$

pa je

$$H = \frac{I \cdot N}{2 r \pi}$$

Pretpostavljamo da je poprečni presjek torusa pravokutnik površine

$$S = a \cdot (r_2 - r_1)$$

Vidimo da se uzbuda mijenja obrnuto proporcionalno udaljenosti r od poprečne osi torusa. Zato neće ni gustoća B biti po cijeloj površini S konstantna i to polje nije homogeno. Ukupni tok Φ mora se, dakle, računati prema jednadžbi

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S B \cdot dS$$

Prema slici 11.29 je

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2 r \pi} \quad \text{i} \quad dS = a \cdot dr$$

pa je

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2 r \pi} \cdot a \cdot dr = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N \cdot a}{2 \pi} \cdot \frac{dr}{r}$$

a tok

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N \cdot a}{2 \pi} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N \cdot a}{2 \pi} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$$

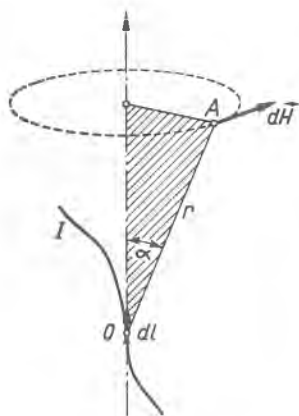
Iako je zakon protjecanja u teoretskoj elektrotehnici veoma važan, on se na konkretno proračunavanje magnetskih polja može primijeniti samo onda ako postoji izvjesna simetrija u slici magnetskog polja. Tako smo u prijašnjem primjeru mogli proračunati jakost magnetskog polja ravnog vodiča protjecanog električnom strujom zato, jer je zbog aksijalne simetrije polja magnetska uzbuda u svakoj točki silnice l iste vrijednosti, pa se H kao konstantna veličina mogla izlučiti izvan znaka integrala (sumacije), što je onda omogućilo njen daljnji proračun.

11.3

BIOT-SAVARTOV ZAKON

Osim zakona protjecanja postoji još jedan zakon prema kojem su u jednoj jednadžbi povezane obje veličine: jakost struje I i magnetska uzbuda H , a to je Biot-Savartov zakon. Bit toga zakona je u tome da se nastajanje magnetske uzbude i magnetske gustoće može shvatiti tako kao da svaki element dl vodiča protjecanog strujom I , dakle svaki element struje $I \cdot dl$, stvara u promatranoj točki polja A jedan doprinos dH za ukupnu uzbudu H , slika 11.30.

Rezultantna, dakle ukupna uzbuda H od svih elemenata vodiča, bit će jednaka integralu svih pojedinih dH . U principu može se ovim zakonom i principom superpozicije izračunati magnetsko polje ma kako oblikovana vodiča, ukoliko je samo matematičkim pomagalicama moguće izračunati vrijednost integrala.



Sl. 11.30. Uzbuda i jakost polja u jednoj točki prostora.

Matematički formuliran Biot-Savartov zakon glasi

$$dH = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

gdje prema oznakama na slici 11.31 znače

I ... jakost struje u vodiču

dl ... element vodiča

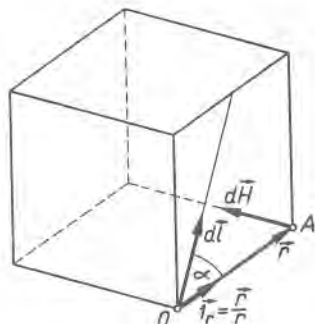
r ... udaljenost elementa vodiča dl do točke A

α ... kut što ga tvori element dl sa spojnicom $r = OA$.

Diferencijal uzbude dH je vektorska veličina i u promatranoj točki A okomit je na ravninu položenu kroz element vodiča dl i udaljenost r , a usmjeren je po pravilu desnog vijka s obzirom na smjer struje I koja teče vodičem, slika 11.30.

Umnožak $dl \cdot \sin \alpha$ može se prikazati kao $dl \cdot 1 \cdot \sin(\angle dl, \mathbf{r})$, jer je α kut između dl i $\mathbf{r}$, a to se u vektorskom računu naziva vektorski produkt vektora dl i jediničnog vektora $\mathbf{1}$, u smjeru spojnice $OA = \mathbf{r}$ i označuje

$$dl \times \frac{\mathbf{r}}{r}$$



Sl. 11.31. Jedinični vektor u smjeru r .

jer jedinični je vektor u smjeru $\mathbf{r}$ jednak $\mathbf{1} = \mathbf{r}/r$, slika 11.31.

Tako se Biot-Savartov zakon može prikazati vektorskom jednačbom

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r^2} \cdot (d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r})$$

ili

$$d\mathbf{H} = \frac{I \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{4\pi \cdot r^3}$$

pa je ukupna uzbuda od struje I cijelog strujnog kruga

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \cdot \oint \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

a magnetska gustoća u vakuumu

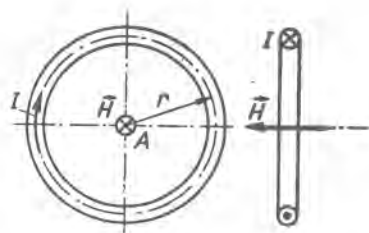
$$d\mathbf{B} = \frac{I\mu_0}{4\pi r^2} \cdot (d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r})$$

odnosno

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \oint \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

11.3.1. Primjena Biot-Savartova zakona na kružni zavoј protjecan strujom. Pomoću Biot-Savartova zakona proračunat ćemo jakost polja u središtu A kružnog zavoја protjecanog strujnom I , slika 11.32. Znamo da jedan element struje $I d\mathbf{l}$ stvara dio uzbude

$$dH = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot \sin \alpha}{r^2}$$



Sl. 11.32. Jakost magnetskog polja u središtu kružnog zavoја protjecanog strujom.

Zbog centralne simetrije udaljenost svih elemenata kružnog vodiča dl do središta A jednaka je radijusu r , koji sa dl zatvara kut α od 90° čiji je $\sin \alpha = 1$, pa se tako gornja jednačba pojednostavljuje

$$dH = \frac{I}{4\pi r^2} \cdot dl$$

Ukupna uzbuda u središtu A od struje cijelog zavoја jednaka je

$$H = \frac{I}{4\pi r^2} \cdot \oint dl = \frac{I}{4\pi r^2} \cdot 2\pi r = \frac{I}{2 \cdot r}$$

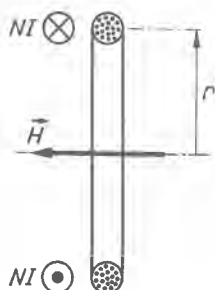
a gustoća u vakuumu

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2r}$$

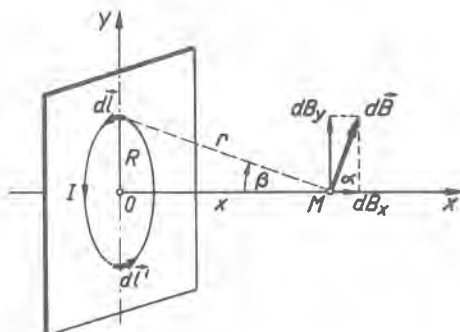
Uz smjer struje, koji je na slici naznačen, dobiva se po pravilu desnog vijka magnetsko polje usmjereno u nacrtanu ravninu, što je označeno simbolom $\otimes$.

Ako bismo na slici 11.33 imali umjesto jednog zavoja uski svitak sa N gusto namotanih zavoja protjecanih strujom I , gustoća u središtu kruga A bila bi

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2r}$$



Sl. 11.33. Jakost magnetskog polja u središtu svitka sa N gusto namotanih kružnih zavoja protjecanih strujom.



Sl. 11.34. Jakost magnetskog polja u točki na geometrijskoj osi kružnog zavoja protjecanog strujom.

Daljnjom primjenom Biot-Savartova zakona možemo odrediti i gustoću B u točki M , koja se nalazi na geometrijskoj osi x kružnog zavoja protjecanog strujom I .

Na slici 11.34 se vidi, da su i ovdje element $d\vec{l}$ i udaljenost $\vec{r}$ međusobno okomiti, pa će dH u točki M biti

$$dH = \frac{I \cdot d\vec{l}}{4 \pi r^2} \quad \text{a gustoća} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot d\vec{l}}{4 \pi r^2}$$

Vektor $d\vec{B}$ je okomit na ravninu položenu kroz element $d\vec{l}$ i udaljenost $\vec{r}$, a usmjeren je po pravilu desnog vijka, pa prema tome za ovaj nacrtani element pada u nacrtanu ravninu. Nadalje se vidi da će se dB_y , a to je komponenta od $d\vec{B}$ koja je okomita na os x , poništiti s isto takvom komponentom ($-dB_y$) koja nastaje od elementa $d\vec{l}'$, a koji je dijametralno suprotan prvo promatranom elementu $d\vec{l}$.

Preostaju, dakle, samo komponente dB_x u smjeru osi x , pri čemu je dB_x jednog elementa $dB_x = d\vec{B} \cdot \cos \alpha = d\vec{B} \cdot \sin \beta$, tj.

$$dB_x = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot d\vec{l}}{4 \pi r^2} \sin \beta$$

pa je rezultatna gustoća B cijelog zavoja

$$B = \oint_{2R\pi} \frac{\mu_0 I \cdot dl \sin \beta}{4 \pi \cdot r^2} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \sin \beta}{4 \pi r^2} \cdot \oint_{2R\pi} dl = \frac{\mu_0 I \cdot \sin \beta \cdot 2 R \pi}{4 \pi \cdot r^2}$$

i konačno

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R \sin \beta}{r^2}$$

Iz geometrijskih odnosa slijedi da je $r^2 = R^2 + x^2$, i $\sin \beta = R/r$, pa je

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{r^3} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Ako umjesto jednog zavoja imamo svitak s gusto namotanih N zavoja, bit će

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Vidimo da za $x = 0$, tj. kada točka M pada u središte kruga dobivamo prijašnju vrijednost

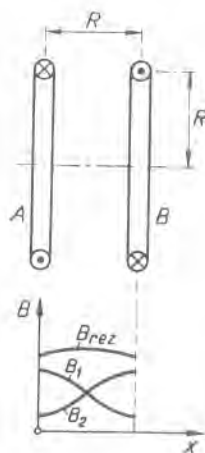
$$B_0 = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2 R}$$

11.3.2. Helmholtzovi svici. Ako dva jednaka, tanka, okrugla svitka s jednakim brojem zavoja N i protjecana istom strujom I smjestimo koaksijalno, tako da su im središta razmaknuta na udaljenosti R jednakoj njihovim radiusima, dobit ćemo u osi x na znatnoj duljini među svicima približno konstantnu vrijednost gustoće B . To se vidi iz grafičkog prikaza na slici 11.35, gdje su nacrtane krivulje B_1 i B_2 koje prikazuju magnetsku gustoću prvog i drugog svitka u osi x , i njihovu sumu kao rezultatnu gustoću B .

U sredini razmaka, dakle na udaljenosti $x = R/2$, stvorena je ukupna magnetska gustoća

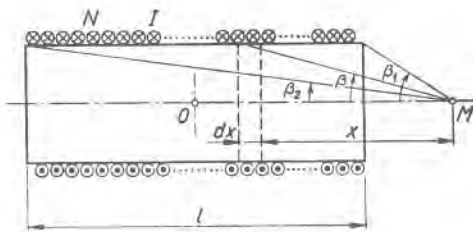
$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N \cdot R^2}{(R^2 + \frac{R^2}{4})^{3/2}} = \frac{8 \mu_0 \cdot I \cdot N}{R \cdot 5^{3/2}}$$

Magnetsko polje dobiveno s ovakva dva svitka, koji se nazivaju Helmholtzovi svici, iskorišćuje se u mjernoj tehnici gdje se želi imati približno jednolično polje.



Sl. 11.35. Helmholtzovi svici.

11.3.3. Magnetsko polje svitka. Sličnom primjenom Biot-Savartova zakona



Sl. 11.36. Jakost magnetskog polja u točki na geometrijskoj osi svitka.

izračunat će se jakost magnetskog polja u nekoj točki M na geometrijskoj osi svitka prikazanog na slici 11.36. Ako je svitak izrađen sa N zavoja kroz koje prolazi struja jakosti I , i ako je njegova dužina l , bit će po jedinici dužine broj zavoja $n = N/l$, pa je jedinično protjecanje (na jedinici duljine): $n \cdot I$. Protjecanje pak stvoreno od elementa dužine svitka dx iznosi $n \cdot I \cdot dx$ i to je elementarno kružno pro-

tjecanje svitka, koje će u točki M prema prije izvedenoj jednadžbi stvoriti magnetsku gustoću

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I \cdot dx}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Na osnovi geometrijskih odnosa na slici 11.36 možemo prikazati udaljenost x relacijom

$$x = R \cdot \operatorname{ctg} \beta \quad \text{i} \quad dx = -\frac{R}{\sin^2 \beta} \cdot d\beta$$

pa je

$$dB = -\frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{2} \cdot \sin \beta \cdot d\beta$$

i rezultatna gustoća B cijelog svitka u točki M

$$B = -\frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{2} \cdot \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta \cdot d\beta = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad (\text{T})$$

Primijenimo li ovu općenitu jednadžbu na svitak znatno veće duljine od njegovih poprečnih dimenzija dobivamo o dvije osobite točke na osi slijedeće podatke:

1) Točka O u sredini svitka: $\beta_1 \approx 180^\circ$, $\beta_2 \approx 0$, a $\cos \beta_2 \approx 1$ i $\cos \beta_1 \approx -1$, pa će gustoća B_0 biti približno jednaka

$$B_0 = \mu_0 \cdot \frac{n \cdot I}{2} \cdot 2 = \mu_0 \cdot n \cdot I$$

a tome pripadna uzbuda je $H_0 = B_0/\mu_0 = n \cdot I = N \cdot I/l$, kako je definirana i kod torusnog svitka.

2) Na jednom kraju dugog svitka je $\cos \beta_2 \approx 1$ i $\cos \beta_1 = 0$, pa je gustoća

$$B \approx \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{2} = \frac{1}{2} \cdot B_0$$

dakle samo polovica gustoće koja je u sredini svitka. Budući da se gustoća uglavnom smanjuje tek u blizini krajeva svitka, može se polje u srednjem dijelu svitka smatrati približno homogenim.

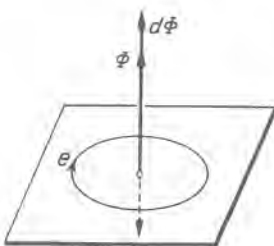
11.4.

ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

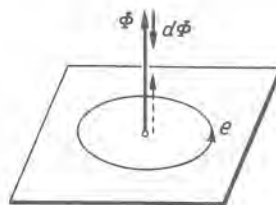
11.4.1. Lenzov zakon. Kako je već u uvodu spomenuto, elektromagnetska indukcija je pojava da se u zatvorenom zavoju stvara ili inducira napon ako se mijenja magnetski tok što ga obuhvaća zavoj. Veličina tog napona ovisi samo o brzini kojom se mijenja magnetski tok, pa se prema tome može izraziti jednadžbom

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Značenje predznaka minus u ovoj jednadžbi objašnjava Lenzov zakon, koji kaže da je smjer induciranog napona uvijek takav da se od toga napona stvorena struja svojim magnetskim učinkom protivi promjeni magnetskog toka $d\Phi$, zbog kojeg je došlo do induciranja napona.



Sl. 11.37. Inducirani napon u zavoju pri porastu magnetskog toka što ga zavoj obuhvaća.



Sl. 11.38. Inducirani napon u zavoju pri smanjivanju magnetskog toka.

Na osnovi mjerenja možemo, naime, saznati da će pri porastu magnetskog toka (kad je prema slici 11.37 $d\Phi$ pozitivno) smjer induciranog napona biti sa smjerom toka Φ , povezan pravilom lijevog vijka, a ta se povezanost označuje predznakom minus kao negativno geometrijsko orijentiranje dvaju smjerova.

Struja što bi je potjerao napon e stvara prema pravilu desnog vijka dodatno magnetsko polje, koje je na slici označeno crtkanom strelicom, i ono je upravo suprotno prvoj promjeni $d\Phi$, pa je želi prema tome kompenzirati.

Na slici 11.38 je prikazano kada se magnetski tok smanjuje, pa se $d\Phi$ može smatrati negativnim. I u tom slučaju bismo mogli pokusom utvrditi jednaku povezanost induciranog napona s promjenom toka i to prema pravilu lijevog vijka, što se matematički karakterizira predznakom minus.

Ako se u promjenljivom magnetskom polju umjesto jednog zavoja nalazi svitak sa N zavoja i ako svi zavoji jednako obuhvaćaju magnetski tok, bit će inducirani napon cijelog svitka N puta veći, jer se svi naponi pojedinih zavoja sumiraju

$$e = - N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

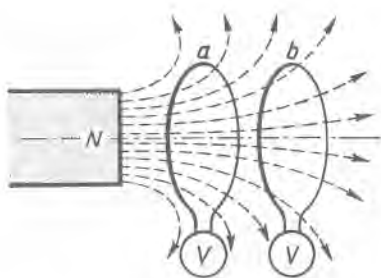
Ova jednadžba može se napisati i u obliku $\mathcal{E} = -(N d\Phi/dt)$, pa se tako može cijeli svitak shvatiti kao jedan zavoj u kojem je izvršena ukupna promjena magnetskog toka $d\Psi$, koja je u ovom slučaju jednaka

$$d\Psi = N d\Phi$$

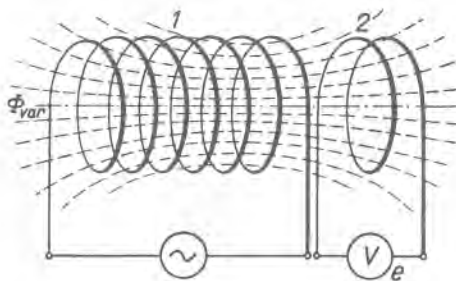
Ako pak svih N zavoja svitka nije jednako spojeno s promjenljivim magnetskim tokom, treba ukupnu promjenu toka cijelog svitka shvatiti kao sumu promjena toka svih zavoja: $d\Psi = d\Psi_1 + d\Psi_2 + \dots$. Općenito će, dakle, jednadžba induciranog napona svitka glasniti

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Psi}{dt}$$

Promjena magnetskog toka koji će inducitati napon može se postići na razne načine, a u nastavku će biti prikazani razni slučajevi dobivanja induciranog napona.



Sl. 11.39. Napon induciran pomicanjem zavoja u magnetskom polju.



Sl. 11.40. Napon međusobne indukcije.

Tako se prema slici 11.39 promjena toka u zavoju može dobiti ako u magnetskom polju magneta pomičemo zavoj, na primjer iz položaja a u položaj b . U tom slučaju, kako se na slici vidi, došlo je do promjene toka Φ jer je u nacrtanoj slici polja zavoj u položaju a obuhvaćao 10 silnica, a u položaju b samo njih 6. Budući da je ovdje napon induciran gibanjem ili pomicanjem zavoja u magnetskom polju, naziva se često napon pomicanja.

No promjena magnetskog toka može se dobiti i obrnuto, ako zavoj stoji na miru i ako se magnet pomiče u suprotnom smjeru. I u ovom slučaju dobit će se inducirani napon pomicanja, pa možemo reći da je jedan od načina dobivanja induciranog napona taj da postoji neko međusobno relativno pomicanje zavoja i magneta.

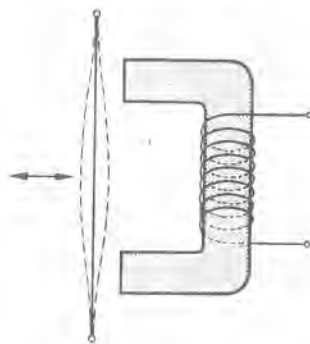
Vidimo da je pri tom relativnom gibanju zavoja i magneta promjena toka nastala zbog toga što su neke silnice izašle izvan konture zavoja ili su pak neke ušle u konturu zavoja. Pri tome možemo to prikazati slikovito kao međusobno (relativno) presijecanje silnica s konturom zavoja. Zato se često kaže da se inducirani napon dobije u vodiču ako on siječe silnice magnetskog toka.

Ima i drugih načina kako se može inducirati napon, pa i u mirujućem zavoju. Potrebno je samo da se stvori promjena toka Φ , a ta se prema jednadžbi

$$\Phi = \frac{I \cdot N}{R_m}$$

može izvršiti promjenom uzbudne struje koja stvara tok, ili promjenom bilo kojeg faktora kojim je definiran magnetski otpor.

Od osobite je važnosti dobivanje inducirano napona promjenom uzbudne struje koja stvara promjenljivo magnetsko polje, slika 11.40. Tu se u prvom svitku, označenom brojem 1, stvara promjenljivi magnetski tok, a u zavoju s oznakom 2, koji obuhvaća taj tok, inducira se napon e , koji se naziva napon međusobne indukcije, jer je nastao međusobnim djelovanjem prvog (primarnog) svitka na drugi (sekundarni). Na tom principu međusobnog magnetskog djelovanja osniva se rad transformatora.



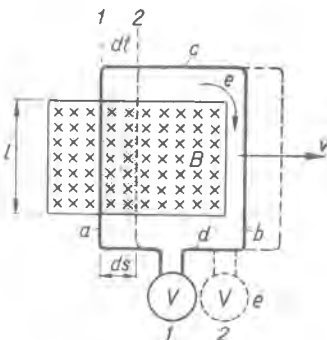
Sl. 11.41. Princip Bellova telefona.

No i u zavojima samog primarnog svitka inducira se po istom zakonu elektromagnetske indukcije neki napon, i taj se naziva napon vlastite indukcije ili samoindukcije, jer se inducirao u zavojima vlastitog svitka u kojem je stvoren promjenljivi magnetski tok.

Induciranje napona promjenom magnetskog otpora iskorišćuje se npr. u zavojima Bellova telefona, slika 11.41. Tu se pri govoru zbog akustičnih titraja zraka pomiče membrana, uslijed čega se mijenja magnetski otpor R_m i inducira u svitku napon, koji se mijenja u ritmu govora (ili glazbe). Taj napon protjerava u drugom priključenom telefonu struju, pa će zbog nastalih magnetskih sila i druga membrana titrati i reproducirati govoreni glas (ili glazbu).

11.4.2. Napon pomicanja. Induciranje napona relativnim pomicanjem svitka i magnetskog polja iskorišćuje se mnogo u različito izrađenim konstrukcijama. To su u prvom redu generatori u elektranama, gdje se sila za pokretanje rotora dobiva od raznih pogonskih strojeva. Zavoji svitaka ovih generatora u kojima se induciraju naponi imaju u biti pravokutan oblik.

Promotrimo sada поближе cijeli proces induciranja napona pri pomicanju jednog takvog zavoja u homogenom magnetskom polju gustoće B . Na slici 11.42 prikazuje nam križićima označen pravokutni južni (S) pol magneta, koji se nalazi u nacrtanoj ravnini. U polju ispred magneta pomiče se jednoličnom brzinom v pravokutni zavoj sa stranicama a , b , c , d .



Sl. 11.42. Inducirani napon u jednom vodiču pravokutnog zavoja pri pomicanju.

U vrijeme dt pomakne se zavoj iz položaja 1 u položaj 2, a pri tome se obuhvaćeni magnetski tok promijenio (i to smanjio) za iznos $(-d\Phi) = dS \cdot B$, gdje je dS površina magnetskog polja koju je zavoj napustio pri gibanju. Tu površinu možemo prikazati kao umnožak $ds \cdot l$, gdje su l dužina stranice a zavoja, koja je presijecala magnetske silnice okomitom brzinom v , a ds prevaljeni put u vrijeme dt , pa je $v = ds/dt$.

Moguće je, dakle, jednadžbu $e = -d\Phi/dt$ induciranog napona u zavoju prikazati u obliku

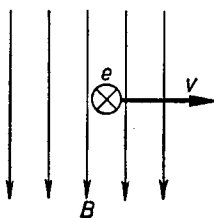
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dS \cdot B}{dt} = -\frac{ds}{dt} \cdot B \cdot l$$

ili

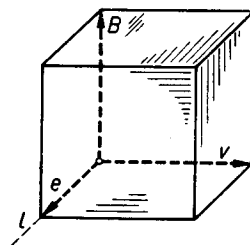
$$e = v \cdot B \cdot l$$

Smjer induciranog napona odredit ćemo Lenzovim zakonom, koji kaže da je inducirana struja tako usmjerena da nastoji svojim stvorenim magnetskim tokom održati obuhvaćeni tok nepromijenjenim. To znači da će struja nastojati stvoriti ponovno izgubljeni tok, a za to mora biti usmjerena u zavoj, kako je na slici naznačeno, u smjeru gibanja kazaljke na satu.

Napon e , induciran u cijelom zavoju zbog promjene magnetskog toka, može se prema gornjoj jednadžbi shvatiti tako kao da je nastao samo na jednom dijelu zavoja i to na ravnoj duljini l , kojom je vodič a presijecao okomito brzinom v magnetske silnice gustoće B . Pri ovakvom shvaćanju induciranja napona ostali dijelovi zavoja, koji ili nisu u dodiru sa silnicama magnetskog toka, ili samo klize uz silnice, ali ih ne sijeku, smatraju se neaktivnim u procesu induciranja napona.



Sl. 11.43. Pravilo dlana desne ruke za određivanje smjera induciranog napona pri pomicanju vodiča u magnetskom polju.



Sl. 11.44. Smjerovi v , B , l prikazani u prostornom koordinatnom sustavu.

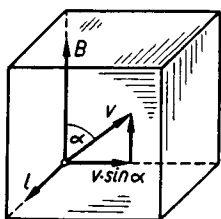
Ispravnost ovoga načina tumačenja induciranja napona potvrđuju nam i dimenzioni odnosi u gornjoj jednadžbi. Uvrstimo li, naime, za pojedine veličine desne strane jednadžbe njihove osnovne jedinice, dobivamo i na desnoj strani jedinicu volt kojom se mjeri i veličina e na lijevoj strani

$$V = \frac{m}{s} \cdot \frac{Vs}{m^2} \cdot m = V$$

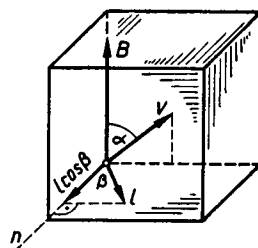
Da bismo lako zapamtili kako se određuje smjer induciranog napona e u ravnom vodiču koji je okomit na magnetske silnice, a giba se brzinom okomitom na vodič i na silnice, služimo se pravilom desne ruke koje glasi: postavimo li desnu ruku tako da nam magnetske silnice udaraju u dlan, a ispruženi palac da pokazuje smjer brzine, onda preostali ispruženi prsti pokazuju smjer induciranog napona, slika 11.43.

Zbog toga što je prema jednadžbi $e = v \cdot B \cdot l$ veličina induciranog napona direktno proporcionalna gustoći B , naziva se veličina B također magnetska indukcija.

Ovaj jednostavni oblik jednadžbe za izračunavanje napona pomicanja $e = v \cdot B \cdot l$ dobiven je uz uvjet da veličine na desnoj strani jednažbe padaju u tri međusobno okomita smjera, koji tvore pravokutni prostorni koordinatni sustav, slika 11.44. Na osnovi slijedećih razmatranja možemo doći i do općenitog zakona za izračunavanje induciranog napona pri pomicanju vodiča u magnetskom polju.



Sl. 11.45. Brzina gibanja vodiča nije okomita na magnetske silnice.



Sl. 11.46. Napon pomicanja u vodiču koji nije okomit na magnetske silnice.

Pretpostavimo najprije da brzina v nije okomita na magnetske silnice, već da sa smjerom vektora B tvori kut $\alpha < 90^\circ$. U tom slučaju djelotvorna je samo okomita komponenta brzine $v \cdot \sin \alpha$, jer drugom komponentom vodič klizi uz silnice, pa ih ne presijeca. Prema tome je

$$e = v \cdot \sin \alpha \cdot B \cdot l \quad (\text{slika 11.45})$$

Ako, nadalje, ni vodič l nije okomit na magnetske silnice i brzinu v , pa se ne poklapa sa smjerom normale n na ravninu što je čine smjer brzine i smjer silnica, već s tom normalom zatvara kut $\beta > 0$, onda će biti efektivna duljina vodiča manja i to samo $l \cdot \cos \beta$, pa je napon

$$e = v \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot l \cos \beta \quad (\text{slika 11.46})$$

Ovi izvodi vrijede, međutim, ako se gibanje ravnog vodiča vrši u homogenom magnetskom polju, gdje je u svakoj točki vodiča po cijeloj duljini l magnetska gustoća B jednake vrijednosti, a i svaki elemenat ima istu brzinu v .

U posve općenitom slučaju, ako je vodič bilo kakva oblika i ako se giba u nehomogenom magnetskom polju, može se ova jednadžba ipak iskoristiti (jer ona u biti prikazuje međusobno proporcionalne odnose), samo je valja primijeniti na

infinitesimalno mali dio vodiča dl u kojem je, dakako, onda induciran samo jedan dio napona, a taj je

$$de = v \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot dl \cdot \cos \beta$$

I ovdje je smjer induciranog napona de u svakom elementu dl određen Len-zovim zakonom, a budući da taj smjer ovisi o usmjerenim vektorskim veličinama v , B , l , može se gornja jednadžba napisati i u vektorskom obliku

$$de = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Za cijelu zatvorenu konturu l bit će napon pomicanja u svakom trenutku jednak sumi svih elementarnih napona

$$e = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

11.4.3. Samoindukcija. Kao što je već u uvodu spomenuto, samoindukcijom ili vlastitom indukcijom nazivamo pojavu da se i u samom svitku kroz koji prolazi promjenljiva struja inducira napon zbog promjenljivog toka Φ što ga je proizvela vlastita struja toga svitka, slika 11.47.

U jednom zavoju inducirani napon jednak je $e = -(d\Phi/dt)$, a ako su svi zavoji jednako obuhvaćeni promjenljivim tokom Φ , bit će napon samoindukcije cijelog svitka jednak

$$e = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Ako za $d\Phi$ uvrstimo vrijednost dobivenu iz osnovne jednadžbe $\Phi = (I \cdot N/R_m)$ kojom je povezan magnetski tok i struja magnetiziranja onda, uz pretpostavku da je magnetski otpor R_m konstantan, dobivamo za promjenljivu struju i

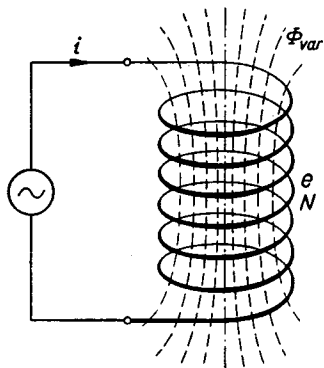
$$d\Phi = di \cdot \frac{N}{R_m} \quad \text{pa je} \quad e = -\frac{N^2}{R_m} \cdot \frac{di}{dt}$$

ili

$$e = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

gdje smo konstantnu vrijednost razlomka N^2/R_m označili slovom L

$$L = \frac{N^2}{R_m}$$



Sl. 11.47. Induciranje napona samoindukcije.

Inducirani napon samoindukcije može se, dakle, prikazati i direktno kao posljedica promjenljive struje svitka i . Prema gornjoj jednadžbi taj napon direktno je proporcionalan

brzini promjene struje di , a ovisi još i o veličini L , čija vrijednost ovisi samo o konstrukciji i geometrijskim dimenzijama svitka, pa zato L nazivamo koeficijentom samoindukcije ili vlastitim induktivitetom svitka.

Koeficijent samoindukcije L važna je karakteristična veličina svitka, a općenito i svakog strujnog kruga, jer pojavu samoindukcije susrećemo uvijek u svakom, bilo kakvom zatvorenom strujnom krugu, u kojem teče vremenski promjenljiva struja.

Jedinica kojom se mjeri induktivitet L naziva se u počast fizičaru Henryju jedan henri i označuje slovom H . Njezin odnos s ostalim jedinicama internacionalnog sistema slijedi iz osnovne jednadžbe u kojoj je ta veličina L povezana s ostalim već poznatim veličinama. Tako iz jednadžbe $e = -L(di/dt)$ slijedi

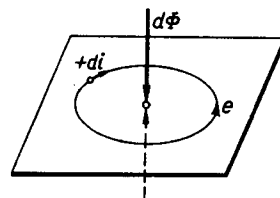
$$L = \frac{e \cdot dt}{di}$$

pa je

$$H = \frac{Vs}{A} = \Omega \cdot s$$

Jedinica jedan henri može se riječima objasniti ovako: svitak ima induktivitet 1 H onda, ako se pri *linearnoj promjeni* jakosti struje za iznos jednog ampera tokom jedne sekunde inducira u svitku napon od jednog volta.

Smjer napona samoindukcije također je prema Lenzovu zakonu takav da se od tog napona stvorena struja protivi promjeni zbog koje je napon induciran. Kako je ovdje promjena jakosti struje uzrok induciraju napona, bit će e suprotno promjeni di . Ako, dakle, na slici 11.48 strelica uz di označuje prirast struje, onda je smjer strelice koja pokazuje napon samoindukcije e suprotan smjeru strelice di . Na istoj slici označena je strelicom i promjena toka $d\Phi$ koju je uzrokovala promjena struje i koja je inducirala napon samoindukcije, a crtkano tok koji će stvoriti inducirana struja.



Sl. 11.48. Određivanje smjera napona samoindukcije.

Osim osnovne jednadžbe $L = N^2/R_m$ kojom smo definirali vlastiti induktivitet svitka, može se on prikazati i na drugi način, primjenom jednadžbe $\Phi = I \cdot N/R_m$, ako iz nje izračunamo $N/R_m = \Phi/I$ i uvrstimo u gornju jednadžbu. Dobivamo, dalje

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I}$$

Prema toj jednadžbi vlastiti induktivitet svitka je numerički jednak ukupnom ili ulančanom toku svitka, koji je stvoren od struje jakosti jedan amper.

Označimo li općenito ukupni ili ulančani tok slovom Ψ , gornja jednadžba dobiva oblik

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

koja ima općenitije značenje, jer se može primijeniti ne samo na torusni svitak, već uopće na bilo koju zatvorenu konturu, koja protjecana strujom I stvara ukupni tok Ψ .

Odavde se dobije i relacija $\Psi = L \cdot I$, koja se u ovom obliku upotrebljava kad se uz poznatu vrijednost L želi izračunati magnetski tok što ga proizvodi zadana struja I .

Primjenom jednadžbe $L = \Psi/I$ može se numerički odrediti vrijednost induktiviteta L ako se prethodno odredi ukupni magnetski tok Ψ promatranog strujnog kruga.

Da pokažemo upotrebu ove jednadžbe, izračunat ćemo u nastavku induktivitet L samo za neke praktički važnije slučajeve, gdje se račun može provesti još jednostavnim matematičkim postupcima.

11.4.4. Proračun koeficijenta L za neke primjere iz prakse. Težina problema pri određivanju induktiviteta bilo kako složenih strujnih krugova i svitaka sastoji se, naime, u tome da nije uvijek moguće jednostavnim matematičkim metodama izračunati ukupni tok Ψ , jer je zakon po kojem su u prostoru raspoređene silnice takvog nehomogenog magnetskog polja redovno dan veoma kompliciranim matematičkim izrazima.

Za torusni svitak prikazan na slici 11.29 s gusto namotanim zavojima moguće je izračunati tok Φ prema jednadžbi

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N \cdot a}{2\pi} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I \cdot N \cdot a \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$$

a ukupni tok

$$\Psi = N \cdot \Phi = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I \cdot N^2 \cdot a \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$$

pa je prema jednadžbi $L = \Psi/I$ induktivitet tog torusnog svitka omotanog oko neferomagnetskog materijala za koji je permeabilnost $\mu = \mu_0$

$$L = 2 \cdot 10^{-7} \cdot N^2 \cdot a \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{H})$$

Primjenom ove jednadžbe izračuna se, dakle, potpuno točno induktivitet torusnog svitka, pa takav svitak može služiti kao normala induktiviteta L pri mjerenju nepoznatih induktiviteta onih svitaka i strujnih krugova gdje je to nemoguće izračunati matematičkim postupkom.

U nastavku ćemo izračunat još induktivitet vrlo dugog dvožičnog voda. Pri projektiranju i proračunavanju dalekovoda potrebno je poznavati glavne električne karakteristične veličine voda, pa je uz omski otpor, kapacitet, važna veličina i induktivitet voda, L . Za taj proračun neka nam posluži slika 11.49, gdje su u okomitom presjeku na os voda prikazana oba kružna vodiča radijusa R , na razmaku d . Pretpostavlja se da su vodiči na cijeloj duljini voda l međusobno paralelni i svagdje

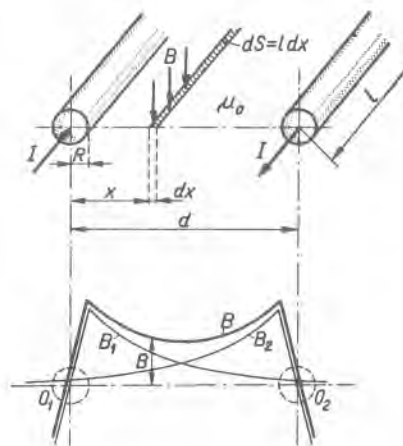
jednako udaljeni jedan od drugog, te da su izrađeni od neferomagnetskog materijala (Cu, Al), čija je permeabilnost $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$.

Zbog velike duljine l u odnosu na razmak d možemo zamisliti da silnice polja stvaraju samo paralelni vodiči a, b , a zanemarimo neznatni utjecaj duljina d .

Ulančani tok Ψ koji je povezan sa zatvorenim zavojem što ga predstavlja ovaj dalekovod jednak je toku Φ , jer je $N = 1$. Taj tok zamišljamo da je sastavljen od dva dijela i to:

- 1) od dijela što ga sačinjavaju magnetske silnice koje prolaze kroz zrak između oba metalna vodiča, i
- 2) od dijela koji čine magnetske silnice unutar samih vodiča.

Da bismo izračunali prvi dio toka i njemu pripadni tzv. vanjski induktivitet, poslužiti ćemo se oznakama slike 11.49. Gustoća silnica u pojedinim točkama na spojnici među vodičima nastaje superponiranjem magnetskog djelovanja struja lijevog i desnog vodiča. Njena vrijednost B ovisi o udaljenosti x promatrane točke od odabranog ishodišta 0.



Sl. 11.49. Dvožični dalekovod duljine l i resultantna jakost magnetskog polja.

Prema zakonu protjecanja od obiju struja stvorena indukcija jednaka je:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi x} - \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot (d - x)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d - x} \right)$$

a magnetski tok kroz površinu $l \cdot dx$ jednak je

$$d\Phi = B \cdot l \cdot dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d - x} \right) \cdot dx$$

Ukupni tok Φ među vodičima je

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_R^{d-R} \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d - x} \right) dx = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{2\pi} \cdot 2 \cdot \ln \frac{d - R}{R} = \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{\pi} \ln \frac{d - R}{R} \end{aligned}$$

Budući da je pri dalekovodu redovno $d \gg R$ može se dovoljnom točnošću staviti da je

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{\pi} \cdot \ln \frac{d}{R}$$

pa je tom toku pripadni, vanjski induktivitet

$$L_v = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \cdot \ln \frac{d}{R}$$

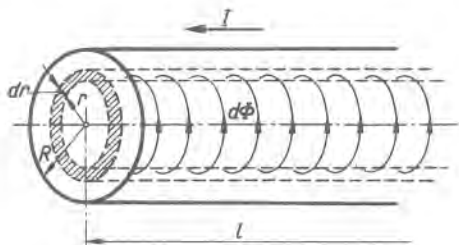
ili uz $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

$$L_v = 4l \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{d}{R}$$

Ukupnom induktivitetu dalekovoda doprinosi još i dio magnetskog toka što ga čine silnice, koje prolaze kroz materiju metala samih vodiča.

Budući da je u materiji jednog vodiča jakost magnetskog polja uzrokovana strujom drugog vodiča veoma mala, možemo zbog pojednostavljenja uzeti u račun samo one silnice magnetskog toka, koje su unutar vodiča stvorene od vlastite struje, tog vodiča. Ovom magnetskom toku pripadni induktivitet naziva se često unutarnji vlastiti induktivitet vodiča: L_u .

Unutarnji induktivitet može se lako izračunati za cilindrični vodič ako pretpostavimo da je struja I jednolično raspodijeljena na površini poprečnog presjeka vodiča. Računamo dakle s konstantnom gustoćom struje:



Sl. 11.50. Izračunavanje unutarnjeg induktiviteta masivnog okruglog vodiča.

$$I_r = \frac{I}{R^2 \pi}$$

Da bismo izračunali taj induktivitet treba prethodno odrediti ulančenje toka što ga stvara struja vodiča sa zavojem, dakle, s materijom vodiča. Pri tom valja imati na umu da je jedino silnica magnetskog toka na periferiji vodiča stvorena cijelom strujom I dok su silnice unutar vodiča ($r < R$) stvorene tek jednim dijelom struje.

Osim toga pri proračunu ulančenja toka s materijom zavoja treba uvažiti da pojedine silnice toka na radijusu $r < R$ ne obavijaju cijeli vodič (zavoj) nego samo njegov jedan dio pa će ulančenje pojedinih silnica biti različito.

Služeći se oznakama slike 11.50 možemo, kao što je poznato, izračunati da je magnetska silnica radijusa $r < R$ obuhvaćena strujom

$$I_r = I_r \cdot r^2 \cdot \pi = I \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

pa je prema zakonu protjecanja magnetska uzbuda

$$H_r = I \cdot \frac{r}{2\pi R^2}$$

a gustoća za neferomagnetski materijal vodiča

$$B_r = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot r$$

Element toka $d\Phi$ što na duljini l prolazi kroz površinu $l \cdot dr$ jednak je

$$d\Phi = B_r \cdot l \cdot dr = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I \cdot l}{R^2} \cdot r \cdot dr$$

Iz slike se vidi da taj tok ne obavlja cijeli presjek vodiča $R^2 \pi$ nego samo dio $r^2 \pi$, i radi toga je ulančenje $d\Psi$ toka $d\Phi$ na radijusu r u odnosu na ulančenje na radijusu R smanjeno u odnosu $r^2 \pi / R^2 \pi$, pa je $N = r^2 / R^2$. Prema tome je

$$d\Psi = d\Phi \cdot \frac{r^2}{R^2} = l \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{R^4} \cdot r^3 \cdot dr$$

i ukupno ulančenje za jedan vodič duljine l

$$\Psi = \int_0^R d\Psi = \int_0^R l \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{R^4} \cdot r^3 \cdot dr = l \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{R^4} \cdot \left[\frac{R^4}{4} \right]$$

$$\Psi = l \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot I \cdot \frac{1}{4}$$

Za oba vodiča dalekovoda treba ovu vrijednost podvostručiti, pa je tako unutarnji vlastiti induktivitet dalekovoda

$$L_u = \frac{2\Psi}{I} = l \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{4} = l \cdot 10^{-7} \text{ H}$$

Ukupni induktivitet dalekovoda jednak je

$$L = L_v + L_u = l \cdot \left(4 \ln \frac{d}{R} + 1 \right) \cdot 10^{-7} \text{ H}$$

Za praktičke proračune navodi se obično induktivitet po jedinici duljine dalekovoda:

$$L' = \frac{L}{l} = \left(4 \ln \frac{d}{R} + 1 \right) \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

Iz jednadžbe koja kaže da je unutar materije vodiča ulančani tok

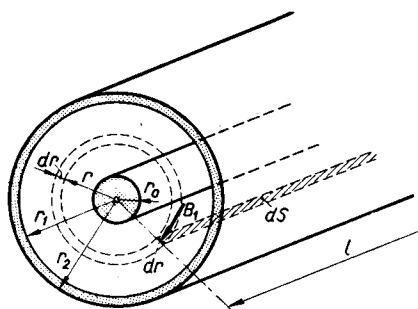
$$\Psi = l \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot I \cdot \frac{1}{4} = l \cdot \frac{10^{-7}}{2} \cdot I$$

slijedi da sam jedan okrugli vodič iz neferomagnetskog materijala daje ukupnom induktivitetu po jedinici duljine doprinos

$$L_0 = \frac{10^{-7}}{2} \text{ H/m}$$

potpuno neovisno o radijusu vodiča, što se formalno matematički objašnjava time, da se nakon integriranja međusobno krata R^4 u brojniku i nazivniku.

Na kraju ovog izvoda treba ponovno naglasiti da je proračun unutarnjeg induktiviteta i time ukupni induktivitet dalekovoda proveden uz pretpostavku da je u masivnom vodiču gustoća struje na cijeloj površini poprečnog presjeka konstantna. Taj uvjet ispunjen je za struju čija se jakost tokom vremena ne mijenja, pa zato dobivene vrijednosti induktiviteta vrijede samo pri istosmjernoj struji. Pri izmjeničnoj struji zbog pojave skin-efekta tj. zbog potiskivanja struje prema periferiji masivnog vodiča nije gustoća struje konstantna, pa dobivene formule ne daju točne vrijednosti induktiviteta.



Sl. 11.51. Induktivitet koaksijalnog kabela.

Ipak u praksi one često služe za proračun induktiviteta dalekovoda ako frekvencija izmjenične struje nije velika, npr. pri dalekovodima izmjenične struje frekvencije 50 Hz.

Na sličan način izračunat će se i induktivitet koaksijalnog voda (kabela) prikazanog na slici 11.51. Oko cilindričnog punog vodiča radijusa r_0 postavljen je koncentrično šuplji cilindrični vodič radijusa r_1 i r_2 . Kroz svaki vodič prolazi struja I , i to kroz unutarnji u jednom, a kroz vanjski u suprotnom smjeru. Materijal vodiča je neferomagnetski.

Magnetske silnice u izolacionom prostoru su koncentrične kružnice, a uzbuda u tom prostoru između dva vodiča ovisi samo o struji unutarnjeg vodiča. Prema tome su ovdje prilike iste kao da je unutarnji vodič sam.

Na radijusu r imamo dakle uzbudu $H_1 = (I/2r\pi)$, a gustoća je $B_1 = \mu_0 \cdot (I/2r\pi) = 2 \cdot 10^{-7} \cdot (I/r)$. Elementarni tok kroz površinu $dS = l \cdot dr$ jednak je $d\Phi_1 = l \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot I (dr/r)$, a ukupni tok u cijelom prostoru između unutarnjeg i vanjskog vodiča je

$$\Phi_1 = \int_{r_0}^{r_1} d\Phi_1 = l \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot I \cdot \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} = l \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot I \cdot \ln \frac{r_1}{r_0}$$

Ovom toku odgovara po jedinici duljine kabela induktivitet

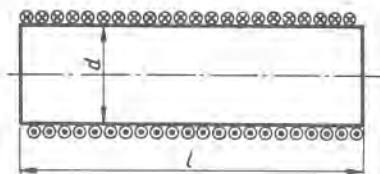
$$L_1 = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{r_1}{r_0}$$

K tome treba još dodati doprinose ukupnom induktivitetu koji potječu od magnetskih tokova u materiji centralnog vodiča i vanjskog cilindra. Pri tom je doprinos vanjskog cilindra neznatan i može ga se zanemariti, a od unutarnjeg vodiča je $L_0 = (10^{-7}/2)$ H/m i tako je ukupni induktivitet L' po jedinici duljine približno jednak

$$L' = L_1 + L_0 = \left(2 \cdot \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{2} \right) \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

11.4.5. Induktivitet jednoslojnog svitka. Koeficijent samoindukcije, ili ukratko induktivitet L , osnovna je i važna električka veličina svake zatvorene strujne konturne. Stoga je razumljivo da su fizičari i tehničari već u prvim danima razvoja elektrotehnike tražili načine kako da se izračuna L za sve moguće vrste svitaka, jer su svici oni konstruktivni elementi kojima je glavna karakteristična električka veličina baš koeficijent L .

U općenitom slučaju dolazi se pri određivanju vrijednosti L na veoma komplicirane matematičke račune, jer jednadžba za proračun koeficijenta L različito oblikovanih svitaka nije dana nekim matematički zatvorenim izrazom, već su to redovno beskonačni redovi.



Sl. 11.52. Cilindrični jednoslojni svitak čija je duljina l .

Izvjесnim zanemarenjima dobivene su, međutim, jednostavnije formule koje služe u praksi za proračun induktiviteta gdje se ne traži apsolutna točnost.

Tako se na cilindrični jednoslojni svitak u zraku, slika 11.52, čija je duljina l znatno veća od promjera d zavoja, može primijeniti jednadžba kojom se izračunava induktivitet torusnog svitka $L = N^2/R_m$, koja uz supstituciji $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, $S = d^2\pi/4$ i $R_m = (10^7/4\pi) \cdot (l/S)$ poprima oblik $L = \pi^2 \cdot d^2 \cdot (N^2/l) \cdot 10^{-7}$, ili ako se sa $N_1 = N/l$ označi broj zavoja po jednom metru duljine svitka, onda je

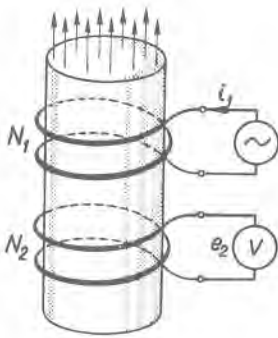
$$L = \pi^2 \cdot d^2 \cdot N_1^2 \cdot l \cdot 10^{-7} \text{ H}$$

Ako je svitak kraći pa je l veličina istog reda kao i d , treba ovu formulu korigirati korekcionim faktorom k , koji se naziva Nagaokin faktor, a ovisi o omjeru d/l pa je $L = k \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot N_1^2 \cdot l \cdot 10^{-7} \text{ H}$. U slijedećoj tablici dane su vrijednosti faktora k u ovisnosti o omjeru d/l .

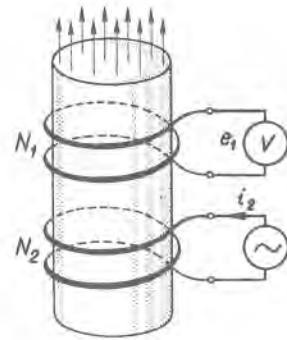
Tablica Nagaokinog faktora k

$\frac{d}{l}$	k	$\frac{d}{l}$	k	$\frac{d}{l}$	k	$\frac{d}{l}$	k
0,00	1,000	0,50	0,818	1,00	0,688	4,00	0,365
0,05	0,975	0,55	0,803	1,10	0,667	4,50	0,341
0,10	0,959	0,60	0,789	1,20	0,648	5,00	0,320
0,15	0,939	0,65	0,775	1,40	0,611	6,00	0,285
0,20	0,920	0,70	0,761	1,60	0,580	7,00	0,258
0,25	0,902	0,75	0,748	1,80	0,551	8,00	0,237
0,30	0,884	0,80	0,735	2,00	0,526	9,00	0,219
0,35	0,867	0,85	0,723	2,50	0,472	10,00	0,203
0,40	0,850	0,90	0,711	3,00	0,429		
0,45	0,834	0,95	0,700	3,50	0,394		

11.4.6. Međusobna indukcija. Kao što je spomenuto u uvodu, međusobnom indukcijom nazivamo pojavu koja se očituje time da se zbog promjene jakosti struje u jednom (primarnom) svitku inducira napon u nekom drugom (sekundarnom) svitku.



Sl. 11.53. Promjena jakosti struje u primarnom svitku inducira napon u sekundarnom svitku.



Sl. 11.54. Promjena jakosti struje u sekundarnom svitku inducira napon u primarnom svitku.

Ako pretpostavimo da su oba svitka tako smještena da su sve silnice magnetskog toka što ga proizvodi primarni svitak potpuno povezane ili ulančane sa svim zavojima sekundarnog svitka, onda u osnovnu jednadžbu elektromagnetske indukcije, kojom izračunavamo sekundarni napon

$$e_2 = -N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

moramo za $d\Phi$ uvrstiti vrijednost koju dobivamo diferenciranjem magnetskog toka primarnog svitka $\Phi = i_1 N_1 / R_m$. Tada je $d\Phi = (N_1 / R_m) \cdot di_1$ pa dobivamo (slika 11.53)

$$e_2 = -N_2 \cdot \frac{N_1}{R_m} \cdot \frac{di_1}{dt} = -\frac{N_1 \cdot N_2}{R_m} \cdot \frac{di_1}{dt}$$

Konstantnu vrijednost razlomka $N_1 \cdot N_2 / R_m$ zovemo koeficijentom međusobne indukcije ili međuinduktiviteta obaju svitaka i označujemo slovom M_{12}

$$M_{12} = \frac{N_1 \cdot N_2}{R_m}$$

pa je

$$e_2 = -M_{12} \cdot \frac{di_1}{dt}$$

Vidimo da se opet induciranje i sekundarnog napona pri otvorenim sekundarnim stezaljkama može prikazati kao posljedica promjenljive primarne struje, a veličina tog napona ovisi o brzini promjene primarne struje, ali i o konstrukciji obaju svitaka i o njihovu međusobnom smještaju, što određuje koliki će biti međuinduktivitet M_{12} .

Slične bi prilike nastale kad bismo umjesto na svitak 1 priključili izvor promjenljive struje na svitak s oznakom 2, te ako bismo mjerili inducirani napon na stezaljkama neopterećenog svitka 1. Uz ovu promjenu priključka (slika 11.54) imamo sada i odgovarajuću promjenu indeksa koji označuju električke veličine. Tako će zbog promjene struje i_2 jednadžba inducirano napona e_1 glasniti

$$e_1 = -M_{21} \cdot \frac{di_2}{dt}$$

gdje je M_{21} međuinduktivitet koji karakterizira međusobnu magnetsku vezu svitaka 2 sa svitkom 1.

Ako je permeabilnost μ prostora konstantna i neovisna o promjenama jakosti struje obje su vrijednosti međuinduktiviteta jednake, pa možemo staviti

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Budući da u ovim našim izvodima pretpostavljamo da se svici nalaze u zraku, za koji je $\mu = \mu_0 = \text{konstanta}$, upotrebljavat ćemo u daljnjim izvodima za oznaku međuinduktiviteta slovo M .

Jedinica kojom se mjeri međuinduktivitet dvaju svitaka M jednaka je jedan henri (H), isto kao i jedinica za vlastiti induktivitet L , o čemu se možemo uvjeriti uvrštavanjem jedinica onih osnovnih veličina pomoću kojih je definiran međuinduktivitet M . Iz gornje jednadžbe slijedi, naime, da je

$$M = \frac{e_2 \cdot dt}{di_1}$$

pa dobivamo da je jedinica za M opet

$$\frac{V \cdot s}{A} = \Omega \cdot s = H.$$

Međuinduktivitet od jednog henrija imat će dva svitka (ili dva strujna kruga) onda, ako se u jednom svitku struja mijenja *jednolično* za jedan amper u jednoj sekundi, a pri tome se u drugom svitku inducira napon od jednog volta.

Prije smo vidjeli da se vlastiti induktivitet svitka L može shvatiti kao faktor kojim pomnožena vlastita struja svitka daje upravo ukupni ulančeni tok svitka $N_1 \cdot \Phi = \Psi_1$.

Slično tome je produkt međuinduktiviteta M sa strujom jednog svitka jednak ulančanom magnetskom toku drugog svitka, jer iz prijašnjih jednadžba

$$\Phi = i_1 \cdot \frac{N_1}{R_m} \quad \text{ i } \quad M = \frac{N_1 \cdot N_2}{R_m}$$

odnosno

$$R_m = \frac{N_1 \cdot N_2}{M}$$

slijedi

$$i_1 \cdot M = N_2 \cdot \Phi = \Psi_2$$

Oдавде dobivamo za međuinduktivitet M još i ovu definiciju: međuinduktivitet dvaju svitaka jednak je ulančanom toku svitka, kad je jakost struje drugog svitka jednaka jedan amper

$$M = \frac{N_2 \cdot \Phi}{i_1} = \frac{N_1 \cdot \Phi}{i_2}$$

U ovom idealiziranom slučaju kad je sav proizvedeni tok jednog svitka, npr. primarnog, bio ulančan sa cijelim sekundarnim svitkom, možemo koeficijent M prikazati pomoću koeficijenata L_1 i L_2 pojedinih svitaka. Ako, naime, pomnožimo $L_1 = N_1^2/R_m$ i $L_2 = N_2^2/R_m$ dobivamo

$$L_1 \cdot L_2 = \frac{N_1^2 \cdot N_2^2}{R_m^2} = \left(\frac{N_1 \cdot N_2}{R_m} \right)^2 = M^2$$

pa je

$$M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

Pretpostavka da sav magnetski tok primarnog svitka prolazi i kroz sve zavoje sekundarnog svitka redovno neće biti ispunjena, osobito ako se svići nalaze u zraku, jer se silnice magnetskog toka izlazeći iz primarnog svitka naglo razilaze na sve strane u prostoru.

Na slici 11.55 prikazan je prolazak silnica magnetskog toka Φ_1 što ga proizvodi primarna struja i_1 . Ako se u tom magnetskom polju nalazi negdje sekundarni svitak, on će od ukupnog toka Φ_1 biti zahvaćen samo jednim dijelom, koji označujemo sa Φ_{12} . Ostali dio magnetskog toka koji se zatvara izvan sekundarnog svitka, jer ne sudjeluje u induciranoj sekundarnog naponu, nazivamo rasipnim tokom, a na slici označujemo sa Φ_{10} . Tako je

$$\Phi_1 = \Phi_{12} + \Phi_{10} \quad \text{i} \quad \Phi_{12} = \Phi_1 - \Phi_{10}$$

Zbog pojave rasipavanja magnetskih silnica bit će, dakle, sada ulančani sekundarni tok $N_2 \cdot \Phi_{12}$ manji nego u prijašnjem idealnom slučaju, pa će pri istoj promjeni struje i_1 biti manji i sekundarni inducirani napon e_2 . Isto će tako biti manji i koeficijent međusobne indukcije, jer je i on prema jednadžbi

$$M = \frac{N_2 \cdot \Phi_{12}}{i_1}$$

ovisan o ukupnom ulančenom sekundarnom toku.

Isti odnosi, samo s promijenjenim indeksima u veličinama, bili bi ako bi se svitak 2 priključio na promjenljivi izvor struje, a mjerio napon na otvorenim stezaljkama svitka 1.

Smanjivanje koeficijenta M zbog slabije magnetske veze obaju svitaka u odnosu na vrijednost $M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$, koja vrijedi jedino za idealno magnetski povezane svitke, izražava se matematički uvođenjem faktora k , čime se koeficijent M može prikazati općenito jednadžbom

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

odakle je

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

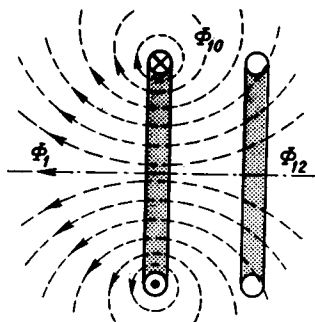
Faktor k nazivamo faktorom magnetskog vezanja, a njegova je vrijednost

za idealnu vezu $k = 1$

za nepotpunu vezu $k < 1$

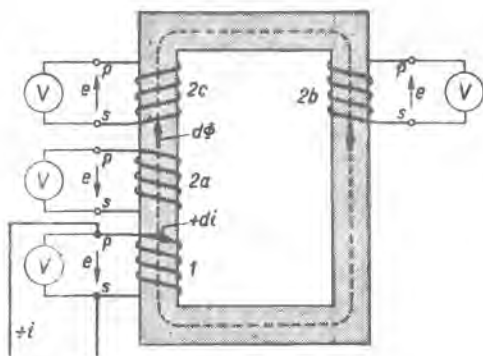
Iako se međuinduktivitet M mjeri istom jedinicom henri kao i vlastiti induktivitet L , ipak se ta dva koeficijenta razlikuju međusobno po tome što vlastiti induktivitet ulazi u osnovnu jednadžbu za proračun inducirano napona samoindukcije uvijek s pozitivnim predznakom, dok koeficijent M može biti ne samo pozitivan, već i negativan.

Predznak koeficijenta M ovisi, naime, o tome koji ćemo smjer struje odabrati kao pozitivan u jednom, a koji u drugom strujnom krugu kad promatramo pojavu međusobne indukcije.



Sl. 11.55. Uz definiciju rasipnog toka Φ_{10}

Ako pozitivna struja jednog svitka potjera magnetske silnice kroz drugi svitak u istom smjeru u kojem će prolaziti i silnice koje je u drugom svitku proizvela njegova pozitivna struja, onda je M pozitivan, a u protivnom je negativan. To se može



Sl. 11.56. Određivanje predznaka koeficijenta međusobne indukcije.

vidjeti na slici 11.56, gdje je u svicima kao pozitivan smjer struje odabran onaj kad struja ulazi na početak p namota, a izlazi na svršetku namota s . Svitak 1, kao primarni, stvara pri tome magnetsko polje u označenom smjeru i njegove silnice prolaze kroz sekundarni svitak 2. U položaju a sekundarnog svitka bit će u njemu inducirani napon međusobne indukcije pri porastu primarne struje $+di$, jednako usmjeren kao i inducirani napon samoindukcije primarnog svitka, što je označeno strelicom uz voltmetar koji mjeri te napone. Koeficijent M između primarnog svitka i sekundarnog u položaju a je pozitivan, dok bi taj koeficijent za primarni i

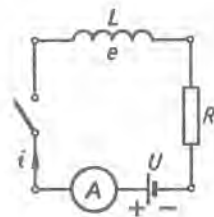
sekundarni u položaju b bio negativan, jer je sada u odnosu na prijašnji slučaj inducirani naponi uz istu promjenu struje promijenio smjer, tj. predznak, što matematički možemo pripisat promjeni predznaka veličine M .

Isto tako bismo dobili negativni predznak koeficijenta M ako bismo za sekundarni svitak u položaju c odabrali kao pozitivan smjer računanja onaj od s prema p , što je, međutim, ekvivalentno tome kao da smo sekundarni svitak u odnosu na primarni namatali u obrnutom smjeru, kao što je prikazano na slici 11.56.

11.4.7. Priključak induktivnog svitka na izvor konstantnog napona. Iz jednačbe $e = -L(di/dt)$ slijedi da se napon samoindukcije pojavljuje u strujnim krugovima samo onda ako je struja promjenljiva, dok se utjecaj koeficijenta L (a isto tako i koeficijenta M), neće opaziti pri istosmjernoj struji, jer uz $i = \text{konst.}$ $di/dt = 0$.

Ipak se i u strujnim krugovima istosmjerne struje mora uzeti u račun utjecaj koeficijenta samoindukcije L u onim trenucima kada se zbog bilo kakve promjene u strujnom krugu mijenja jakost istosmjerne struje. Pri tome su od osobita interesa dva granična slučaja i to priključak strujnog kruga s induktivitetom L na izvor konstantnog napona U , te prekidanje postojeće istosmjerne struje I u strujnom krugu s induktivitetom L .

Na slici 11.57 je shematski prikazan priključak induktivnog svitka na izvor konstantnog napona U . Budući da realno izrađeni električki uređaji imaju uvijek i neki otpor, na prikazanoj shemi R je ukupni otpor strujnog kruga.



Sl. 11.57. Induktivni svitak priključen na izvor konstantnog napona.

Kad sklopku zatvorimo i time svitak priključimo na napon U , neće struja momentano postići vrijednost koju određuje Ohmov zakon, nego će postepeno rasti od vrijednosti nula i tek će nakon nekog vremena postići trajnu vrijednost $I = U/R$.

Kad, naime, vrijednost promjenljive struje i raste, postoji promjena struje di zbog koje se inducira napon samoindukcije $e = -L(di/dt)$, koji se prema Lenzovu zakonu suprotstavlja promjeni jakosti struje, pa usporava njezin nagao porast. U tom prijelaznom periodu struja i će ipak pod utjecajem aktivnog napona izvora postepeno rasti, a tijekom njena porasta $i = f(t)$ može se odrediti ako se za promatrani strujni krug postavi jednadžba drugog Kirchhoffova zakona.

Taj zakon kaže da je suma svih stvorenih napona u strujnom krugu jednaka sumi umnožaka jakosti struje s otporima strujnog kruga. U promatranom slučaju naponi koji djeluju u krugu jesu konstantni napon izvora U i promjenljivi inducirani napon samoindukcije $e = -L(di/dt)$, pa je

$$U + e = i \cdot R$$

ili

$$U - L \frac{di}{dt} = i \cdot R$$

Iz ove jednadžbe možemo odrediti $i = f(t)$. U tu svrhu podijelimo najprije cijelu jednadžbu sa R , pa dobivamo

$$\frac{U}{R} - \frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} = i$$

Tu je U/R konačna vrijednost jakosti struje I , što je određuje Ohmov zakon, dok se kvocijent $L/R = \tau$ zove vremenska konstanta strujnog kruga, jer ona ima doista dimenziju vremena, o čemu se možemo osvjedočiti uvrštenjem jedinica kojima mjerimo L i R . Izlazi, naime, da je $\Omega \cdot s/\Omega = s$.

Time osnovna jednadžba dobiva oblik

$$I - i = \tau \frac{di}{dt}$$

a da bismo je mogli integrirati moramo provesti separaciju varijabla, pa dobivamo

$$\frac{di}{I - i} = \frac{dt}{\tau}$$

ili

$$\frac{d(I - i)}{I - i} = -\frac{dt}{\tau}.$$

što nam nakon integriranja daje

$$\ln(I - i) = -\frac{t}{\tau} + C$$

Konstantu integracije određujemo iz početnog uvjeta, a taj je da je u trenutku $t = 0$ i struja $i = 0$, pa je

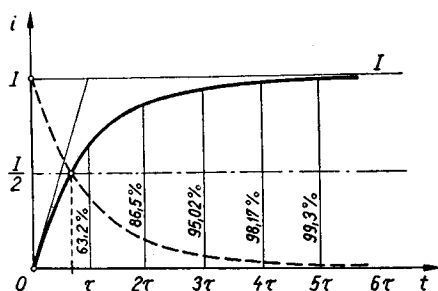
$$C = \ln I$$

Konačno dobivamo da je $\ln(I-i)/I = -t/\tau$, a ako od ove logaritamske jednadžbe prijedemo na eksponencijalni oblik, rješenje jednadžbe glasi

$$\frac{I-i}{I} = e^{-t/\tau}$$

ili

$$i = I \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$



Sl. 11.58. Eksponencijalni porast struje kod priključka svitka na konst. napon.

Dobivena jednadžba kaže da će kod priključka induktivnog svitka na konstantni napon izvora jakost struje rasti po istom eksponencijalnom zakonu kao što se povećavao napon na kondenzatoru priključenom na konstantni napon izvora.

Na slici 11.58 prikazan je taj eksponencijalni porast struje od vrijednosti nula do konačne vrijednosti I . Pri tome pojedinim vremenskim trenucima koji su mno-
gokratnici vremenske konstantne pripadaju isti postotni iznosi konačne vrijednosti struje koje smo već izračunali kod priključka kondenzatora na konstantni napon izvora, a to su

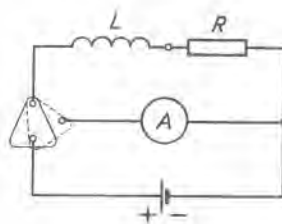
za $t = 0$	$i = 0$
$t = \tau$	$i = 63,2 \% \text{ od } I$
$t = 2\tau$	$i = 86,5 \% \text{ od } I$
$t = 3\tau$	$i = 95,02 \% \text{ od } I$
$t = 4\tau$	$i = 98,17 \% \text{ od } I$
$t = 5\tau$	$i = 99,3 \% \text{ od } I$

Konačnu vrijednost $I = U/R$ postigla bi struja teoretski tek nakon beskonačno dugog vremena, no u praksi se smatra da je ta vrijednost postignuta već nakon vremena od 4 do 5 vremenskih konstanata.

Ovdje, kao i pri svakom eksponencijalnom porastu, vremensku konstantu τ dobivamo u dijagramu kao subtangentu na horizontalnom pravcu čija je ordinata I .

11.4.8. Prekid struje u induktivnom svitku. Drugi karakteristični slučaj, gdje se također ispoljava utjecaj koeficijenta L u strujnim krugovima istosmjerne struje, jest prekidanje njezina toka I na taj način, da se u strujnom krugu sklopkom kratko spoji svitak kroz koji struja prolazi. Istovremeno treba, dakako, isključiti izvor da on ne bi bio u kratkom spoju. Time je trenutačno nestalo napona koji je tjerao struju, pa će prestati i njezin tok. Taj prestanak struje neće se, međutim, dogoditi trenutačno, već će se jakost struje postepeno smanjivati. Svaka, naime,

promjena di inducirat će po Lenzovu zakonu elektromotornu silu koja se suprotstavlja promjeni struje i želi njezinu vrijednost zadržati. No zbog nestanka efektivnog napona U struja će ipak konačno pasti na nulu, a vremenski tok njezina smanjivanja dobiva se primjenom drugog Kirchhoffovi zakona na strujni krug, slika 11.59, u kojem je sada $U = 0$, a početni uvjet glasi da u trenutku $t = 0$ struja ima vrijednost I .



Sl. 11.59. Prekidanje struje u svitku kratkim spajanjem svitka.

Osnovna jednadžba dobiva, dakle, oblik

$$0 = iR + L \frac{di}{dt}$$

Supstitucijom $R/L = \tau$ i separacijom varijabla dobiva se diferencijalna jednadžba

$$\frac{di}{i} = -\frac{dt}{\tau}$$

čije je rješenje

$$\ln i = -\frac{t}{\tau} + K$$

Iz početnog uvjeta dobiva se vrijednost konstante $K = \ln I$, tako da je

$$\ln \frac{i}{I} = -\frac{t}{\tau}$$

ili

$$\frac{i}{I} = e^{-t/\tau}$$

i konačno

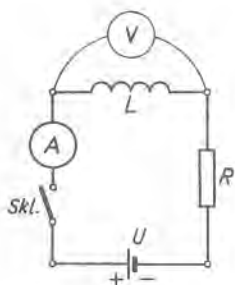
$$i = I \cdot e^{-t/\tau}$$

Ako se ovim kratkim spajanjem nisu promijenile vrijednosti R i L strujnog kruga ostaje vremenska konstanta τ ista kao i prije za vrijeme porasta struje kod priključivanja napona. Ako se pri tom ipak nešto promijenio otpor R , mijenja se dakako i τ .

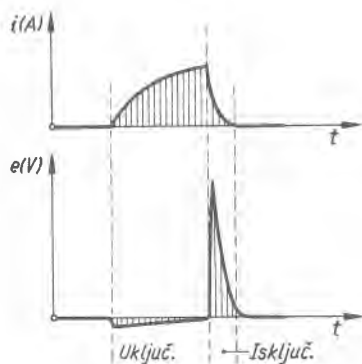
Grafički prikaz ove jednadžbe jest eksponencijalna krivulja, pri čemu struja od vrijednosti I biva sve manja, a teoretski bi vrijednost nulu postigla tek nakon beskonačno dugog vremena, slika 11.58. Smatramo, naravno, da je njena vrijednost jednaka nuli već nakon vremena koje odgovara 4-5 vremenskih konstanata: $t = (4-5) \tau$, jer je njezin iznos tada još samo nekoliko tisućinka I .

Ako je vremenska konstanta pri smanjivanju struje jednaka vremenskoj konstanti pri porastu struje, obje su krivulje međusobno zrcalne slike s obzirom na horizontalu u polovici ordinate maksimalne struje $I/2$. Ova polovična vrijednost dobiva se za vrijeme $t = 0,693 \cdot \tau$.

Ako bismo postojeću struju I htjeli smanjiti na nulu time, da, prema slici 11.60, strujni krug sklopkom jednostavno prekinemo, nastala bi veoma nagla promjena struje za veoma kratko vrijeme, a visina induciranog napona $e = -L(di/dt)$ postala bi tako velika da bi se zbog velike jakosti električkog polja u sklopki na mjestu prekida pojavila iskra, koja je u biti nastavak toka struje kroz zrak unatoč prekidu u strujnom krugu. U tom slučaju krivulja induciranog napona imala bi osobito karakterističan oblik, prikazan na slici 11.61.



Sl. 11.60. Prekidanje struje u **svitku** otvaranjem strujnog kruga.

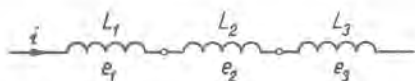


Sl. 11.61. Dijagram struje i napona pri prekidanju struje prema slici 11.60.

Iz svega što je navedeno o porastu i smanjivanju jakosti struje slijedi da zbog prisustva induktiviteta L strujni krug pokazuje izvjesnu tromost pri svakoj promjeni struje, jer uvijek želi da mu struja zadrži prijašnju vrijednost. Ta električka tromost ovisi o vremenskoj konstanti τ i ona je to veća, što je uz konstantni R veći koeficijent L , no ona ovisi i o otporu R , pa je uz isti L to veća, što je otpor R manji.

11.4.9. Rezultantni induktivitet više svitaka. Ako je u strujnom krugu spojeno više svitaka u seriju, rezultatni induktivitet L izračunava se kao suma svih induktiviteta L_i pojedinih svitaka, što slijedi iz razmatranja na osnovi slike 11.62.

Zbog serijskog spoja kroz sve svitke prolazi jedna te ista struja i , pa su u pojedinim svicima inducirani naponi samoindukcije



Sl. 11.62. Serijski spoj triju svitaka.

$$e_1 = -L_1 \frac{di}{dt}; \quad e_2 = -L_2 \frac{di}{dt};$$

$$e_3 = -L_3 \frac{di}{dt} \dots$$

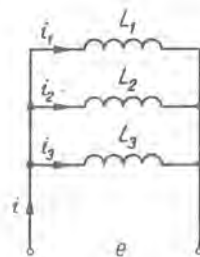
Rezultantni napon samoindukcije $e = -L (di/dt)$ jednak je prema drugom Kirchhoffovu zakonu sumi pojedinih napona

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \dots =$$

$$= -(L_1 + L_2 + L_2 + \dots) \cdot \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

gdje sumu koeficijenata L_i smatramo rezultantnim induktivitetom svih svitaka spojenih u seriju

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots = \sum L_i$$



Sl. 11.63. Paralelni spoj triju svitaka.

Paralelno spojeni svici prikazani su na slici 11.63, na osnovi koje se može za struje napisati jednadžba prvog Kirchhoffova zakona

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots$$

pa je

$$di = di_1 + di_2 + di_3 + \dots$$

Za inducirane napone vrijedi jednadžba

$$e = e_1 = e_2 = e_3 = \dots$$

odnosno

$$L \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} = L_3 \frac{di_3}{dt} = \dots$$

odakle je

$$\frac{di}{dt} = \frac{e}{L}; \quad \frac{di_1}{dt} = \frac{e}{L_1}; \quad \frac{di_2}{dt} = \frac{e}{L_2}; \quad \frac{di_3}{dt} = \frac{e}{L_3} \dots$$

pa je

$$\frac{e}{L} = \frac{e}{L_1} + \frac{e}{L_2} + \frac{e}{L_3} + \dots$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots$$

ili općenito

$$\frac{1}{L} = \sum \frac{1}{L_i}$$

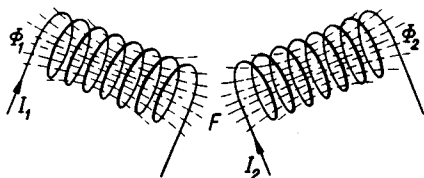
Valja istaknuti da je u ovim proračunima rezultantnog induktiviteta pretpostavljeno da između pojedinih svitaka nema međuinaktivne veze. Ukoliko postoji i međuinaktivni utjecaj između svitaka, potrebno je osim napona samoindukcije uračunati još i inducirane napone međusobne indukcije. Budući da su problemi ove vrste interesantni uglavnom u strujnim krugovima izmjenične struje, bit će utjecaj koeficijenta M na rezultantni induktivitet posebno razmatran u poglavlju o izmjeničnim strujama.

11.5.

SILE U MAGNETSKOM POLJU

Drugi osnovni učinak magnetskog polja jest učinak mehaničkih sila i njega smatramo glavnom karakterističnom oznakom magnetizma. U elementarnim razmatranjima magnetskih pojava taj se učinak objašnjava kao međusobno privlačenje ili odbijanje dvaju magneta.

S obzirom na činjenicu da je magnetizam svakog magneta nastao kao posljedica neke struje, možemo naša razmatranja o djelovanju sila jednog magneta na drugi shvatiti kao međusobno djelovanje dvaju elektromagneta kroz čije svitke prolaze struje I_1 i I_2 .

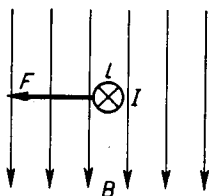


Sl. 11.64. Međusobnim djelovanjem dvaju elektromagneta stvorena sila F .

Na slici 11.64 vidimo da sila nastaje zbog toga što magnetski tokovi Φ_1 i Φ_2 svojim polovima na svicima djeluju jedan na drugoga prema poznatom pravilu da se istoimeni polovi odbijaju, a raznoimeni privlače. Ovo djelovanje sila dvaju magnetskih tokova možemo nadalje u mislima predočiti kao rezultat djelovanja magnetskog polja B jednog svitka na vodiče (zavoje) drugog svitka koji su protjecani strujom I_2 .

U posve općenitom slučaju, kad su svici obaju elektromagneta bili oblikovani i u prostoru smješteni bilo kako, ne može se ukupna sila odrediti (izračunati) jednostavnim načinom. To ukupno djelovanje može se, međutim, shvatiti kao rezultat svih elementarnih sila kojima magnetsko polje jednog svitka djeluje na elemente vodiča drugog svitka, koji su protjecani strujom.

11.5.1. Ravni vodič protjecan strujom u magnetskom polju. Osobito jednostavne i mjerenu pristupačne prilike imamo ako uzmemo u razmatranje samo jedan dio drugog svitka i to ravni vodič



Sl. 11.65. Na vodič protjecan strujom djeluje u magnetskom polju sila.

duljine l , koji se sav nalazi u homogenom magnetskom polju prvog svitka, te ako je vodič okomito položen na magnetske silnice. Sila kojom magnetsko polje djeluje na taj vodič protjecan strujom može se kako je prikazano na slici 11.65 izmjeriti, pa pokusi pokazuju da je sila direktno proporcionalna gustoći silnica B , jakosti struje I koja prolazi kroz vodič i duljini l na kojoj je vodič u dodiru sa silnicama

$$F = B \cdot I \cdot l$$

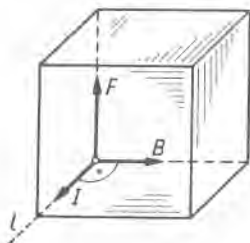
Smjer sile okomit je na ravninu koju tvori smjer struje i smjer magnetskih silnica, a određuje se po pravilu lijeve ruke, koje glasi: postavimo li lijevu ruku tako da nam magnetske silnice udaraju u dlan, a ispruženi prsti pokazuju smjer struje, onda ispruženi palac pokazuje smjer sile, slika 11.65.

Vidimo da su veličine I u vodiču l , B i F tri međusobno okomito usmjerena vektora, pa možemo prema slici 11.66 silu F prikazati kao vektorski produkt

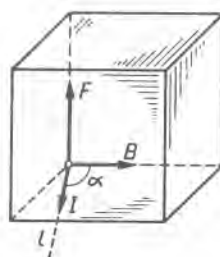
$$\mathbf{F} = I \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

U koherentnom internacionalnom sistemu jedinica sila F mjeri se u njutnima, što izlazi i iz osnovne jednačbe $F = B \cdot I \cdot l$, ako se za pojedine veličine desne strane uvrste njihove jedinice

$$\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot \text{A} \cdot \text{m} = \frac{\text{VA s}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}} = \text{N}$$



Sl. 11.66. Pravilo lijeve ruke prikazano u prostornom koordinatnom sustavu.



Sl. 11.67. Smanjivanje sile ako vodič nije okomit na magnetske silnice.

Najpovoljnije prilike za stvaranje sile F imamo baš u ovom najjednostavnijem i najpravičnijem slučaju kad je vodič protjecan strujom okomit na magnetske silnice. Ako je kut manji od 90° , slika 11.67, sila će se smanjivati i to, kako pokazuju mjerenja, po zakonu sinusa, pa kad vodič sa silnicama zatvara kut α , sila je

$$F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha$$

I u ovom slučaju (kao uvijek) sila je okomita na ravninu koju stvaraju smjerovi l i B , slika 11.67, pa i ovdje vrijedi vektorska jednačba

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

11.5.2. Ampereov zakon u elementarnom obliku. U prijašnjim izvodima bilo je pretpostavljeno da se vodič na cijeloj duljini l nalazi u homogenom magnetskom polju. Ako polje nije homogeno nisu svi elementi vodiča u istim magnetskim prilikama, pa se sila ne može računati po prijašnjoj jednostavnoj jednačbi. U tom slučaju prelazimo opet na računanje s elementarnim dijelovima vodiča $d\mathbf{l}$, jer za svaki taj element možemo ipak pretpostaviti da je i u nehomogenom polju

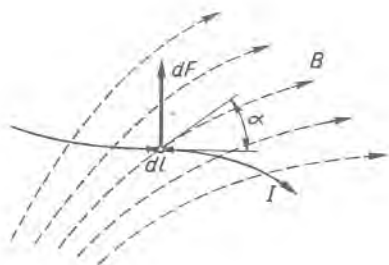
gustoća B na tako maloj duljini $d\mathbf{l}$ konstantna. Dakako da je onda dobiven samo diferencijal sile $d\mathbf{F}$, pa prema slici 11.68 imamo da je

$$dF = B \cdot I \cdot dl \cdot \sin \alpha$$

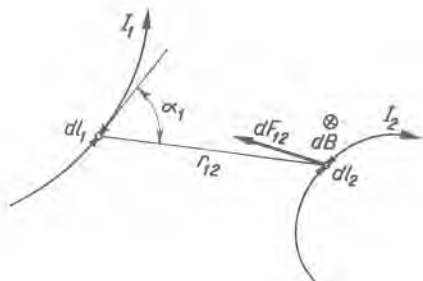
To vrijedi i onda ako vodič nije ravan već bilo kakva linija, jer i tada moramo cijelu duljinu razdijeliti na elemente $d\mathbf{l}$.

Element sile kao vektor prikazan je jednadžbom

$$d\mathbf{F} = I \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$



Sl. 11.68. Sila $d\mathbf{F}$ na element vodiča protječanog strujom u magnetskom polju.



Sl. 11.69. Sila kojom elementi struja I_1 i I_2 djeluju jedan na drugog.

a ukupna sila kojom magnetsko polje djeluje na vodič konačne duljine l jednaka je vektorskoj sumi svih elementarnih sila $d\mathbf{F}$. Napose vrijedi za cijeli zatvoreni strujni krug protječan strujom da je ukupna sila jednaka

$$\mathbf{F} = I \cdot \oint (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

Ove jednadžbe za proračun mehaničke sile F možemo sada još dalje razviti ako uzmemo u obzir da je magnetsko polje koje djeluje na vodič I_2 protječan strujom I_2 i samo proizvedeno prolaskom neke struje I_1 u vodiču I_1 , kako je to u uvodu već spomenuto.

Iz prikaza na slici 11.69 vidimo da je u tom slučaju na onome mjestu gdje se nalazi element $d\mathbf{l}_2$, od elementa struje $I_1 \cdot d\mathbf{l}_1$ proizvedena prema Biot-Savartovu zakonu gustoća

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{4 \pi} \cdot \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot \sin \alpha_1}{r_{12}^2}$$

Prema tome element struje $I_1 \cdot dl_1$ djeluje na element struje $I_2 \cdot dl_2$ silom koja je jednaka

$$dF_{12} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{4\pi} \cdot \frac{dl_1 \cdot \sin \alpha_1}{r_{12}^2} \cdot I_2 \cdot dl_2 \cdot \sin \alpha_2$$

Ova jednadžba može se napisati i u vektorskom obliku, koji je važan zbog toga što se osim iznosa dF_{12} dobiva odmah i smjer sile dF_{12}

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{1}{r_{12}^2} \cdot \left[dl_2 \times \left(dl_1 \times \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \right) \right]$$

Dobivena jednadžba za proračunavanje sile dF_{12} kojom elementi struja I_1 i I_2 djeluju jedan na drugog naziva se Ampereov zakon.

Tu oznaka 12 znači da se dobiveni smjer odnosi na silu kojom element struje I_1 djeluje na element struje I_2 . Ako se želi odrediti ukupna sila kojom će jedan strujni krug djelovati na drugi, treba sumirati sve elementarne sile koje nastaju zbog svih elemenata $I_1 \cdot dl_1$ na sve elemente $I_2 \cdot dl_2$. Dakako da se ova sumacija svih dF_{12} mora provesti vektorski, i ona će se jedino u posebnim slučajevima moći izvršiti jednostavnim matematičkim postupcima.

U svim ovim računima gdje određujemo mehaničku silu primjenom gornje jednadžbe moramo biti svjesni činjenice da je elementarna sila dF , koja nastaje međusobnim djelovanjem dvaju strujnih elemenata, samo matematička fikcija koja služi kao pomagalo da se uopće može obaviti proračun. Znamo, naime, da struja ne može postojati u nekom odvojenom elementu vodiča, već da ona uvijek teče u zatvorenim krugovima, pa prema tome fizikalni smisao imaju samo rezultantne sile dvaju strujnih krugova.

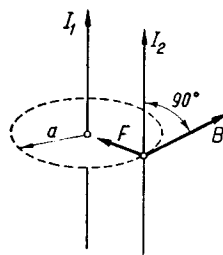
11.5.3. Elektrodinamičko djelovanje dviju struja. Definicija jedinice za mjerenje jakosti struje. U slijedećem primjeru obaviti ćemo proračun sile kojom djeluju jedan na drugog dva paralelna, veoma tanka i veoma duga vodiča, protjecana strujama I_1 i I_2 , slika 11.70.

Na slici se vidi da se jedan vodič nalazi u magnetskom polju drugog vodiča, tako da su magnetske silnice okomite na vodič i na svakom mjestu iste gustoće. Zato se ovdje može upotrijebiti i pojednostavnjena jednadžba $F = B \cdot I \cdot l$, gdje je B gustoća silnica na udaljenosti a od struje I_1

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot a \cdot \pi}$$

pa je sila F na drugi vodič duljine l_2 , protjecan strujom I_2 , jednaka

$$F = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I_1 I_2 \cdot l_2}{a \pi} \quad \text{N}$$

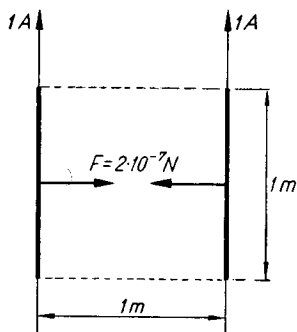


Sl. 11.70. Elektrodinamičko djelovanje dviju struja.

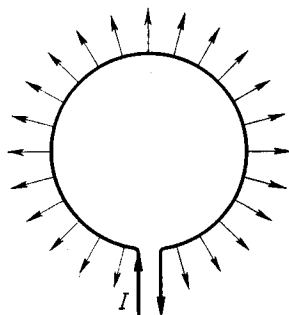
Uvrštenjem vrijednosti $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ dobivamo silu za jedinicu duljine vodiča $l_2 = 1$

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{a} \quad \text{N}$$

Stvaranje sile međusobnim djelovanjem dviju struja naziva se elektrodinamičko djelovanje, a smjer tako stvorene sile može se saznati bilo pomoću pravila lijeve ruke, bilo korištenjem vektorske jednadžbe za određivanje vektora F . Tako možemo saznati da se paralelne struje, tj. one istog smjera, privlače, dok se struje suprotnih smjerova, ili antiparalelne, odbijaju.



Sl. 11.71. Definicija jedinice amper.



Sl. 11.72. Zavoj protječan strujom izvrnut je rastezanju.

Primjenom ove jednadžbe definiran je u internacionalnom sistemu jedinica jedan amper (A) kao četvrta i to električna jedinica sistema MKSA:

električna struja ima jakost jedan amper (A) ako prolazeći kroz veoma dug i veoma tanki vodič djeluje u vakuumu na isto takvu paralelnu struju u udaljenosti od jednog metra silom $2 \cdot 10^{-7}$ njutna po jednom metru duljine vodiča, slika 11.71.

To slijedi iz direktnog uvrštavanja vrijednosti $a = 1$, $I_1 = I_2 = 1$ u gornju jednadžbu $F = 2 \cdot 10^{-7} \cdot (1 \cdot 1/1)$, pa je

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \quad \text{N}$$

Uvidom u izvedne jednadžbe o veličini sile kojom magnetsko polje djeluje na elemente (dijelove) linijskog vodiča protječanog strujom možemo za neke slučajeve saznati i najbitnije kvalitativne osobine stvorene sile, a da niti ne provodimo točan kvantitativni proračun sile.

Tako vidimo da samo magnetsko polje ravnog linijskog vodiča ne može uopće djelovati nekom silom na vlastiti vodič protječan strujom.

Međutim će pojedini elementi zakrivljenog vodiča protječanog strujom djelovati silom na ostale elemente tog istog vodiča. Kako je zavoj osnovni oblik zatvo-

renog strujnog kruga u kojem teče struja, možemo lako vidjeti da će svaki element zavoja od svih ostalih elemenata struje biti izvrnut djelovanju sila koje imaju radijalan smjer i žele ga rastegnuti, slika 11.72.

11.5.4. Sila magnetskog polja na električne naboje u gibanju. Stvorena magnetska sila na vodič protječan strujom u biti je sila kojom magnetsko polje djeluje na električne naboje u gibanju. Vidjeli smo, naime, da je jakost struje jednaka kvocijentu

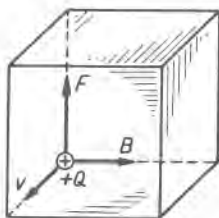
$$I = \frac{Q}{t}$$

pa ako u izraz $F = B \cdot I \cdot l$ uvrstimo gornji izraz, dobivamo da je

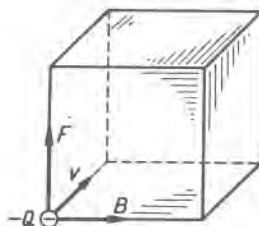
$$F = B \cdot \frac{Q}{t} \cdot l = Q \cdot \frac{l}{t} \cdot B$$

Ovdje je l/t brzina v kojom se naboj Q giba u vodiču, pa je

$$F = Q \cdot v \cdot B$$



Sl. 11.73. Sila na + električni naboj koji se giba u magnetskom polju.



Sl. 11.74. Sila na negativni električni naboj koji se giba u magnetskom polju.

Ovom transformacijom jednadžbe mijenja se i slika vektora (sl. 11.73), u kojoj sada umjesto struje I u smjeru dolazi vektor brzine v kojom se giba pozitivni električni naboj $+Q$, jer je smjer struje definiran kao smjer u kojem se gibaju pozitivni električni naboji. No kako je struja u metalnim vodičima ostvarena gibanjem negativnih elektrona, za taj slučaj smjerovi vektora prikazani su na slici 11.74.

Ako smjer brzine zatvara sa silnicama magnetskog polja kut $\alpha < 90^\circ$, ulazi u gornju jednadžbu još faktor $\sin \alpha$

$$F \cdot Q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$$

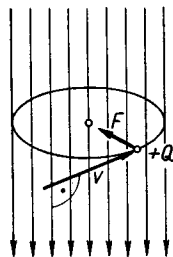
Vektorske jednadžbe glase

$$\mathbf{F} = Q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \text{ za pozitivne naboje}$$

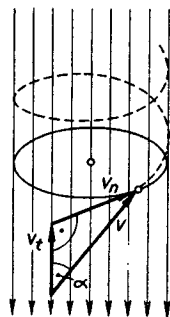
$$\mathbf{F} = -Q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \text{ za gibanje negativnih naboja.}$$

Sila F na gibajuće električke naboje okomita je na ravninu koju tvore smjer magnetskih silnica i smjer brzine. Zbog toga sila gibajući pojedini naboj ne može vršiti rad, jer za to bi joj bila potrebna komponenta u smjeru gibanja. Zato se kinetička energija električkih naboja ne mijenja i oni općenito pri gibanju u magnetskom polju zadržavaju konstantnu brzinu v .

Ako električki naboj uleti u homogeno i vremensko konstantno magnetsko polje gdje su silnice paralelni pravci, brzinom v , koja se poklapa sa smjerom magnetskih silnica, gibanje će se nastaviti konstantnom brzinom v u smjeru silnica. U tom naročitom slučaju je $\alpha = 0$, pa je $\sin \alpha = 0$ i sila $F = 0$, te tako ništa ne ometa veličinu prvotne brzine.



Sl. 11.75. Centripetalna sila pri gibanju naboja u magnetskom polju.



Sl. 11.76. Gibanje električkog naboja po zavojnici u magnetskom polju.

Ukoliko pak naboj uleti u homogeno magnetsko polje brzinom v okomitom na silnice, kut $\alpha = 90^\circ$, $\sin \alpha = 1$, postoji konstantna sila $F = Q \cdot v \cdot B$ koja će djelovati na naboj. Ona, međutim neće promijeniti veličinu brzine, već će samo promijeniti njezin smjer jer djeluje kao centripetalna sila $m \cdot a$. Električki naboj giba se u tom slučaju po kružnici, uz centripetalnu akceleraciju $a = v^2/r$. Izjednačujući prema II Newtonovu zakonu magnetsku silu $Q v B$ sa centralnom silom $m v^2/r$, možemo izračunati radijus kružnice po kojoj se giba naboj Q mase m (slika 11.75)

$$r = \frac{m \cdot v}{Q \cdot B}$$

Ako je početna brzina v kojom ulazi električki naboj u homogeno magnetsko polje takva da se smjerom magnetskih silnica zatvara kut α koji je veći od nule, a manji od 90° , možemo tu brzinu rastaviti na dvije komponente i to na tangencijalnu v_t koja se poklapa sa smjerom magnetskih silnica i na drugu normalnu v_n , okomitu na silnice

$$v_t = v \cdot \cos \alpha \qquad v_n = v \cdot \sin \alpha$$

Utjecaji ovih komponenata se superponiraju i daju resultantno gibanje električkog naboja, sastavljeno od pravocrtnog gibanja zbog komponente v_t i kružnog zbog komponente v_n . Linija resultantnog gibanja je vijčana zavojnica, slika 11.76.

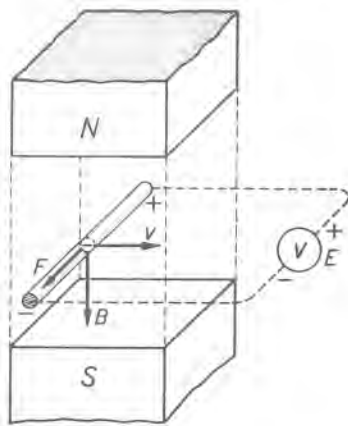
Ovo otklanjanje gibajućih električkih naboja u magnetskom polju iskorišćuje se u najrazličitije konstruiranim elektronskim i ionskim napravama, npr. u katodnim cijevima osciloskopa, televizora, te u ciklotronima i sl.

Zakon elektromagnetske indukcije formuliran za napon pomicanja jednadžbom $E = v \cdot B \cdot l$ može se također shvatiti kao posljedica sila koje djeluju na električke naboje u gibanju.

Ako se, naime, u magnetskom polju giba metalni, na primjer bakreni vodič, presijecat će pri tom elementarni električki naboji koji se nalaze u sastavu materije vodiča magnetske silnice, pa će na te naboje djelovati magnetske sile $\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

Positivni ioni koji predstavljaju kristalnu strukturu materije bit će izvrgnuti sili na jednu stranu, dok će na negativne elektrone djelovati sila u suprotnom smjeru. Pod utjecajem tih sila moći će se u vodiču gibati jedino slobodni elektroni, jer su samo oni unutar čvrste strukture materije pomični. Na slici 11.77. vidimo da je smjer sile na gibajuće elektrone takav da se oni pri tome još pomaknu i sakupe na jednom kraju vodiča koji postaje negativno električan, dok će suprotni kraj vodiča zbog manjka elektrona biti pozitivno električan.

Ta razlika električkih polariteta predstavlja razliku električkih potencijala, što je upravo inducirani napon $E = l \cdot v \cdot B$. Pravac djelovanja toga napona je u smjeru porasta potencijala, tj. unutar vodiča od negativnog kraja prema pozitivnom, što odgovara utvrđenom pravilu desne ruke, slika 11.44.



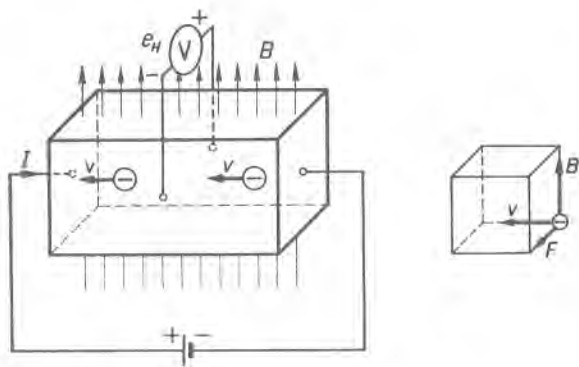
Sl. 11.77 Induciranje napona pomicanja kao posljedica sila na električke naboje.

11.5.5. Hallov napon. Stavimo li pločicu izrađenu od vodiča ili poluvodiča protjecanu strujom u magnetsko polje pojavit će se na pločici napon koji djeluje okomito na ravninu što je čini smjer struje i smjer magnetskog polja. Ova pojava naziva se Hallov-efekat, a stvoreni napon Hallov naponi.

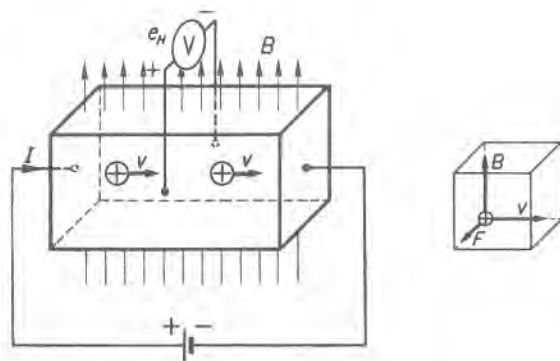
I pojava Hallova napona objašnjava se stvaranjem sila na električke naboje koji se pomiču u magnetskom polju. Samo je ovdje to gibanje naboja ostvareno električnom strujom koja iz nekog vanjskog izvora teče kroz električki vodljivu materiju. Struja može pri tom nastati gibanjem bilo pozitivnih bilo negativnih električkih naboja.

Ako, dakle, prema slici 11.78 postavimo u magnetsko polje koji metalni vodič u obliku pločice protjecane strujom, djelovat će to vanjsko magnetsko polje na usmjereno gibanje negativne elektrone silom $\mathbf{F} = -q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, pa će ih otklanjati u poprečnom smjeru. Time će se stvoriti nejednolična razdioba elektrona, jer će oni — u prikazanom slučaju — strujati sada na prednjem dijelu vodiča združeni u većem broju nego na njegovom stražnjem dijelu. Zbog toga postaje prednja površina negativno, a stražnja pozitivno polarizirana, i ta razlika potencijala je Hallov napon e_H koji se može izmjeriti priključenim voltmetrom.

Na slici 11.79 prikazano je kad je smjer struje I kroz vodljivu pločicu isti kao i prije, ali je ona nastala gibanjem pozitivnih naboja. Primjenom pravila o smjeru sile na električne naboje u gibanju vidimo da će u ovom primjeru biti sada pozitivni naboji otklonjeni prema prednjoj površini pločice koja postaje pozitivno, a stražnja negativno električna, pa će polaritet napona e_H biti obratan nego u prijašnjem primjeru.



Sl. 11.78. Stvaranje Hallova napona pri gibanju negativnih električnih naboja.



Sl. 11.79 Stvaranje Hallova napona pri gibanju pozitivnih naboja.

Veličina Hallova napona e_H može se računski odrediti na osnovi slijedećih razmatranja. Razlika potencijala, odnosno napon e_H , stvara na razmaku d električno polje jakosti $E_H = e_H/d$ i ono djeluje na elektrone silom $\mathbf{F}_e = -q \cdot \mathbf{E}_H$ koja je suprotna smjera od onoga magnetske sile $\mathbf{F}_m = -q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Tu je zbog gibanja elektrona brzinom v u magnetskom polju stvorena aktivna sila $\mathbf{F}_m$, kojoj kao reakcija djeluje električna sila $\mathbf{F}_e$, pa kad je uspostavljena ravnoteža dobiven je upravo napon e_H . Prema tome je

$$\begin{aligned} -q E_H &= -q \cdot \frac{e_H}{d} = \\ &= -q \cdot v \cdot B \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$E_H = v \cdot B$$

ili
$$e_H = v \cdot B \cdot d$$

To isto vrijedi ako se gibaju pozitivni električni naboji.

Vidimo da je Hallov napon direktno proporcionalan brzini v kojom se pomiču električni naboji u pločici, a ovisi i o gustoći B magnetskog polja u kojem se nalazi pločica.

Za koju izrađenu konstrukciju ovakve pločice brzina v ovisi o jakosti struje I koju puštamo iz vanjskog izvora kroz pločicu, pa je pri konstantnoj jakosti struje e_H ovisno samo o gustoći B . Takva pločica, koja se naziva i Hallov generator, može dakle, poslužiti za mjerenje gustoće magnetskog polja, jer je u prikazanom spoju

$$B \propto e_H$$

Jednadžbu $E_H = v \cdot B$ možemo preoblikovati na taj način da izrazimo brzinu v gibanja električkih naboja pomoću gustoće struje I i pomoću broja n elementarnih električkih naboja q na jedinicu volumena, jer je

$$v = \frac{I}{n \cdot q}$$

pa dobivamo da je

$$E_H = \frac{B \cdot I}{n \cdot q} \quad \text{i} \quad e_H = \frac{B \cdot I}{n \cdot q} \cdot d$$

U metalnim vodičima je broj n slobodnih elektrona (koji predstavljaju pomične elementarne naboje) na jedinicu volumena veoma velik, a njihova je brzina gibanja v duž vodiča mala, pa su Hallovi naponi postignuti u metalnim pločicama veoma mali. To je razlog da ta pojava, iako je otkrivena još godine 1879., nije osim teoretskog značenja imala neku drugu praktičku važnost.

U novije vrijeme, kad je tehnika poluvodiča naglo napredovala, stvorene su pločice Hallova generatora od takvih poluvodiča pomoću kojih se dobivaju i za male gustoće B dosta veliki naponi e_H , jer je koncentracija n pomičnih naboja u poluvodičima znatno manja nego u metalima. Pri tome se mogu načiniti poluvodičke pločice p ili n tipa, gdje se gibaju ili pozitivni ili negativni električki naboji, kako je to prikazano na prethodnim slikama. To je dovelo do sve veće upotrebe Hallova napona u mjernoj tehnici, i to ne samo za mjerenje gustoće magnetskog polja B , već i u raznim drugim primjenama. Tako se uvođenjem Hallova koeficijenta R_H , koji je definiran kao omjer

$$R_H = \frac{E_H}{I \cdot B} = \frac{1}{nq}$$

može mjerenjem veličina E_H i B izračunati njegova vrijednost, pa time za razne vodiče i poluvodiče odrediti broj elementarnih električkih naboja koji su slobodni u jedinici volumena, jer je $R_H = 1/nq$. Polaritet mjerenog napona e_H daje ujedno i polaritet tih elementarnih naboja, što se vidi na slikama 11.78 i 11.79.

11.5.6. Coulombov zakon.

Pri razmatranju magnetskih sila potrebno je spomenuti i Coulombov zakon koji je, objavljen 1785. godine, bio u nauci prvi matematički formuliran zakon magnetskih sila, a postavljen je bio na osnovi eksperimenta i mjerenja s permanentnim magnetima. Budući da se u ono vrijeme još nije znalo za povezanost električkih i magnetskih pojava, a kako se magnetske sile permanentnih magneta očituju izvana slično kao i sile električki nabijenih tijela, razumljivo je da je ta sličnost navela istraživače i na analogno tumačenje i objašnjavanje razmatranih pojava.

Tako se stvaranje magnetskih sila pripisalo postojanju hipotetskih magnetskih masa na polovima magneta, kao što je nastajanje električkih sila uzrokovano električkim nabojima elektriziranih tijela.

U analogiji s Priestleyevim zakonom za električke sile, kaže Coulombov zakon da je magnetska sila, kojom u zraku ili vakuumu djeluju dva magnetska pola jedan na drugog, proporcionalna umnošku magnetskih masa obaju polova Q_{m1} i Q_{m2} , a obrnuto proporcionalna kvadratu njihova razmaka.

U racionalnom sustavu jednadžba Coulombova zakona glasi

$$F = \mu_0 \cdot \frac{Q_{m1} \cdot Q_{m2}}{4 \pi \cdot r^2}$$

gdje faktor proporcionalnosti μ_0 uzima u račun utjecaj prostora među magnetskim masama i služi da dimenziono uskladi veličine lijeve i desne strane jednadžbe. Znamo da je μ_0 permeabilnost vakuuma, pa iz gornje jednadžbe slijedi da je u racionalnom SI sustavu jedinica za mjerenje veličine Q_m jednaka: ampermetar (Am).

To u biti odgovara umnošku jakosti struje i duljine vodiča kroz koji ona prolazi, što se slaže s današnjim shvaćanjem da je uzrok magnetskih pojava električna struja.

Moguće je, međutim, magnetske sile shvatiti kao manifestaciju magnetskih tokova Φ_1 i Φ_2 obaju magneta. U tom slučaju jednadžba Coulombova zakona mijenja oblik, kako bi opet lijevoj strani odgovarala dimenziono i desna strana, pa je

$$F = \frac{Q'_{m1} \cdot Q'_{m2}}{4 \pi \cdot \mu_0 \cdot r^2}$$

Q'_{m1} i Q'_{m2} imaju sada dimenziju magnetskog toka.

Jednadžba

$$F = \mu_0 \cdot \frac{Q_{m1} \cdot Q_{m2}}{4 \pi \cdot r^2}$$

može se napisati u obliku

$$F = \frac{\mu_0}{4 \pi} \cdot \frac{Q_{m1}}{r^2} \cdot Q_{m2}$$

što izlazi na to da se sila na magnetsku masu Q_{m2} može prikazati jednadžbom $F = B_1 \cdot Q_{m2}$, gdje je B_1 gustoća magnetskog polja prvog magneta na mjestu na kojem se nalazi pol Q_{m2} drugog magneta. U ovom obliku podsjeća nas ta jednadžba na onu za proračun električne sile na električki naboj Q u električkom polju jakosti E

$$F_e = E \cdot Q_e$$

$$F_m = B \cdot Q_m$$

11.5.7. Magnetski moment strujne konture.

U mnogim teoretskim razmatranjima korisno je za magnete uvesti pojam magnetski moment. Kao što je za električki dipol, a to je za dva jednaka električka naboja suprotnih predznaka definiran električki moment kao umnožak veličine naboja Q_e i razmaka d , tako možemo i magnet smatrati magnetskim dipolom koji na razmaku d ima dvije magnetske mase suprotnih polariteta, pa je magnetski moment jednak

$$\mathbf{m} = Q_m \cdot \mathbf{d}$$

gdje se smjer vektora $\mathbf{m}$ uzima opet od negativnog (S) pola prema pozitivnom (N) polu.

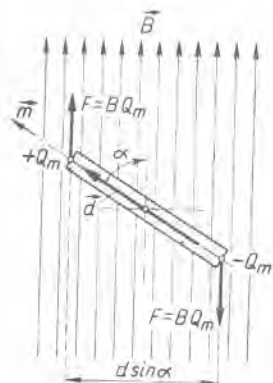
Primjenu ove novouvedene veličine $\mathbf{m}$ možemo vidjeti na jednom poučku važnom ne samo u teoriji, već i u praktičkim problemima elektromagnetizma. Radi se, naime, o tome da objasnimo i utvrdimo uvjete uz koje možemo strujni krug kao izvor magnetskog toka smatrati ekvivalentnim jednom permanentnom magnetu. Ta se ekvivalencija mora očitovati u tome da permanentni magnet, kao i strujni krug, jednako postavljeni u jednom te istom homogenom magnetskom polju gustoće B , moraju biti izvrgnuti istom momentu vrtnje M koji nastoji da njihove magnetske osi upravi u smjer silnica polja B .

U slici 11.80 se vidi da je za permanentni magnet zakretni moment jednak $M = F \cdot d \cdot \sin \alpha$, što uz izraz za silu $F = B Q_m$ daje

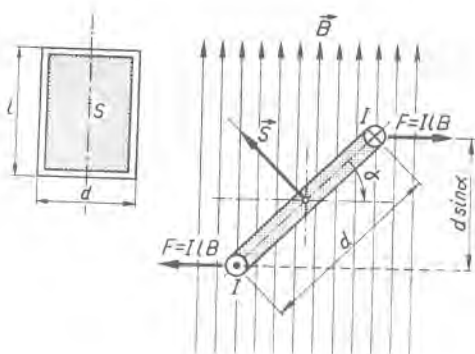
$$M = B \cdot Q_m \cdot d \cdot \sin \alpha = Q_m \cdot d \cdot B \cdot \sin \alpha$$

u kojem izrazu je $Q_m \cdot d = m$, pa je $M = m \cdot B \cdot \sin \alpha$ ili

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$



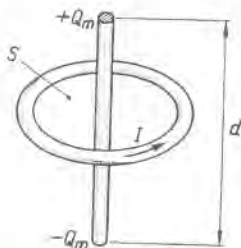
Sl. 11.80. Moment vrtnje koji djeluje na permanentni magnet u magnetskom polju.



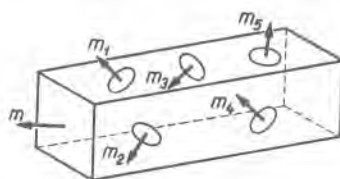
Sl. 11.81. Moment vrtnje koji djeluje na zavoj protječan strujom u magnetskom polju.

Kod zavoja protjecana strujom, slika 11.81, opet je $M = F \cdot d \cdot \sin \alpha$, gdje je sila $F = I \cdot l \cdot B$, pa je $M = I \cdot l \cdot d \cdot B \cdot \sin \alpha$, pri čemu je $l \cdot d = S$ površina što je obavića kontura strujnog kruga, te tako jednačba poprima oblik $M = I \cdot S \cdot B \cdot \sin \alpha$. Usmjerenoj površini možemo pridati vektorski karakter, pa je

$$\mathbf{M} = I \mathbf{S} \times \mathbf{B}$$



Sl. 11.82. Zavoj protječan strujom može nadomjestiti magnet.



Sl. 11.83. Rezultantni magnetski moment više elementarnih struja.

Uspoređujući dva dobivena izraza za moment vrtnje M vidimo da zavoj površine S protječan strujom I može nadomjestiti magnet čiji je magnetski moment $\mathbf{m} = Q_m \cdot \mathbf{d}$, pa tako kažemo da i zavoj (općenito bilo kojeg oblika), slika 11.82, protječan strujom ima magnetski moment

$$\mathbf{m} = I \cdot \mathbf{S}$$

Jedinica kojom se mjeri magnetski moment m jednaka je Am^2 , jer su u SI sustavu jedinice za jakost struje i za površinu amper i kvadratni metar.

Ako se u nekom volumenu V nalazi više elementarnih struja (elementarnih magneta) čije su magnetske osi različito usmjerene, rezultantni magnetski moment $\mathbf{m}$ cijelog volumena jednak je geometrijskoj sumi pojedinih magnetskih momenata sviju struja, tj.

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3 + \dots \quad (\text{slika 11.83}).$$

11.6.

MATERIJA U MAGNETSKOM POLJU

11.6.1. Apsolutna i relativna permeabilnost. U uvodnom tumačenju elektromagnetskih pojava istaknuto je da pri stvaranju magnetskog polja, osim ukupne jakosti uzbudne struje, na veličinu magnetskog toka bitno utječe i okolišni prostor u kojem će se zatvoriti magnetske silnice.

Za taj prostor pretpostavili smo do sada da je vakuum, a njegov utjecaj na veličinu toka uzeli smo u obzir faktorom μ_0 , koji se naziva magnetska provodljivost ili permeabilnost vakuuma, a nazivaju ga i indukcijom konstantom.

Ako prostor u kojem se zatvaraju silnice nije vakuum već neka materija, onda će se npr. u promatranom torusnom svitku, uz inače iste okolnosti, veličina stvarnog magnetskog toka Φ razlikovati od magnetskog toka Φ_0 u vakuumu. To možemo, kao što je u uvodu spomenuto, prikazati računski tako da promijenjeni tok Φ izrazimo u odnosu na tok Φ_0 faktorom μ_r jednadžbom

$$\Phi = \mu_r \cdot \Phi_0$$

To isto vrijedi i za promjenu magnetske gustoće

$$B = \mu_r \cdot B_0$$

gdje B_0 označuje gustoću za vakuum, a B gustoću uz prisustvo materije. Budući da je $B_0 = \mu_0 H$, to je $B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H$, a ako supstituiramo $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$, dobivamo

$$B = \mu \cdot H$$

Pri tome se nazivaju

μ ... apsolutna permeabilnost materije

μ_0 ... permeabilnost vakuuma

μ_r ... relativna permeabilnost materije

Relativna permeabilnost je bezdimenzionalan broj jer prikazuje odnos dviju veličina istih dimenzija: $\mu_r = \mu/\mu_0$.

Ako je sav prostor u kojem se stvara magnetsko polje jednolično ispunjen materijalom, može se na osnovi jednadžbe $B = \mu \cdot H$ gustoća B izračunati u ovisnosti od uzbude H isto kao što se računa i u vakuumu, samo treba umjesto permeabilnosti vakuuma μ_0 uzeti permeabilnost μ koja pripada dotičnom materijalu.

Prelazeći sada na razmatranje magnetskih svojstava materije, možemo najprije reći da se u pogledu magnetske provodljivosti materijali mogu podijeliti u više grupa.

μ diamagnetskih materijala neznatno je manje od permeabilnosti vakuuma μ_0 , pa im je μ_r nešto manje od 1. Tako je, na primjer, za

bizmut $\mu_r = 0,99984$

vodu $\mu_r = 0,999991$

srebro $\mu_r = 0,9999736$

vodik $\mu_r = 0,999999979$

Paramagnetski materijali su oni kojima je μ nešto veći od permeabilnosti vakuuma, pa imaju μ_r veće od 1, na primjer

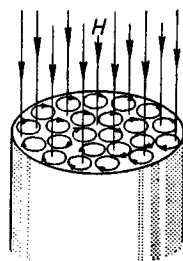
platina $\mu_r = 1,00027$	kisik $\mu_r = 1,00000181$
aluminij $\mu_r = 1,0000196$	zrak $\mu_r = 1,00000036$

Treću grupu sačinjavaju materijali kojima je μ_r znatno veće od 1, a kako je željezo glavni i najpoznatiji predstavnik ove grupe, nazivamo te materijale feromagnetskim materijalima. Osim željeza to su još kobalt, nikal, gadolinij, te različite legure željeza s drugim dodacima. Permeabilnost feromagnetskih materijala je nekoliko stotina, pa i više tisuća puta veća od permeabilnosti vakuuma ili zraka, što je razlog da se za izradu električkih aparata i strojeva gdje se želi električnom strujom proizvesti što jače magnetsko polje uzima željezo za smještaj magnetskog toka.

S obzirom na gore spomenuto, u praktičkoj se elektrotehnici materijali u pogledu magnetskih svojstava često svrstavaju samo u dvije grupe i to su feromagnetski i neferomagnetski materijali, jer male razlike između para- i diamagnetskih materijala nisu od osobite važnosti.

11.6.2. Ampèreova teorija feromagnetizma. Ako prema slici 11.21 umjesto vakuuma (ili zraka) šupljinu torusnog svitka ispunimo feromagnetskim materijalom, npr. željezom, porast će pri istoj jakosti struje što prolazi kroz svitak vrijednost toka Φ i gustoća B . Budući da je gustoća B ovisna o magnetskoj uzbudi, očito je ovo povećanje gustoće B pri istoj vanjskoj magnetskoj uzbudi $H = IN/l$ nastalo zbog nekog dodatnog povećanja uzbude uzrokovanog prisustvom same materije.

Ovu pojavu nastojao je već u prvim danima nakon Oerstedova otkrića objasniti Ampère teorijom elementarnih struja što postoje unutar materije, a koje se u magnetskom polju vanjske uzbude H kao strujni vrtlozi orijentiraju u smjeru polja H , čime se dobivaju, osim vanjskih amperzavoja, još dodatni amperzavoji unutar materije, koji povećavaju gustoću silnica B , slika 11.84.



Sl. 11.84. Vrtlozi elementarnih struja feromagnetske materije orijentiraju se u smjer vanjskog magnetskog polja.

Ispravnost Ampèreova tumačenja potvrđuje današnje shvaćanje nauke o sastavu materije, prema kojemu se u atomima materije nalaze negativni elektroni u rotaciji, čija vrtnja je ono što nazivamo elementarnom strujom.

Pri tom se, kako je spomenuto, magnetski efekt ovakve elementarne kružne struje kvantitativno određuje magnetskim momentom m , a može se dapače ta elementarna struja u mislima nadomjestiti elementarnim magnetskim čiji je magnetski moment jednak

$$m = Q_m \cdot d = I \cdot S$$

Ne ulazeći ovdje u detaljnije fizikalno objašnjavanje pojave feromagnetizma, treba samo spomenuti kako se prema dosadašnjim istraživanjima smatra da su feromagnetska svojstva materije uzrokovana samo magnetskim momentom spina, tj.

zbog rotacije elektrona oko vlastite osi, dok magnetski momenti stvoreni vrtnjom elektrona oko jezgre atoma ne dolaze u obzir. Da bi pak materija posjedovala feromagnetska svojstva moraju spinovi elektrona u njezinim molekulama zadovoljavati točno određene uvjete, koji su međutim ispunjeni samo za neke materijale, i to su onda feromagnetici. Pri tomu se pokazalo da je feromagnetičnost materije vezana na kristaliničnu strukturu materije, a da nije svojstvo pojedinog atoma materije. To znači da su u feromagnetskom materijalu cijele skupine elementarnih struja jednako usmjerene, pa su time cijela područja spontano magnetizirana. Ova područja, tzv. domeni, veoma su mala, oko 10^{-1} do 10^{-8} cm³, a kad se feromagnetski materijal prema van očituje kao nemagnetičan, njegovi su domeni svojim magnetskim osima potpuno nepravilno orijentirani na sve strane u prostoru, pa se njihovi magnetski momenti međusobno kompenziraju i ne stvaraju neki rezultantni magnetski moment.

Ako takav feromagnetski materijal stavimo u prostor gdje vlada neka vanjska magnetska uzbuda $H = IN/l$, djelovat će ta uzbuda na pojedine domene i njihove će se elementarne struje pod utjecajem magnetskih sila orijentirati u smjer vektora vanjske magnetske uzbude H , pa će se tada ukupna rezultantna uzbuda H_{rez} sastojati od H i od unutarnje uzbude H_u . S time u vezi povećat će se i jakost magnetskog polja, tj. gustoća B u feromagnetskom materijalu i ona će sada biti

$$B = B_0 + B_m$$

gdje su B_0 gustoća što bismo je dobili pri uzbudi H u vakuumu a B_m doprinos rezultantnoj gustoći od strane uzbude H_u , pri čemu je $B_0 = \mu_0 \cdot H$, pa izlazi da je

$$B = \mu_0 \cdot H + \mu_0 \cdot H_u = \mu_0 (H + H_u)$$

Dodatnu uzbudu H_u stvorenu od unutarnjih elementarnih struja nazivaju fizičari magnetiziranjem ili intenzitet magnetiziranja i ona ovisi o tome koliko će se pod utjecajem vanjske uzbude H orijentirati elementarne struje svojim magnetskim momentom u pravcu vanjskog magnetskog polja. Možemo, dakle, staviti

$$H_u = \kappa \cdot H$$

pa je

$$B = \mu_0 \cdot (H + \kappa \cdot H) = \mu_0 (1 + \kappa) \cdot H$$

Veličina κ naziva se magnetska susceptibilnost tvari, a budući da smo gustoću B uz prisustvo materije već prije prikazali jednadžbom

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$$

slijedi da je relativna permeabilnost jednaka

$$\mu_r = 1 + \kappa$$

Dodatno povećanje magnetske gustoće B_m naziva se magnetska polarizacija, što se objašnjava formalnom analogijom magnetiziranja feromagnetika u vanjskom magnetskom polju s polarizacijom izolatora u električkom polju.

Kao što se polarizacija dielektrika kvantitativno izražavala gustoćom influenciranog naboja, a to je električkim momentom po jedinici volumena, tako se može analogno i pri polarizaciji feromagnetika definirati veličina koja predodžuje gustoću hipotetskih magnetskih masa stvorenih u materijalu kao mjera za pojavu magnetske polarizacije.

Znamo da je gustoća kvocijent Q_m/S , a njena je dimenzija $A \cdot m/m^2 = A/m$, pa ako taj kvocijent proširimo sa d/d , dobivamo

$$\frac{Q_m}{S} \cdot \frac{d}{d} = \frac{m}{V} \quad A/m$$

a to je opet magnetski moment po jedinici volumena. Ovdje ta veličina, koja karakterizira polarizaciju, ima dimenziju magnetske uzbude A/m , pa je to magnetiziranje ili intenzitet magnetiziranja

$$\mathcal{J} = \frac{m}{V}$$

11.6.3. Krivulja magnetiziranja željeza. Već je rečeno da feromagnetski materijali imaju vrlo veliku permeabilnost μ , no treba još istaknuti da ta permeabilnost nije konstantna veličina, kao što je permeabilnost vakuuma, čija je vrijednost $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$. Pokazalo se, naime, da permeabilnost npr. željeza nije ovisna samo o vrsti željeza (što je posve razumljivo), već je μ za jedan te isti komad željeza promjenljiva veličina, koja ovisi o tome kako je i do kojeg stepena željezo magnetizirano. To uveliko otežava proračun magnetskih krugova sa željeznom jezgrom, o čemu se možemo lako uvjeriti na slijedećem jednostavnom primjeru. Ako bi trebalo odrediti koliki će magnetski tok Φ stvoriti zadani amperzavoji $I \cdot N$ u torusnom svitku zadanih dimenzija čija je šupljina ispunjena željezom, pa ako bi se to htjelo izračunati pomoću osnovne formule

$$\Phi = \frac{I \cdot N \cdot S}{l} \cdot \mu$$

trebalo bi još znati koliki je i faktor μ koji ulazi u desnoj strani jednadžbe. Njegova se vrijednost, međutim, unaprijed ne zna jer ovisi o tome koliki će biti magnetski tok Φ , a to je veličina koja se kao tražena želi izračunati.

Prema tome, iako je ova jednadžba potpuno ispravna ne može se njome direktno služiti pri proračunavanju feromagnetskih krugova, već se svi proračuni u tehničkoj praksi svode na to da se za pojedine vrste feromagnetskih materijala prethodno odredi eksperimentalno, putem mjerenja, funkcionalna ovisnost toka Φ o magnetomotornoj sili $I \cdot N$. Iz toga bi se za toroidnu feromagnetsku jezgru određenih dimenzija mogla odrediti vrijednost μ za razne $I \cdot N$.

Podaci pak o magnetiziranju feromagnetskih materijala, koji ne ovise o dimenzijama jezgre već karakteriziraju samo vrst materijala mogu se dobiti ako se na osnovi gore spomenutih mjerenja prikaže gustoća B kao funkcija uzbude H , jer se ove veličine odnose na pojedine točke polja.

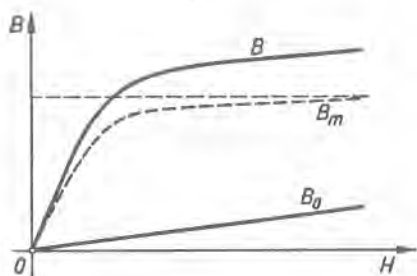
Ta funkcionalna ovisnost dobiva se lako transformacijom osnovne jednadžbe

$$\Phi = \frac{I \cdot N \cdot S}{l} \cdot \mu$$

iz koje slijedi $B = \mu \cdot H$, dakle

$$B = f(H),$$

u kojem je izrazu implicitno sadržana promjenljiva permeabilnost μ feromagnetskog materijala. Potrebno je, dakle, поближе razmotriti tu ovisnost, jer je ona osnova za sve proračune magnetskih polja u feromagnetskim materijalima.



Sl. 11.85. Krivulja prvog magnetiziranja željeza.

Kao prvo pretpostavimo da je feromagnetski materijal na početku mjerenja potpuno razmagnetiziran, što znači da je $B = 0$. Ako ga sada jednoličnim povećanjem uzbude H postepeno magnetiziramo i uz to mjerimo pri svakoj uzbudi postignutu gustoću, možemo u koordinatni sustav ucrtati krivulju koja prikazuje $B = f(H)$, slika 11.85. Ovu krivulju zovemo krivuljom prvog magnetiziranja. Ona za feromagnetske materijale ima naročito karakterističan oblik, jer vidimo da se od nemagnetičnog stanja, kad je $B = 0$, s porastom uzbude H , u početku gustoća B naglo povećava što međutim, ide samo

do nekih vrijednosti B , nakon čega se krivulja savija, pa poslije i znatno povećanje uzbude H uzrokuje tek neznatno povećanje gustoće B .

Objašnjenje za ovakvo vladanje feromagnetskog materijala pri magnetiziranju daje nam prije dobivena jednadžba

$$B = B_0 + B_m$$

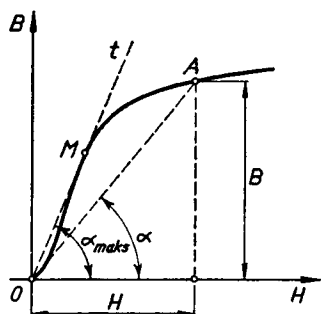
pri čemu je pribrojnik $B_0 = \mu_0 \cdot H$, u dijagramu prikazan pravcem s malim usponom, dok je doprinos od polarizacije predložen krivuljom B_m . Naglo povećanje magnetske polarizacije u prvom dijelu krivulje B_m , a time i nagao porast krivulje prvog magnetiziranja, nalazi svoje objašnjenje baš u teoriji elementarnih struja.

Dok je, naime, materijal još razmagnetiziran i dok su njegove elementarne struje svojim magnetskim osima orijentirane nepravilno na sve strane, može se u početku lako i sa slabijom uzbudom premjestiti relativno velika količina tih elementarnih struja tako da njihove osi padaju u smjer vanjske uzbude. Kad se poslije sve elementarne struje svojim magnetskim osima već poklapaju sa smjerom vanjskog polja, onda magnetska polarizacija više ne raste, već zadržava svoju konstantnu vrijednost, a gustoća B raste još samo za toliko koliko bi od povećane vanjske uzbude H rasla i u vakuumu. Zato kažemo da je iza koljena krivulje magnetiziranja feromagnetski materijal magnetski zasićen.

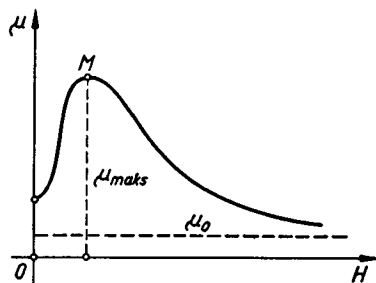
Na osnovi jednadžbe $B = \mu \cdot H$ slijedi da za svaku točku krivulje, dakle za jedno izvjesno stanje magnetiziranja, možemo odrediti permeabilnost željeza μ kao kvocijent

$$\mu = \frac{B}{H}$$

U grafičkoj predodžbi vrijednost μ odgovara tangensu kuta α što ga zatvara pravac povučen iz ishodišta do točke na krivulji s horizontalnom osi H , slika 11.86.



Sl. 11.86. Permeabilnost željeza za izvjesno stanje magnetiziranja.



Sl. 11.87. Ovisnost permeabilnosti željeza o magnetskoj uzbuđi.

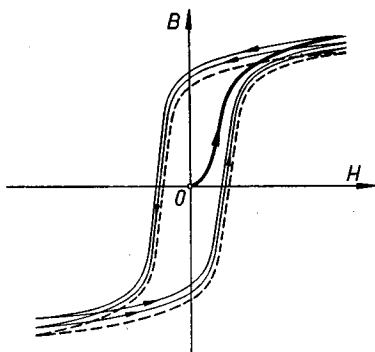
Ako tim postupkom odredimo μ za pojedine točke krivulje magnetiziranja, uvjerit ćemo se doista da je μ za feromagnetske materijale veoma promjenljiva veličina, slika 11.87. U početku μ vrlo naglo raste do neke maksimalne vrijednosti $\mu_{\max}$, a onda s daljnjim povećanjem uzbuđe biva sve manje, tako da iznad koljena u području krivulje magnetiziranja, gdje željezo postaje magnetski zasićeno njegova permeabilnost μ postepeno teži graničnoj vrijednosti μ_0 , koju ima vakuum, a krivulja magnetiziranja prelazi pomalo u pravac, koji je paralelan s pravcem magnetiziranja vakuuma.

11.6.4. Magnetska histereza. Prije opisanu krivulju prvog magnetiziranja dobivamo, kao što je istaknuto, samo ako nemagnetično željezo postepeno magnetiziramo uvijek u jednom smislu. Ako bismo nakon što je nekom maksimalnom uzbuđom $+H_{\max}$ postignuta izvjesna gustoća $+B_{\max}$ jednolično smanjivali struju i time uzbuđu H prema vrijednosti nula, ne bismo se pri ovakvom razmagnetiziranju vraćali natrag prema nuli po istoj krivulji koju smo dobili pri porastu gustoće, već bismo za to dobili novu granu krivulje. Pri tome smanjivanju uzbuđe uvijek će gustoća B biti nešto veća nego što je uz istu vrijednost H bila za vrijeme porasta uzbuđe. Kažemo da željezo pri promjeni uzbuđe nastoji zadržati prijašnje stanje magnetičnosti, što znači da se ono odupire svakoj promjeni magnetiziranja. Ovo zaostajanje magnetske gustoće B u odnosu na uzbuđu H nazivamo magnetskom histerezom slike 11.38.

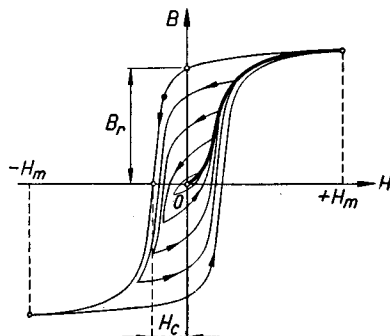
Ako smanjimo uzbuđu na vrijednost nula, još uvijek zaostaje u željezu neki magnetski tok gustoće B_r , koju zovemo remanentnom gustoćom. Stalni ili perma-

nentni magneti nisu, dakle, drugo nego komadi željeza ili feromagnetskog materijala sa zaostalim remanentnim magnetizmom.

Zaostali magnetizam možemo u željezu smanjivati strujom u suprotnom smjeru, dakle negativnom uzбудom i konačno pri nekoj uzbudu ($-H_c$) potpuno poništiti, tj. postići vrijednost $B = 0$. Ta vrijednost H_c naziva se koercitivna sila ili ispravnije koercitivnost željeza.



Sl. 11.88. Krivulje histereze pri izmjeničnom magnetiziranju željeza.



Sl. 11.89. Simetrične krivulje histereze i granična krivulja histereze.

Daljnje povećanje uzbudne struje u ovom suprotnom smjeru stvarat će magnetski tok i gustoću protivnog predznaka, pa time možemo dovesti željezo opet do magnetskog zasićenja suprotnog predznaka $-B_{\max}$ uz $-H_{\max}$, slika 11.88.

Potpuno sličnim postupkom kao i prije, tj. smanjivanjem jakosti struje do vrijednosti nula, dobivamo opet remanenciju suprotna predznaka $-B_r$. Ponovnim pojačavanjem jakosti struje uz koercitivnost $+H_c$ postaje, kao i prije, $B = 0$. Porast struje i time uzbuđe do vrijednosti $+H_{\max}$ daje neku maksimalnu gustoću $+B_{\max}$, koja je međutim nešto manja od prijašnje $+B_{\max}$. To je zato jer smo povećavajući H od nule do $+H_{\max}$ morali najprije poništiti suprotni magnetizam remanencije $-B_r$.

Ovom prvom cikličkom promjenom uzbuđe dobili smo, dakle, otvorenu petljustu krivulju magnetiziranja, a isto bismo tako dobili i pri ponovnim cikličkim promjenama niz ovakvih krivulja. Konačno će se nakon nekoliko ovakvih uzastopnih postupaka polakog izmjeničnog magnetiziranja dobiti jedna simetrična zatvorena krivulja, koju nazivamo krivuljom ili petljom histereze.

Za neku drugu vrijednost maksimalne uzbuđe $H_{\max}$ dobit ćemo i drugu simetričnu krivulju histereze, a na slici 11.89 je prikazan skup od nekoliko takvih simetričnih krivulja histereze za različite vrijednosti $H_{\max}$.

Od svih simetričnih krivulja histereze posebno je važna ona kod koje je $H_{\max}$ toliko veliko da je postignuto gotovo potpuno zasićenje. Ta krivulja zove se granična krivulja histereze i prema njoj se za pojedine vrste feromagnetskih materijala određuju remanencija B_r i koercitivnost H_c .

Spojimo li vrhove svih simetričnih krivulja histereze dobit ćemo za promatranu vrst feromagnetskog materijala karakterističnu krivulju, koja se zove osnovna ili normalna krivulja magnetiziranja, a kako je dobivena mijenjanjem uzbude od $+H_{\max}$ na $-H_{\max}$, nazivaju je i komutaciona krivulja.

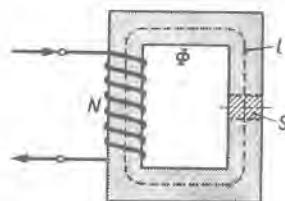
Ova normalna krivulja magnetiziranja osobito je važna zbog toga što se može, kao i granična krivulja histereze, uvijek ponovno reproducirati za promatrani feromagnetski materijal, pa zato služi kao osnovni karakteristični podatak o vrsti materijala. Ona se tek neznatno razlikuje od krivulje prvog magnetiziranja, pa se njome redovno koristimo pri proračunu magnetskih krugova, s feromagnetskim materijalom, kad se magnetiziranje vrši istosmjernom strujom. Veličine koje pri tome dobivamo nazivamo statičkim veličinama, za razliku od dinamičkih, koje se dobivaju ako se magnetiziranje vrši periodičkom izmjeničnom strujom. Prilike koje nastaju pri izmjeničnom magnetiziranju feromagnetske jezgre predmet su posebnog razmatranja.

11.6.5. Magnetski krug, serijski spoj. U elektrotehničkim aparatima i uređajima želimo električnom strujom stvoriti magnetsko polje zbog toga da bismo iskoristili neki od njegovih učinaka. Pri tome će biti kao što je spomenuto, ovi učinci ovisni o gustoći B , odnosno o toku Φ , ako u konstrukciji promatramo neki određeni presjek S plohe kroz koju će prolaziti tok $\Phi = B \cdot S$.

Najprije ćemo se osvrnuti na probleme vezane uz proračunavanje magnetskih krugova stvorenih istosmjernom strujom, pa možemo reći da se u praksi pri poznatoj konstrukciji magnetskog kruga mogu postaviti dva različita zahtjeva:

- 1) da se za zadani tok Φ izračuna potreban broj amperzavoja $\Theta = I \cdot N$, odnosno
- 2) da se za zadani broj amperzavoja $\Theta = I \cdot N$ odredi koliki će se magnetski tok Φ stvoriti u jezgri.

U praksi izrađene konstrukcije magnetskih krugova električkih strojeva, transformatora i ostalih aparata gdje se iskorišćuju učinci magnetskog polja redovno nisu toroidna oblika. Osim toga ni zavoji uzbudnog svitka nisu uvijek jednolično gusto porazdijeljeni po cijeloj duljini l zatvorene željezne jezgre, već su obično koncentrirani na nekim njenim dijelovima. Ipak se zbog veoma velike magnetske vodljivosti željeza u odnosu na zrak može često pretpostaviti da će se sav magnetski tok i u takvim jezgrama, kao i u torusnoj jezgri, zatvoriti samo kroz željezo, tako da je na svakom mjestu kroz poprečni presjek jezgre isti tok Φ .



Sl. 11.90. Magnetski krug uz zanemarivanje rasipavanja silnica.

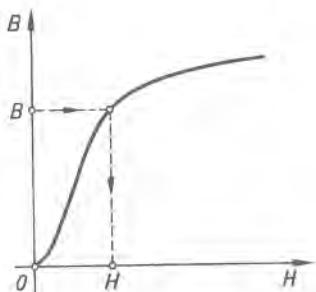
To znači da u ovom prvom razmatranju ne uzimamo u obzir da će se neke silnice magnetskog toka pod utjecajem amperzavoja zatvoriti i kroz okolišni zrak, zanemarujemo dakle taj mali iznos magnetskog toka rasipanja, slika 11.90.

Uz ove pretpostavke smijemo i na ostale oblike zatvorenog feromagnetskog kruga primijeniti jednadžbu dobivenu za torusni oblik magnetske jezgre.

Najpravičnije i prema tome računski najjednostavnije prilike imamo ako je zatvorena željezna jezgra izrađena sva od jedne vrsti materijala, dakle i bez zračnih raspora, te ako je na cijeloj duljini l istog presjeka S , jer je tada gustoća B magnetskih silnica na svakom mjestu ista, pa će i broj potrebnih amperzavoja po jednom metru

biti iste vrijednosti na cijeloj duljini l . U tom je slučaju proračun jednostavan, jer se zahtjev spomenut pod točkom 1 rješava tako da se iz zadanog toka Φ odredi gustoća prema jednadžbi $B = \Phi/S$, a iz zadane krivulje magnetiziranja nađe se onda za tu gustoću B pripadni H , slika 11.91. Potrebi broj ukupnih amperzavoja odredi se, znajući da je $H = I \cdot N/l$, iz jednadžbe

$$\Theta = I \cdot N = H \cdot l$$



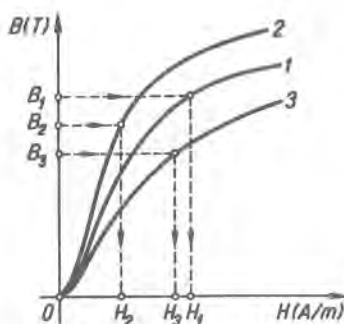
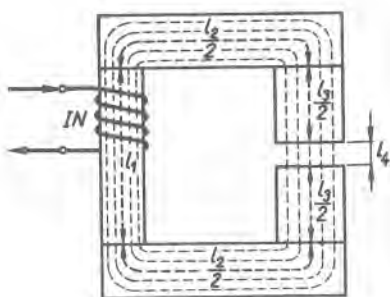
Sl. 11.91. Krivulja magnetiziranja za zadani magnetski krug slike 11.90.

$\Theta = I \cdot N$ odrediti tok Φ , izračuna se najprije magnetska uzbuda $H = I \cdot N/l$, a iz dijagrama krivulje magnetiziranja pripadna vrijednost gustoće B , pa se konačno dobije traženi tok

$$\Phi = B \cdot S$$

I zahtjev 2 može se obrnutim postupkom riješiti. Ako su, kao i prije, konstrukcija jezgre i kvalitet željeza poznati, pa ako treba na osnovi zadanih amperzavoja

Postupak je mnogo složeniji kad treba proračunati magnetski krug sastavljen od nanizanih različitih dijelova feromagnetskih materijala različitih geometrijskih dimenzija, i kad se još u krugu nalazi zračni raspor ili dio bilo kakvog neferomagnetskog materijala.



Sl. 11.92. Sastavljena željezna jezgra sa zračnim rasporom i pripadne krivulje magnetiziranja za pojedine dijelove jezgre.

Za jezgru sastavljenu kao što je, na primjer, prikazano na slici 11.92 odredit ćemo najprije, prema zahtjevu 1, koliko treba amperzavoja $I \cdot N$ za neki zadani tok Φ .

Ovaj zadatak možemo riješiti primjenom zakona protjecanja

$$I \cdot N = \oint H_l \cdot dl$$

a on se za naš zadani zatvoreni magnetski krug, koji se sastoji od 4 posebna dijela može napisati u obliku sume

$$I \cdot N = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_4 \cdot l_4$$

Taj isti izraz dobit ćemo ako za nacrtani zadani magnetski krug u analogiji s električkim strujnim krugom upotrijebimo Ohmov zakon za magnetski krug

$$\Phi = \frac{I \cdot N}{R_m}$$

pri čemu je rezultatni magnetski otpor R_m sastavljen od serijski nanizanih magnetskih otpora pojedinih dijelova jezgre, pa tu primijenimo poznatu jednadžbu

$$R_m = R_{m1} + R_{m2} + R_{m3} + R_{m4}$$

To uvršteno u osnovnu jednadžbu za tok Φ daje

$$\Phi = \frac{I \cdot N}{R_m} = \frac{I \cdot N}{R_{m1} + R_{m2} + R_{m3} + R_{m4}}$$

odakle slijedi

$$\Phi \cdot R_{m1} + \Phi \cdot R_{m2} + \Phi \cdot R_{m3} + \Phi \cdot R_{m4} = I \cdot N$$

Ako na svaki magnetski otpor primijenimo njegovu jednadžbu, dobivamo

$$\frac{\Phi}{S_1} \cdot \frac{l_1}{\mu_1} + \frac{\Phi}{S_2} \cdot \frac{l_2}{\mu_2} + \frac{\Phi}{S_3} \cdot \frac{l_3}{\mu_3} + \frac{\Phi}{S_4} \cdot \frac{l_4}{\mu_4} = I \cdot N$$

što se može dalje napisati

$$\frac{B_1}{\mu_1} \cdot l_1 + \frac{B_2}{\mu_2} \cdot l_2 + \frac{B_3}{\mu_3} \cdot l_3 + \frac{B_4}{\mu_4} \cdot l_4 = I \cdot N$$

Budući da je općenito $B/\mu = H$, gornji izraz poprima oblik koji smo dobili i primjenom zakona protjecanja

$$H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_4 \cdot l_4 = I \cdot N$$

Postupak je, dakle, ovakav: na osnovi poznate konstrukcije, sl. 11.92, i zadanog toka Φ (Wb) odredi se za svaki dio najprije gustoća B , a iz dijagrama krivulja magnetiziranja za svaki dio potrebna uzbuda H . Tako se dobiva

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} \text{ (T)} \rightarrow H_1 \text{ (A/m)}$$

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2} \text{ (T)} \rightarrow H_2 \text{ (A/m)}$$

$$B_3 = \frac{\Phi}{S_3} \text{ (T)} \rightarrow H_3 \text{ (A/m)}$$

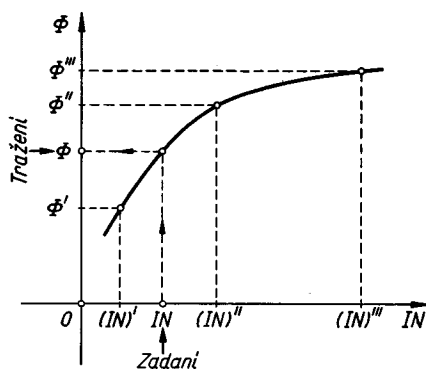
$$B_4 = \frac{\Phi}{S_4} \text{ (T) za zrak je } H_4 = \frac{B_4}{\mu_0} = \frac{B_4}{4\pi \cdot 10^{-7}} \text{ (A/m)}$$

Konačno je

$$\Theta = I \cdot N = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_4 \cdot l_4$$

Obrnut (drugi) zahtjev: da u jezgri sastavljenoj od različitih dijelova odredimo za zadane amperzavoje $\Theta = I \cdot N$ koliki će biti tok Φ , ne možemo analitički riješiti. U eksplicitnom izrazu za tok $\Phi = I \cdot N / R_m$ morali bismo, naime, poznavati R_m cijelog magnetskog kruga, a pri njegovu izračunavanju morali bismo znati permeabilnosti μ svih dijelova jezgre. To, međutim, ne možemo saznati, jer one ovise baš u toku Φ koji nam je nepoznat, a želimo ga izračunati.

Taj zadatak možemo ipak riješiti matematičkom metodom interpolacije ili ekstrapolacije. U tu svrhu zadamo sebi po volji neki tok Φ' pa za nj prema prijašnjoj metodi izračunamo koliki je potreban broj amperzavoja $(I \cdot N)'$. Najvjerojatnije je da tako dobiveni amperzavoji nisu jednaki zadanom amperzavojima $I \cdot N$ za koje tražimo Φ . Zato ćemo postupak ponoviti s još nekim drugim Φ'' i izračunati pripadne amperzavoje $(I \cdot N)''$. Tako smo dobili podatke o dva različita stanja magnetizirane jezgre, koje možemo unesti u koordinatni sustav $[\Phi, I \cdot N]$ kao dvije točke, slika 11.93. Kroz te točke povučemo približno krivulju koju nazivamo magnetskom karakteristikom zadane jezgre. Ta karakteristika prikazuje, dakle, međusobnu ovisnost toka Φ u jezgri, ovisno o amperzavojima $I \cdot N$, pa iz nje možemo i za zadane amperzavoje naći traženi tok Φ , slika 11.93.

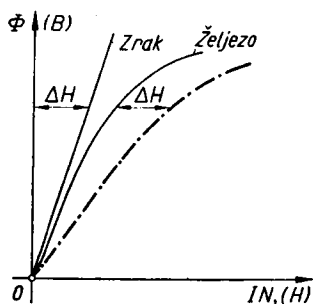


Sl. 11.93. Magnetska karakteristika zadane željezne jezgre u sl. 11.92.

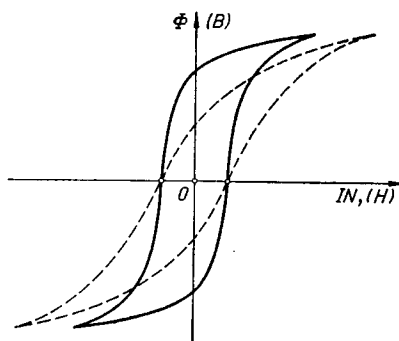
Kao svaki grafički postupak, tako i ovaj daje tek približno točan rezultat, a da bi on bio što točniji, treba magnetsku karakteristiku nacrtati ne samo sa dvije, već sa što više točaka.

Magnetska karakteristika veoma je važna u konstrukciji i proračunu električkih strojeva i aparata, jer služi i kao osnova za ostale karakteristike tih aparata.

Magnetske karakteristike krugova od serijski složenih dijelova feromagnetskih materijala po vanjskom izgledu slične su krivulji magnetiziranja feromagnetskih materijala, jer je za neku ordinatu Φ apscisa $I \cdot N$ sastavljena od pojedinih komponenta, koje se dobiju baš iz krivulja magnetiziranja tih materijala. Ako pak magnetski krug ima makar i mali zračni raspor, bit će utjecaj toga raspora zbog velikog otpora zraka na magnetskoj karakteristici cijelog kruga jako vidljiv, jer se za prolaz toka kroz zračnu pukotinu mora dodati još mnogo amperzavoja. Zbog toga će cijela magnetska karakteristika biti to više pomaknuta prema sve većim vrijednostima $I \cdot N$ što je zračni raspor veći, a u prvom svom dijelu (pri manjim Φ , gdje je utjecaj zraka veći) njezin je prolazak gotovo pravocrtan, slika 11.94.



Sl. 11.94. Utjecaj zračnog raspora na magnetsku karakteristiku željezne jezgre.



Sl. 11.95. Utjecaj zračnog raspora na krivulju histereze.

Isto tako se i na krivulji histereze feromagnetskog torusa utjecaj zračnog raspora očituje tako da se cijela zatvorena petlja histereze nagnje, slika 11.95, pri čemu se uz konstantnu koercitivnost smanjuje remanencija.

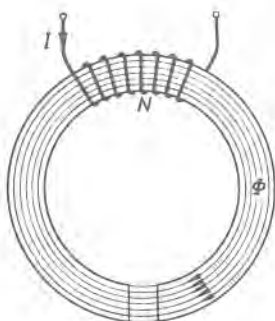
Kad je magnetski krug, posve općenito, sastavljen od više serijski nanizanih dijelova i još sa zračnim rasporom, određuje se magnetski tok Φ (odnosno gustoća B) za zadane amperzavoje, kako smo upravo upoznali, metodom interpolacije.

Ima, međutim, slučajeva kad je moguće i jednostavnijom metodom odrediti u jezgri stvoreni tok Φ za zadane ukupne amperzavoje. Ta jednostavnija metoda može se primijeniti onda, ako je magnetski krug od jedne vrste željeza sastavljen tako da tok Φ na cijelom putu kroz željezo prolazi svagdje kroz istu površinu S poprečnog presjeka jezgre i ako se u krugu nalazi još i jedan zračni raspor (ili više njih) u seriji, slika 11.96. U tom će slučaju biti, uz zanemarivanje rasipanja, gustoća B za svakom mjestu jezgre jedne te iste vrijednosti.

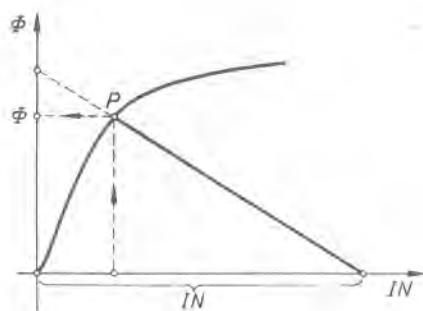
Ovakve magnetske jezgre sa zračnim rasporom mnogo se primjenjuju za razne elektrotehničke konstrukcije, jer je moguće magnetski tok u zračnom rasporu iskoristiti za različne učinke magnetskog polja. Željezna pak jezgra omogućuje

da se s relativno malo amperzavoja postignu u zračnom rasporu jaka magnetska polja, jer se zbog malog magnetskog otpora željeza gotovo svi amperzavoji utroše samo za otpor zračnog raspora.

U analogiji s električkim strujnim krugom može se ovakav magnetski krug shematski prikazati kao serijski spoj dvaju magnetskih otpora priključenih na izvor magnetomotorne sile. Jedan od tih otpora, a to je onaj zračnog raspora, konstantan je, pa se u koordinatnom sustavu (Φ , IN) može predložiti pravcem kao linearni otpor. Drugi je otpor željezne jezgre, koji se mijenja s promjenom magnetske gustoće, pa u istom koordinatnom sustavu ima nelinearnu karakteristiku koja nije drugo do u promijenjenom mjerilu krivulja magnetiziranja željeza, slika 11.97.



Sl. 11.96. Jezgra elektromagneta sa zračnim rasporom.



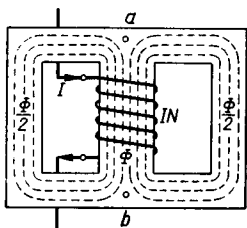
Sl. 11.97. Grafičko određivanje toka Φ za jezgru zadanu u slici 11.96.

Grafičko određivanje toka Φ provodi se ovdje slično postupku objašnjenom pri rješavanju nelinearnih električnih krugova. Ukupni amperzavoji, kao aktivna magnetomotorna sila, podijele se na oba magnetska otpora, a ti se dijelovi dobiju prema slici 11.97 tako da se karakteristika željeza crta iz ishodišta 0, a karakteristika zračnog raspora iz apscise zadanih amperzavoja $I \cdot N$. Sjecištem P određeno je koliki je magnetski tok Φ , te koliko se amperzavoja potroši za put toka Φ u željezu, a koliko za zračni raspor.

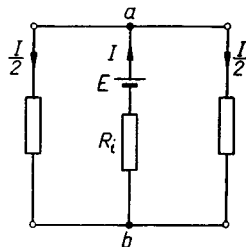
11.6.6.. Paralelni spoj magnetskih otpora. Osim feromagnetskih jezgri u kojima su magnetski otpori (dijelovi jezgre) nanizani u serijskom spoju, moguće je jezgru sastaviti i tako da se pojedini dijelovi stave paralelno jedan uz drugog. Kao primjer paralelnog spoja triju dijelova može nam poslužiti tzv. ogrnuti tip željezne jezgre transformatora, slika 11.98. Ako je uzbudni svitak sa N zavoja protječan strujom I smješten na srednji dio jezgre, razdijelit će se proizvedeni tok Φ na jednu i drugu pokrajnu granu. Ako su te grane jednako konstruirane, pa su njihovi magnetski otpori jednaki, prolazit će kroz svaku granu jednak tok, dakle $\Phi/2$.

Proračun ovakve magnetske jezgre provodi se slično proračunu električne mreže, gdje su na izvor električkog napona priključena paralelno dva otpora, dakle primjenom prvog Kirchhoffova zakona, slika 11.99.

Čvorovima a i b električne spojne sheme odgovaraju točke a i b na željeznoj jezgri između kojih vlada magnetski napon V_{ab} , koji će u svakom pokrajnom dijelu protjerati dio toka. Magnetski napon V_{ab} izračuna se slično kao i električki, tako da se od ukupno proizvedene magnetomotorne sile $\Theta = I \cdot N$ odbije



Sl. 11.98. Ogrnuti tip željezne jezgre transformatora.



Sl. 11.99. Električna nadomjesna shema za magnetski krug jezgre u slici 11.98.

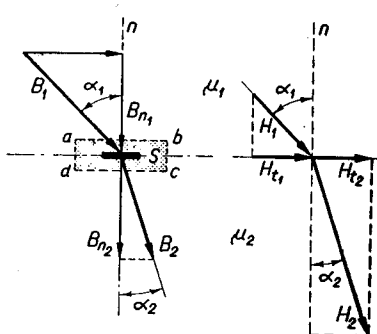
potrošak magnetskog napona za prolaz magnetskog toka kroz srednji dio, čiji je magnetski otpor R_{mi} analogan unutarnjem otporu izvora R_t u električkoj spojnoj shemi.

I kompliciranije željezne jezgre sa serijsko-paralelno složenim feromagnetskim dijelovima proračunavaju se slično kao odgovarajući spojevi nelinearnih otpora u električkim mrežama.

11.6.7. Zakon loma magnetskih silnica. U mnogim napravama gdje se za razne učinke iskorišćuje magnetsko polje prolazi magnetski tok kroz različite materijale, pa tako nužno moraju silnice prelaziti iz sredstva permeabilnosti μ_1 u sredstvo permeabilnosti μ_2 . Pri tome dolazi do loma magnetskih silnica, a zakon loma može se lako saznati na osnovi promatranja slike 11.100, gdje je prikazan prijelaz magnetskog toka kroz graničnu površinu S iz prostora 1 permeabilnosti μ_1 u prostor 2 permeabilnosti μ_2 .

Budući da su silnice (B -linije) zatvorene linije, sav tok Φ koji ulazi u plohu S mora iz iste plohe izlaziti, pa je $B_{n1} \cdot S = B_{n2} \cdot S$, odakle slijedi

$$B_{n1} = B_{n2}$$



Sl. 11.100. Prijelaz magnetskog toka kroz graničnu plohu.

Primijenimo li na crtkano označenu zatvorenu liniju koja obavi plohu S zakon protjecanja $\oint H_t \cdot dl = I_u$, dobivamo (ako zanemarimo beskonačno male dijelove bc i da)

$$H_{t1} \cdot l - H_{t2} \cdot l = 0$$

jer zatvorena linija ne obuhvaća nikakvu struju. Odavde slijedi

$$H_{t1} = H_{t2}$$

Podijelimo li ovdje dobivene jednadžbe i uvrstimo prema slici 11.100

$$B_{n1} = B_1 \cdot \cos \alpha_1; \quad B_{n2} = B_2 \cdot \cos \alpha_2, \quad \text{te} \quad H_{t1} = H_1 \sin \alpha_1; \quad H_{t2} = H_2 \sin \alpha_2$$

dobivamo odnos

$$\frac{B_{n1}}{H_{t1}} = \frac{B_{n2}}{H_{t2}} \quad \text{ili} \quad \frac{B_1 \cos \alpha_1}{H_1 \sin \alpha_1} = \frac{B_2 \cos \alpha_2}{H_2 \sin \alpha_2}$$

što daje

$$\frac{B_1}{H_1} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{B_2}{H_2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \quad \text{ili} \quad \frac{\mu_1}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\operatorname{tg} \alpha_2}$$

te konačno

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Naročito je interesantno pri prijelazu magnetskih silnica iz željezne jezgre u zračni raspor. Kao primjer uzmimo da je kut α_1 pod kojim silnice u željezu dolaze na graničnu plohu jednak 80° , te ako uzmemo da je $\mu_{\text{relFe}} = 300$, a za zrak znamo da je $\mu_{\text{rel zrak}} = 1$, onda će odnos tangensa oba kuta biti

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{300}{1}$$

pa je

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{300} = \frac{5,67}{300} = 0,0189$$

ili

$$\alpha_2 = 1^\circ$$

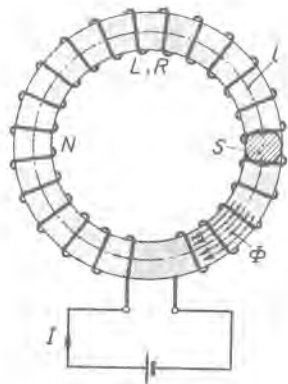
Možemo, dakle, uzeti da će magnetske silnice redovno prelaziti iz željeza u zrak gotovo okomito na prijelaznu plohu.

11.7.

ENERGIJA MAGNETSKOG POLJA

11.7.1. Priključak induktivnog svitka na istosmjerni napon. Da bismo dobili uvid u energetske odnose pri stvaranju magnetskog polja električnom strujom, izračunat ćemo količinu energije, koju daje izvor konstantnog napona U u priključeni toroidni svitak induktiviteta L . Omski otpor strujnog kruga, slika 11.101, je R . Znamo da je iz izvora predana električna energija proporcionalna naponu, jakosti struje i vremenu, pa je za konstantni tok električne struje $W = U \cdot I \cdot t$. Ovdje, gdje se u priključenom svitku struja vremenski mijenja, treba najprije odrediti u vrijeme dt predani diferencijal energije dW , a ukupna energija što je tokom vremena t predaje izvor dobiva se onda integriranjem

$$W = \int_0^t dW$$



Sl. 11.101. Toroidni svitak priključen na izvor konstantnog napona.

Pri tomu je $dW = U \cdot i \cdot dt$, a kako se napon izvora sastoji od komponenata potrošenih na otporu R i na induktivitetu L , dobivamo

$$dW = (i \cdot R - e) \cdot i \cdot dt = i^2 \cdot R \cdot dt - e \cdot i \cdot dt$$

pa je

$$W = \int_0^t i^2 \cdot R \cdot dt - \int_0^t e \cdot i \cdot dt$$

Inducirani napon e možemo prikazati na dva načina

$$e = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad \text{ili} \quad e = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

Primjenom prvog izraza dobivamo

$$W = \int_0^t i^2 \cdot R \cdot dt + \int_0^t N \cdot i \cdot \frac{d\Phi}{dt} dt$$

ili, ako inducirani napon izrazimo općenito s ulančanim tokom Ψ

$$W = \int_0^t i^2 \cdot R \cdot dt + \int_0^\Psi i d\Psi$$

Sva od izvora predana energija dijeli se na dva dijela. Jedan dio

$$\int_0^t i^2 \cdot R \cdot dt = Q_{\text{topl}}$$

je ona koja se tokom vremena t pretvorila u otporu R u toplinu. Drugi dio

$$\int_0^t N \cdot i \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot dt$$

može se supstitucijom (kod torusnog svitka)

$$N \cdot i = H \cdot l; \quad d\Phi = S \cdot dB; \quad l \cdot S = V$$

prikazati u obliku

$$\int_0^t N \cdot i \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot dt = \int_0^B H \cdot l \cdot S \cdot dB = V \cdot \int_0^B H \cdot dB$$

pri čemu je skraćivanjem eliminiran dt , pa se od varijable t prešlo na varijablu B , koja je u vremenskom intervalu od 0 do t narasla od vrijednosti nula na vrijednost B .

To znači da taj drugi integral predstavlja onaj dio energije koju je izvor predao svitku da bi se u njemu stvorilo magnetsko polje gustoće B . Ta je energija sada sakupljena u magnetskom polju volumena V , pa je zato nazivamo energijom magnetskog polja ili ukratko magnetskom energijom

$$W_m = V \cdot \int_0^B H \cdot dB$$

Supstitucijom $H = B/\mu$, odnosno $B = \mu \cdot H$, dobivamo ova tri izraza

$$W_m = V \cdot \int_0^B H \cdot dB = V \cdot \int_0^B \frac{B \cdot dB}{\mu} = V \cdot \int_0^H \mu \cdot H \cdot dH$$

Da bismo od ovih jednadžbi, dobivenih za cio volumen homogenog magnetskog polja torusnog svitka, dobili jednadžbe za proračun energije nehomogenih polja, gdje se polje u prostoru od točke do točke mijenja po intenzitetu, potrebno je naći

izraz za energiju beskonačno malog volumena dV . To možemo saznati ako prethodno odredimo koliko energije otpada na jedinicu volumena W'_m , a ona je

$$W'_m = \frac{W_m}{V} = \int_0^B H \cdot dB = \int_0^B \frac{B \cdot dB}{\mu} = \int_0^H \mu \cdot H \cdot dH$$

Sada je $dW_m = W'_m \cdot dV$, pa je općenito

$$W_m = \int_V W'_m \cdot dV = \int_V \int_0^B H \cdot dB \cdot dV$$

Ako je magnetsko polje stvoreno u vakuumu ili zraku gdje je $\mu_0 = \text{konst}$, može se taj konstantni faktor izlučiti izvan znaka integrala, pa tako za jediničnu magnetsku energiju dobivamo izraze

$$W'_m = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{\mu_0 \cdot H^2}{2} = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0}$$

Primjenom drugog oblika zakona elektromagnetske indukcije $e = -L (di/dt)$ dobivamo za energiju predanu iz izvora slijedeće jednačbe

$$dW = i^2 \cdot R \cdot dt + L \frac{di}{dt} \cdot i \cdot dt = i^2 \cdot R \cdot dt + L \cdot i \cdot di$$

pa je

$$W = \int_0^t i^2 \cdot R \cdot dt + \int_0^I L \cdot i \cdot di$$

I ovdje drugi integral na desnoj strani jednačbe predoduje magnetsku energiju, koja je sada dana jednačbom

$$W_m = \int_0^I L \cdot i \cdot di$$

odakle, uz pretpostavku da je L konstantna veličina, slijedi

$$W_m = L \cdot \frac{I^2}{2}$$

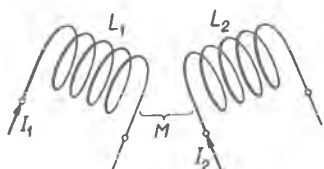
Uzme li se u obzir da je $L \cdot I = \Psi$, može se gornji izraz za magnetsku energiju sadržanu u svitku prikazati i jednažbama

$$W_m = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{\Psi \cdot I}{2} = \frac{\Psi^2}{2 \cdot L}$$

koje sjećaju na jednažbe za proračun električkog polja

$$W_{el} = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{Q \cdot U}{2} = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$$

11.7.2. Energija sustava svitaka. Pogledajmo još kolika je sakupljena energija u magnetskom polju stvorenom od dva čvrsta i nepomična svitka (strujna kruga) koji se nalaze u prostoru konstantne permeabilnosti, a međusobno su i induktivno povezani. U tom slučaju treba računati s time da će resultantni magnetski tok biti ulančan s oba svitka, slika 11.102.



Pri tom ostavimo najprije drugi svitak otvoren, a pustimo da struja i_1 u prvom svitku naraste od nule do vrijednosti I_1 . U stvorenom magnetskom polju bit će sakupljena energija

Sl. 11.102. Dva induktivna svitka protjecana strujama i međusobno induktivno povezana.

$$\int_0^{\Psi} i_1 \cdot d\Psi_1 = \frac{L_1 \cdot I_1^2}{2}$$

Ako sada postepeno povećavamo struju i_2 drugog svitka od nule na vrijednost I_2 , a da pri tome držimo struju prvog svitka stalno na konstantnoj vrijednosti I_1 , u magnetskom polju sakupljena energija povećat će se još i zbog porasta struje i_2 .

Pri tom će doprinos energije drugog svitka biti

$$\int_0^{I_2} i_2 \cdot d\Psi_2$$

Budući da je (uz pretpostavku $M > 0$) ulančani tok drugog svitka

$$\Psi_2 = L_2 \cdot i_2 + M \cdot I_1$$

to je $d\Psi_2 = L_2 \cdot di_2$, jer je struja $I_1 = \text{konst}$, pa je

$$\int_0^{I_2} i_2 \cdot d\Psi_2 = L_2 \cdot \int_0^{I_2} i_2 \cdot di_2 = \frac{L_2 \cdot I_2^2}{2}$$

Zbog međusobne indukcije uzrokovat će porast struje i_2 također i promjenu ulančanog toka Ψ_1 prvog svitka, što će još dodatno doprinijeti povećanju magnetske energije za iznos

$$\int_0^{I_2} I_1 \cdot d\Psi_1$$

Budući da je $\Psi_1 = L_1 \cdot I_1 + M \cdot i_2$, i $d\Psi_1 = M \cdot di_2$, to je

$$\int_0^{I_2} I_1 \cdot d\Psi_1 = I_1 \cdot \int_0^{I_2} M \cdot di_2 = M \cdot I_1 \cdot I_2$$

U magnetskom polju obaju svitaka sakupljena je, dakle, ukupno energija

$$W_m = \frac{L_1 \cdot I_1^2}{2} \pm \frac{L_2 \cdot I_2^2}{2} + M \cdot I_1 \cdot I_2$$

gdje predznak plus dolazi ako je tok međusobne indukcije jednako usmjeren kao tokovi samoindukcije, a u protivnom treba uzeti predznak minus.

Promijenimo li gornji izraz za magnetsku energiju u oblik

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{L_1 \cdot I_1^2}{2} \pm \frac{M \cdot I_1 \cdot I_2}{2} + \frac{L_2 \cdot I_2^2}{2} \pm \frac{M \cdot I_1 \cdot I_2}{2} = \\ &= \frac{(L_1 \cdot I_1 \pm M \cdot I_2) \cdot I_1}{2} + \frac{(L_2 \cdot I_2 \pm M \cdot I_2) \cdot I_2}{2} \end{aligned}$$

dobivamo za magnetsku energiju dvaju magnetski povezanih električkih krugova jednadžbu

$$W_m = \frac{I_1 \cdot \Psi_1}{2} + \frac{I_2 \cdot \Psi_2}{2} = \frac{1}{2} (I_1 \cdot \Psi_1 + I_2 \cdot \Psi_2)$$

pa zaključujemo da će općenito za n magnetski povezanih električkih strujnih krugova (svitaka) magnetska energija biti

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \cdot \Psi_k$$

pri čemu I_k označuje struju k -tog električkog strujnog kruga, a Ψ_k njegov ulančani tok.

11.7.3. Prikaz promjene energija u (p, t) i (B, H) dijagramu. Gornjim izvođenjima dobili smo jednadžbe za proračun konačno sakupljene energije u stvorenom magnetskom polju. Da bismo, za razliku od dosadašnjih razmatranja, vidjeli još i to kako se tokom vremena mijenja i raspoređuje energija koju izvor predaje u strujni krug induktivnog svitka, moramo sve energije promatrati u ovisnosti o promjeni struje i . U vremenskom dijagramu na sl. 11.103, gdje je apscisna os vrijeme t , prikazuje se energija kao površina ispod krivulje čije ordinate predočuju snagu p , jer je

$$\text{energija} = \text{snaga} \cdot \text{vrijeme}$$

Sva snaga izvora pri konstantnom naponu U ovisi o struji i , tako da će u koordinatnom sustavu (p, t) snaga p_i biti predočena istom eksponencijalnom krivuljom kao i promjenljiva struja i , samo je potrebno za snagu na ordinatnoj osi uzeti odgovarajuće mjerilo. Nakon duljeg vremena $t \approx 5 \cdot \tau$, nakon što je postignuta jakost struje $I = U/R$, bit će snaga izvora $P = U \cdot I$.

U tom istom koordinatnom sustavu možemo površinom prikazati i toplinsku energiju, jer je i ona jednaka umnošku Jouleove snage s vremenom

$$Q_{\text{topl}} = \int_0^t i^2 \cdot R \cdot dt$$

Budući da je R konstantno, tada je $p_{\text{topl}} = i^2 \cdot R$ proporcionalno s kvadratom jakosti struje, pa kvadrirana eksponencijalna krivulja predstavlja u određenom mjerilu Jouleovu snagu. Ta krivulja ima naročito karakterističan oblik, jer je pri vrijednostima struja $i < I$ njezin kvadrat još manji, dok će pri vrijednostima $i > I$ kvadrat struje znatno porasti, slika 11.103. Nakon vremena $t \approx 5 \cdot \tau$ poprima struja svoju konačnu vrijednost $I = U/R$, pa će Jouleova snaga postići stalnu vrijednost $I^2 \cdot R = I R \cdot I = U \cdot I$, koja je upravo jednaka snazi izvora.

Površine ispod krivulje snage izvora p_i i krivulje Jouleove snage p_{topl} predočuju energiju izvora, odnosno toplinsku energiju. Iz jednadžbe $W = Q_{\text{topl}} + W_m$ slijedi da je magnetska energija jednaka diferenciji

$$W_m = W - Q_{\text{topl}}$$

pa je na slici 11.103 prikazana ispruganom površinom.

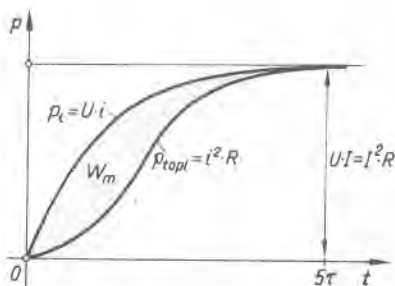
Vidimo, dakle, da se iz izvora odvajaju za magnetsko polje energija samo tokom stvaranja magnetskog polja, a kad je jednom postignuto konačno stanje, ne treba se za samo uzdržavanje toga polja trošiti energija. Sva energija koja se dalje iz izvora dovodi u strujni krug troši se samo na stvaranje Jouleove topline.

Dakako da u magnetskom polju sakupljena energija ne može nestati bez traga pa zato ako prekinemo tok struje mora se ta energija u bilo kakvom obliku vratiti natrag u strujni krug. Pojave koje su u vezi s primanjem i vraćanjem energije svitka mogu se najbolje uočiti ako magnetsku energiju prikažemo u (H, B) dijagramu.

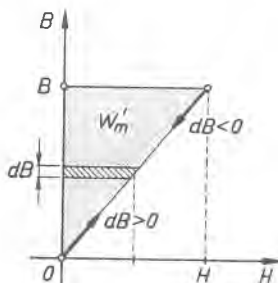
Pri tom ćemo zbog jednostavnosti promatrati samo specifičnu energiju, tj. za jedinicu volumena

$$W'_m = \int_0^B H \cdot dB$$

Ta energija, koju smo svitku priveli za stvaranje magnetskog polja i koja je u magnetskom polju sakupljena kad je postignuta gustoća B , prikazana je na osnovi gornje jednačbe u (H, B) dijagramu, slika 11.104, površinom koju zatvara krivulja magnetiziranja s koordinatnom osi B .



Sl. 11.103. Prikaz energija u (p, t) koordinatnom sustavu.



Sl. 11.104. Magnetska energija predložena u (B, H) koordinatnom sustavu.

Pretpostavimo li da je permeabilnost prostora konstantna veličina, bit će krivulja magnetiziranja $B = f(H)$ pravac povučen iz ishodišta, pa energiju prikazuje isprugana površina trokuta. Pri tome moramo imati u vidu slijedeće: kad vršimo magnetiziranje povećavanjem uzbude, pa kad time gustoća B raste od nule do konačne vrijednosti B , onda je $dB > 0$ i energija W'_m ima pozitivan predznak, što znači da je izvor dao energiju svitku.

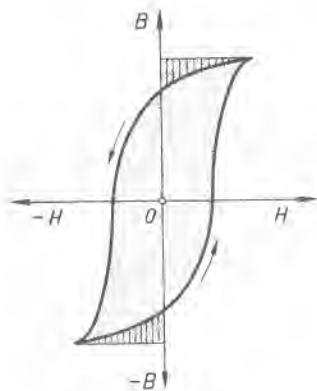
Pri razmagnetiziranju, kad se jakost struje i uzbuda H smanjuje do nule biva i gustoća B sve manja, pa je dB negativno (slika 11.104). Tada, dakle, i energija W'_m mijenja predznak, što znači da je promijenjen smjer toka energije i tada svitak nije više trošilo, već postaje izvor energije. To možemo lako shvatiti ako se sjetimo da se u tom slučaju zbog promjene toka Φ inducira u svitku napon koji će protjerati struju i time vraćati u magnetskom polju sakupljenu energiju natrag u strujni krug.

Ako se magnetiziranje i razmagnetiziranje vrši po pravcu (ako je permeabilnost konstantna), ili po jednoj te istoj krivulji (ako se smije zanemariti histereza), bit će obje količine energije, primljena i vraćena jednake, jer su obje predložene istom površinom. To znači da u tom slučaju svitak vraća svu energiju polja natrag u strujni krug.

Prilike, su međutim, drugačije ako se uzme u obzir da se magnetiziranje i razmagnetiziranje vrši uz pojavu histereze. U tom slučaju dobiva svitak za stvaranje magnetskog polja iz izvora veću količinu energije nego što je pri razmagnetiziranju vraća u strujni krug. Na slici 11.105, naime, točkicama označene površine

predočuju one količine energije koje svitak prima iz izvora, dok vertikalno isprugane površine odgovaraju količinama energije koje se iz magnetskog polja vraćaju natrag.

Diferencija primljene i vraćene energije zaostala je pri ovakvom izmjeničnom magnetiziranju i razmagnetiziranju u samoj željeznoj jezgri, pa se iskorišćuje baš zbog pojave histereze za stalno preokretanje spontano magnetiziranih domena u smjer vanjskog magnetskog polja. Budući da se pri tome premještanju čestice željeza međusobno taru pretvara se ta energija u toplinu, pa je smatramo izgubljenom za sam proces magnetiziranja.



Ova radnja zbog histereze

$$W'_h = \int_0^B H dB$$

Sl. 11.105. Gubitak energije zbog histereze pri izmjeničnom magnetiziranju željeza.

što je predočuje površina petlje u $B \cdot H$ mjerilu, odgovara jednom ciklusu izmjeničnog magnetiziranja, a odnosi se na jedinicu volumena feromagnetskog materijala. Odgovarajuća srednja vrijednost električke snage koja se troši samo zbog histereze pri izmjeničnom magnetiziranju (za 1 m^3 materijala) izračuna se po jednadžbi

$$P'_h = \frac{W'_h}{T}$$

a za sav volumen

$$P_h = \frac{V \cdot W_h}{T} = \frac{W_h}{T}$$

gdje je T vrijeme trajanja jednog ciklusa izmjeničnog magnetiziranja. Budući da su vrijeme trajanja i frekvencija izmjeničnog magnetiziranja vezani relacijom

$$f = \frac{1}{T}$$

imamo

$$P_s = f \cdot W_h$$

Da bi se što više smanjili gubici energije zbog histereze, poželjno je da površina petlje histereze bude što manja.

11.7.4. Privlačna sila magneta. Elektromagneti se mnogo upotrebljavaju u raznim električkim napravama gdje se, kao na primjer u relejima, iskorišćuje privlačna sila F kojom elektromagnet drži privučenu kotvu od mekog željeza, sli-

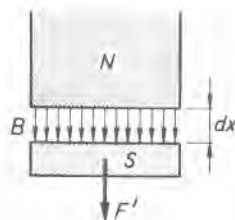
ka 11.106. Tu silu izračunat ćemo primjenjujući poznati zakon mehanike prema kojem je moguće istom silom F' , ali suprotna smjera, poništiti privlačenje i otrgnuti kotvu od elektromagneta, $F' = -F$.

Sila F' prouzrokovat će, dakle, pomak kotve od elektromagneta i pri tom će na putu dx izvršiti rad $dA = F' \cdot dx$. Ekvivalent toga rada povećat će magnetsku energiju za iznos

$$dW_m = dA$$

koji je sadržan sada u zračnom prostoru volumena

$$dV = S \cdot dx$$



Sl. 11.106. Izračunavanje privlačne sile magneta.

Budući da možemo pretpostaviti da se na tom virtuelnom infinitezimalno malom pomaku gustoća ne mijenja, možemo na magnetsku energiju volumena dV primijeniti izraz

$$dW_m = dV \cdot \frac{B^2}{2\mu_0} = S \cdot dx \cdot \frac{B^2}{2\mu_0}$$

a kako je

$$dA = dW_m$$

ili

$$F \cdot dx = S \cdot dx \cdot \frac{B^2}{2\mu_0}$$

slijedi da je sila F jednaka

$$F = S \cdot \frac{B^2}{2\mu_0} \text{ njutna}$$

U praksi se često želi silu F imati izraženu u kilopondima, dok se gustoća B umjesto u teslama zadaje u gausima, a površina S u kvadratnim centimetrima, pa je u tom slučaju sila

$$F = \left(\frac{B}{5000} \right)^2 \cdot S \text{ kp}$$

11.8.

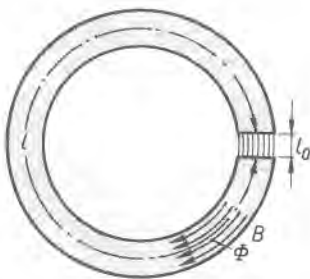
PERMANENTNI MAGNETI

U prijašnjim razmatranjima o magnetiziranju feromagnetskih materijala vidjeli smo da ti materijali mogu poslužiti za izradu permanentnih magneta. Ako, naime, električnom strujom magnetiziramo zatvoren željezni prsten do potpuna zasićenja i onda prekinemo tok struje, zaostat će u željezu, već prema obliku histereze za dotični materijal, neka gustoća B_r . Ujedno je time u magnetskom polju željeznog prstena sakupljena i izvjesna količina energije.

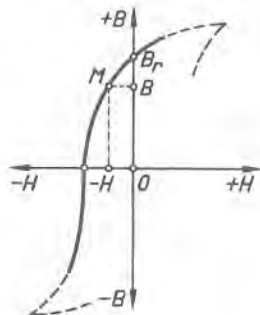
Magnetizam konstantno magnetiziranog željeznog prstena (ili općenito zatvorenog feromagnetskog kruga) može se, međutim, iskoristiti jedino ako magnetski

krug nije feromagnetskim materijalom potpuno zatvoren, već u krugu postoji zračni raspor. U taj raspor, u kojem vlada neka gustoća B_0 , može se onda staviti zavoj ili svitak pomoću kojeg se iskorišćuje bilo učinak sile, bilo elektromagnetska indukcija u postojećem magnetskom polju.

Budući da oba učinka (i sila i inducirani napon) ovise o magnetskoj gustoći prostora u kojem se nalazi svitak, potrebno je pogledati kolika je gustoća B_0 u stvorenom zračnom rasporu. Očito je da će B_0 biti drugačije vrijednosti (i to manje) nego što je remanentna gustoća B_r koju smo dobili u cijelom zatvorenom prstenu dok još nije bio izrađen zračni raspor. To možemo lako zaključiti iz slijedećih razmatranja.



Sl. 11.107. Permanentni magnet sa zračnim rasporom.



Sl. 11.108. Razmagnetizirajuća grana krivulje histereze.

Vidjeli smo da remanentnu gustoću B_r stvaraju u cijelom volumenu željezne zatvorene jezgre unutarnje elementarne struje (unutarnji amperzavoji), čiji su magnetski momenti i nakon što smo odstranili vanjske amperzavoje zadržali smjer prvotnog vanjskog magnetskog poja. Ako sada, slika 11.107, iz prvotnog cijelog željeznog prstena u kojem je postignuta gustoća B_r izvadimo jedan dio prstena srednje duljine l_0 , otpast će zbog smanjivanja volumena željeza jedan dio elementarnih struja što dovodi do izvjesnog smanjivanja ukupnog magnetskog momenta unutarnje uzbude, a osim toga se dodatnom zračnom pukotinom znatno povećava magnetski otpor i time smanjuje magnetska gustoća.

Ako je pri tome gustoća u željezu smanjena na vrijednost B , odvijalo se to smanjivanje na razmagnetizirajućoj grani krivulje histereze koja pada u drugi kvadrant koordinatnog sustava (B, H) , pa smo došli npr. od točke B_r do točke M , slika 11.108.

Vidimo, dakle, da se uvođenjem zračnog raspora u željezni prsten postiže isti učinak kao kad se suprotnom vanjskom uzbudom H razmagnetizira željezni prsten od stanja remanencije do stanja u točki M .

Da bismo i računski obuhvatili prilike u krugu permanentnog magneta sa zračnim rasporom, iskoristit ćemo jednadžbu zakona protjecanja. Taj zakon kaže da je suma svih umnožaka $H_i l_i$ jednaka ukupnoj vanjskoj uzbudnoj struji. No kako kod permanentnog magneta nema vanjske uzbudne struje, na desnoj strani ove jednadžbe dobivamo nulu. Prema oznakama na slici 11.107 imamo, dakle

$$H \cdot l + H_0 \cdot l_0 = 0$$

gdje se veličine bez indeksa odnose na željezni dio permanentnog magneta, a veličine s indeksom 0 na zračnu pukotinu.

Oдавде najprije vidimo da je

$$H = -H_0 \cdot \frac{l_0}{l}$$

pri čemu negativni predznak znači samo to, kao što je već istaknuto, da se u (B, H) koordinatnom sustavu nalazimo na krivulji histereze u drugom kvadrantu, jer je zbog dodavanja zračnog raspora došlo do razmagnetiziranja željeza.

Ipak treba imati u vidu da su obje gustoće, B u željezu i B_0 u zraku, stvorene nekom uzбудom H_u koja, dakako, ima isti smjer kao i vektor gustoće, samo je to unutarnja, u željezu zaostala uzbuda elementarnih struja.

Pogledajmo sada kako se u jednostavnijim slučajevima proračunava magnetski krug s permanentnim magnetom. Konstrukcije električnih aparata kod kojih se iskorišćuje magnetsko polje permanentnog magneta izrađuju se redovito tako da je magnetski krug sastavljen samo od jednog dijela veoma jakog permanentnog magneta, dok se ostali dio zatvorenog magnetskog kruga — osim zračnog raspora — sastoji od magnetski vrlo dobro vodljivog materijala, jarma, koji služi samo zato da dobro zatvara magnetske silnice. U tom slučaju, uz oznake prema slici 11.109, jednađžba protjecanja glasi

$$H \cdot l + H_j \cdot l_j + H_0 \cdot l_0 = 0$$

Ako zanemarimo mali pribrojnik $H_j \cdot l_j$, koji se odnosi na vrlo dobro vodljiv jaram dobivamo opet kao polaznu jednađžbu

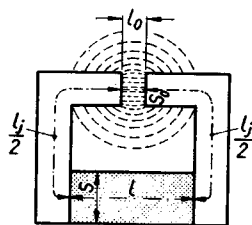
$$H \cdot l + H_0 \cdot l_0 = 0$$

Gustoća u zračnom rasporu jednaka je $B_0 = \mu_0 \cdot H_0$, a iznos uzbude H_0 dobiva se iz jednađžbe protjecanja

$$|H_0| = H \cdot \frac{l}{l_0}$$

Pri proračunu veličine B_0 potrebno je, dakle, prethodno saznati koliko je H , što znači da treba odrediti gdje se na krivulji razmagnetiziranja željeza nalazi točka M .

Da bismo od svih točaka te krivulje $B = f(H)$ pronašli baš onu točku M i onaj H koji pripadaju našem permanentnom magnetu, odredit ćemo uz pomoć jednađžbe protjecanja još jednu relaciju kojom su povezane nepoznate vrijednosti B i H za zadanu konstrukciju magnetskog kruga.



Sl. 11.109. Magnetski krug s permanentnim magnetom i zračnim rasporom.

U slijedećem postupku uzet ćemo u obzir da je zbog rasipanja magnetskih silnica tok Φ_0 u zračnom rasporu nešto manji od magnetskog toka Φ permanentnog magneta, što se može izraziti jednakšbom

$$\Phi_0 = \sigma \cdot \Phi$$

Pri tome je faktor rasipanja $0 < \sigma < 1$. Nadalje pretpostavimo da je poprečni presjek zračnog raspóra S_0 , a magnetske jezgre S , pa je

$$B_0 \cdot S_0 = \sigma \cdot B \cdot S$$

odakle su

$$B_0 = \sigma \cdot B \cdot \frac{S}{S_0} \quad \text{i} \quad H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{\sigma}{\mu_0} \cdot \frac{S}{S_0} \cdot B$$

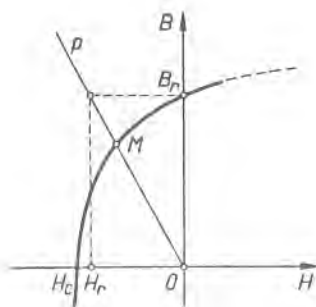
Iz jednakšbe protjecanja je

$$H = -H_0 \cdot \frac{l_0}{l} \quad \text{ili} \quad H = -\frac{\sigma}{\mu_0} \cdot \frac{S}{S_0} \cdot \frac{l_0}{l} \cdot B$$

Uvedimo supstituciju $\sigma \cdot (S \cdot l_0 / S_0 \cdot l) = f_R$, pa dobivamo

$$H = -\frac{f_R}{\mu} \cdot B \quad \text{ili} \quad B = -\frac{\mu_0}{f_R} \cdot H$$

Vidimo, dakle, da je magnetsko stanje permanentnih magneta definirano u (B, H) koordinatnom sustavu s jedne strane razmagnetizirajućom krivuljom, a s druge (na osnovi zakona protjecanja) jednakšbom



Sl. 11.110. Pravac magnetskog otpora zračnog raspóra: p .

$$B = -\frac{\mu_0}{f_R} \cdot H$$

koja je u tom sustavu predstavljena pravcem p povučenim iz ishodišta. Točka M dobiva se, dakle, kao sjecište pravca p s krivuljom razmagnetiziranja, slika 11.110, pa možemo odrediti H i konačno

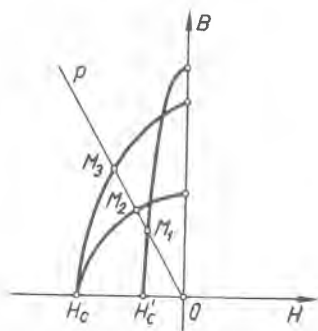
$$B_0 = \mu_0 \cdot \frac{l}{l_0} \cdot H$$

Iz gornjih jednakšba vidi se da u magnetskom krugu permanentnih magneta glavni utjecaj na smanjivanje magnetske gustoće ima omjer l_0/l , pa se zato faktor $f_R = \sigma \cdot (S/S_0) \cdot (l_0/l)$ naziva faktor razmagnetiziranja. Vrijednost tog faktora

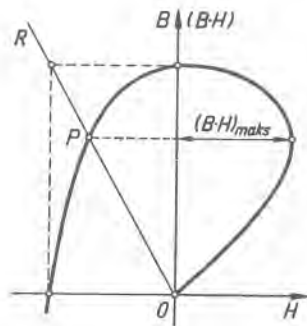
ovisi, naime, uglavnom o omjeru l_0/l , jer je u praktički izvedenim konstrukcijama utjecaj ostalih veličina relativno manji.

Pravac p najjednostavnije se konstruira tako da se ishodište spoji s točkom T , koja uz ordinatu B_r ima apscisu

$$H_r = -\frac{f_R \cdot B_r}{\mu_0}$$



Sl. 11.111. Krivulje razmagnetiziranja za tri vrste feromagnetskih materijala.



Sl. 11.112. Određivanje najpovoljnije radne točke na krivulji razmagnetiziranja feromagnetskog materijala upotrebljenog za permanentni magnet.

Za izradbu permanentnih magneta iskorišćuju se tzv. tvrdi magnetski materijali, koji imaju ne samo veliku remanenciju nego, što je bitno, i veliku koercitivnost. Time se, naime, i uz prisustvo zračnog raspora postižu povoljnije vrijednosti magnetske gustoće. To se može razabrati na slici 11.111, gdje su nacrtane krivulje razmagnetiziranja za tri različite vrste feromagnetskih materijala

- 1 materijal s velikom remanencijom, ali s malom koercitivnošću,
- 2 materijal s malom remanencijom i velikom koercitivnošću i
- 3 materijal s većom remanencijom i s velikom koercitivnošću.

Pravac magnetskog otpora zračnog raspora p siječe ove krivulje u točkama M_1 , M_2 i M_3 , slika 11.111.

Podatak o najpovoljnijem iskorišćenju magnetskog materijala za izradbu permanentnih magneta dobivamo iz slijedećih razmatranja: Jednadžbu $B_0 = \mu_0 \cdot H \cdot (l/l_0)$ pomnožimo s jednadžbom $B_0 = \sigma \cdot B \cdot (S/S_0)$, pa dobivamo

$$B_0^2 = \sigma \cdot \mu_0 \cdot B \cdot H \cdot \frac{S \cdot l}{S_0 \cdot l_0} = \sigma \cdot \mu_0 \cdot B \cdot H \cdot \frac{V}{V_0}$$

gdje su V - volumen materijala permanentnog magneta,

V_0 - volumen zračnog raspora.

Slijedi da je

$$V = \frac{V_0 \cdot B_0^2}{\sigma \cdot \mu_0 \cdot B \cdot H}$$

Za jednu zadanu gustoću B_0 i volumen V_0 zračnog rasporeda bit će volumen V , dakle potrošak materijala za permanentni magnet, najmanji ako produkt $B \cdot H$ feromagnetskog materijala postigne maksimalnu vrijednost.

Nacrtamo li za upotrijebljeni feromagnetski materijal, čiju krivulju razmagnetiziranja poznamo, na desnoj strani koordinatnog sustava umnožak

$$(B \cdot H) \quad \text{kao} \quad f(B)$$

vidimo da je najpovoljnije raditi u točki P , gdje je umnožak $(B \cdot H)$ maksimalan. Ova točka dobije se približno na presjecištu krivulje razmagnetiziranja s pravcem povučenim iz ishodišta kroz R , čije su koordinate $(B_r, -H_c)$, dakle remanentna gustoća i koercitivna uzbuda, slika 11.112.

KAZALO

- Akumulatori** 105
amper 25, 270
Amperov zakon 269
ampermetar 26
ampersekunda 28
amperzavoji 230
analiza električne mreže 118
anioni 17, 98
anoda 98
atomi 14
- Bifilarni vodič** 227
Biot-Savartov zakon 238
Bohrov model atoma 15
- Coulomb** 28
Coulombov zakon 190, 275
- Čvor električne mreže** 119
čvor u strujnom krugu 79
- Definicija jedinice amper** 270
diamagnetski materijali 278
dielektrična konstanta 154
diferencijalni otpor 45
dinamička ravnoteža napona 50, 153
dinamički otpor 45
disocijacija 101
djelovanje na daljinu 190
djelovanje na blizini 190
- Džul** 81
- Edisonov akumulator** 108
ekvipotencijalne plohe 171
električna energija 13, 18, 84, 207, 216
električna influencija 165
električna snaga 89
električna vodljivost 61
električki dipoli 176
električki izvori 51
električki moment 176
električki otpor 34, 44
električki potencijal 169, 202
električki potencijal pravca 206
električki strujni krug 22
električko polje 161
električko polje pravca 191
električko polje ravnine 193
električko polje točkastog naboja 189
električna struja 18
elektrodinamičko djelovanje dviju struja 269
elektrokemijski ekvivalent 99
elektrolitska ćelija 98
elektroliza 19, 98
elektromagnet 219, 221
elektromagnetska indukcija 225, 243
elektromagnetsko polje 219
elektromotorna sila 32
elektroni 14
elektrostatika 152
elektrostatske mreže 158
energija nabijenog kondenzatora 211, 216
- Faktor hlađenja** 83
faktor magnetskog vezanja 259
faktor razmagnetiziranja 304
farad 153
Faradayeva konstanta 100
Faradayevi zakoni elektrolize 99, 100
feromagnetizam 279
feromagnetski materijali 279
- Galvanski elementi** 103
gradijent električkog potencijala 205
grana električne mreže 119
granična krivulja histereze 284
gubici energije zbog histereze 300
gustoća električkih silnica 165
gustoća energije električkog polja 213
gustoća magnetskih silnica 222
gustoća naboja 164
gustoća pomačne struje 218
gustoća struje 28, 84
- Hallovo koeficijent** 275
Hallovo napon 273
Helmholtzovi svici 241
henri 249, 257
homogeno električko polje 161
homogeno magnetsko polje 223

Idealni naponski izvor 132
 idealni strujni izvor 132
 inducirani napon 243
 induktivitet dvožičnog voda 250
 induktivitet jednoslojnog svitka 255
 induktivitet koaksijalnog kabela 254
 induktivitet torusnog svitka 250
 ioni 17
 ionizacija 17
 istosmjerna struja 30
 izmjenična struja 30
 izolatori 18
 izotopi 16
 izvori 13

Jakost električkog polja 162
 jakost električkog polja kuglastog kondenzatora 188
 jakost električne struje 24
 jakost magnetskog polja 223
 jakost magnetskog polja svitka 242
 jakost pomaćne struje 218
 jednosmjerna struja 30
 Jouleova toplina 81
 Jouleov zakon 81

Kalorija 81
 kapacitet 153
 kapacitet cilindričnog kondenzatora 197
 kapacitet kugle 187
 kationi 17, 98
 katoda 98
 kilovatsat 85
 kilovatsatno brojilo 96
 Kirchhoffov zakon, drugi 78, 121
 Kirchhoffov zakon, prvi 62, 170
 Kirchhoffovi zakoni primijenjeni na električke mreže 119
 koeficijent iskoristivosti 90
 koeficijent međusobne indukcije 257
 koeficijent samoindukcije 249
 koercitivnost 284
 količina elektriciteta 25, 28
 kompenzacija napona 70
 kompenzator 117
 komutaciona krivulja 285
 kondenzatori 153
 kontura električne mreže 119
 kontura strujnog kruga 79
 konturne struje 126
 korisnost 90
 kratki spoj 47
 krivulja magnetiziranja 281
 krivulja prvog magnetiziranja 282, 285
 kuglasti kondenzatori 186
 kulon 28

Leclancheov element 104
 Lenzov zakon 243
 linearne električke mreže 118
 linearni otpori 43, 45, 147

Magnetomotorna sila 230
 magnetska energija 294, 295, 297
 magnetska histereza 283
 magnetska igla 221
 magnetska karakteristika željezne jezgre 288
 magnetska provodljivost 230
 magnetska uzbuda 232
 magnetski krug 284
 magnetski list 227
 magnetski moment strujne konture 276
 magnetski napon 232
 magnetski otpor 230
 magnetski tok 222
 magnetski učinak 19
 magnetsko polje 19
 magnetsko polje ravnog vodiča 235
 magnetsko polje u unutrašnjosti vodiča 235
 maksimalno zagrijavanje 83
 Maxwellov postulat 181
 medašni otpor 127
 međuinduktivitet 257
 međusobna indukcija 256
 metoda konturnih struja 125
 metoda napora čvorova 122
 metoda superpozicije 130
 Millmanov teorem 141
 mjerenje snage 95
 moment vrtnje 277
 momentana vrijednost 29

Nadomjesni izvor više izvora 134
 Nagaokin faktor 256
 naizmjenična struja 30
 napon 31, 85
 napon međusobne indukcije 245
 napon polarizacije 102
 napon pomicanja 244, 245
 napon samoindukcije 248
 napon vlastite indukcije 245
 naponski izvori 51
 nazivna jakost struje 47
 nazivna snaga trošila 91
 negativno geometrijsko orijentiranje 227
 nehomogeno magnetsko polje 223
 nelinearni otpori 45, 147
 neopterećeno stanje 46
 nesimetrični nelinearni otpori 148
 neutroni 15
 nezavisne konture 119
 nominalne vrijednosti 48
 Nortonov teorem 140

Ohmov zakon 36
 Ohmov zakon za dio strujnog kruga 76
 olovni akumulatori 105
 om 35
 omometer 111
 osnovna krivulja magnetiziranja 285
 otpor 19, 39, 147
 otpor instrumenta 109
 otpor konture 127

Pad napona 50
 pad potencijala 74
 paralelni spoj izvora 71
 paralelni spoj kondenzatora 157
 paralelni spoj otpora 59
 paramagnetski materijali 279
 permanentni magneti 219, 284
 permeabilnost 230
 permeabilnost apsolutna 278
 permeabilnost relativna 278
 permeabilnost vakuuma 231, 278
 pokus kratkog spoja 58
 pokusni naboj 162
 polarizacija izolatora 177, 180
 pomaćna struja 218
 porast potencijala 74
 potencijal 73
 potencijal i jakost električkog polja 174
 potencijalna energija 169
 potencijalni dijagram 75
 potencijal točkastog naboja 202
 potenciometar 114
 pozitivno geometrijsko orijentiranje 227
 pravac magnetskog otpora zračnog rasporeda 304
 pravilo desne ruke 247
 pravilo desnog vijka 226
 pravilo lijeve ruke 266
 pravilo prstiju desne ruke 226
 prazni hod 46
 predznak snage 91
 Priestleyev zakon 190
 prilagođivanje 93
 proizvedeni napon 32
 proširenje mjernog područja instrumenta 110
 protoni 15
 protunapon 50
 prvi Kirchhoffov zakon 63

Razdioba struja i napona pri nelinearnim mrežama 148
 razdvajanje struje 64
 razmagnetizirajuća grana krivulje histereze 307
 relativna dielektrička konstanta 179
 relativna permeabilnost 231, 280
 remanencija 283, 284
 rezultatni induktivitet 264
 rezultatni otpor 66

Samoindukcija 248
 serijski spoj izvora 67
 serijski spoj kondenzatora 155
 serijski spoj otpora 52
 serijski protuspoj izvora 69
 sile na naboje u gibanju 271
 sile u magnetskom polju 266
 silnice električkog polja 164
 silnice magnetskog polja 222
 simetrične krivulje histereze 284
 simetrični nelinearni otpori 147
 sinteza električkih mreža 118
 slike magnetskih polja 226
 smjer toka energije 86

smjer električne struje 30
 snaga 88
 snaga i energija promjenljive struje 97
 specifična vodljivost 61
 specifični otpor 37, 43
 statički otpor 45
 struja kratkog spoja 57
 strujni izvori 51
 strujni krug 22
 strujno protjecanje 234
 suha baterija 105
 supravodljivost 40
 susceptibilitet 178, 280
 svitak 228

Temperaturni koeficijent otpora 39
 teorem uzajamnosti 131
 tesla 226
 Theveninov teorem 139
 točkasti naboji 189
 tok vektora električkog pomaka 169, 199
 tok vektora jakosti električkog polja 195
 torusni svitak 229
 transfiguracija zvijezda - trokut 143
 trenutna vrijednost 29
 trošila 13

Ulančani tok 249
 unutarnji induktivitet okruglog vodiča 252
 unutarnji napon 32
 unutarnji otpor izvora 56

Valentni elektroni 16
 vanjska karakteristika izvora 56
 vanjski napon 33
 vat 85, 89
 vatmetar 95
 vatsat 85
 vatsekunda 85
 veber 225
 vektor električkog pomaka 166
 višeslojana izolacija 182
 vod 13
 vodeni strujni krug 24
 vodiči 18
 volt 31
 voltamper 85
 voltamperske karakteristike 43, 147
 Voltin element 104
 voltmetar 31
 voltsekunda 225
 vremenska konstanta: L/R 261
 vremenska konstanta: RC 209

Wheatstoneov most 112

Zagrijavanje električnih uređaja 82
 zakon loma magnetskih silnica 291
 zakon protjecanja 234
 zavoj protjecan strujom 239
 zračni raspored 286

Znak: 7606 Sv

Izdanje:

Prof. ing. VIKTOR PINTER
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE — KNJIGA PRVA

II izdanje

Stručna recenzija:

Prof. dr ing. RADENKO WOLF

Izdavač:

TEHNIČKA KNJIGA, izdavačko poduzeće
OOUR »IZDAVAČKA DJELATNOST«
ZAGREB, Jurišićeva 10

Za izdavača odgovara

Glavni urednik:

ZVONIMIR VISTRICKA

Urednik edicije:

IVAN UREMOVIĆ

Tehnički urednik:

ŽARKO PAVUNIĆ

Lektorirao:

ZVONIMIR VELJAČIĆ

Crteže izradio:

TOMISLAV STRUIĆ

Korigirao:

AUTOR

Tisak:

NISP »PROSVJETA« BJELOVAR

Tisak dovršen:

U SIJEČNJU 1976.

