

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE - SPLIT
SVEUČILIŠTE U SPLITU

Dr. Jadranka Vuletin

Z A D A C I I Z F I Z I K E

(Titraji i valovi, Toplina, Atomi)

Peto izdanje

Split, 1992.

PREDGOVOR

Zbirka ZADACI IZ FIZIKE obuhvaća zadatke iz gradiva fizike koje slušaju studenti prve godine Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu. U zbirci su dani zadaci s auditornih vježbi i pismenih ispita. Korištena literatura navedena je na kraju zbirke. Svakom poglavlju dodan je uvod s osnovnim zakonima i formulama na osnovi kojih se zadaci mogu riješiti. Na kraju zbirke dana su numerička rješenja zadataka, a kod mnogih primjera se nalazi i uputa za rad. Rješenja su odvojena od teksta zadataka da bi se istakla potreba samostalnog rješavanja a korištenje uputa samo za kontrolu ispravnosti osobnog rada. U tablicama na kraju zbirke navedene su fizikalne konstante i podaci potrebni za rješavanje danih zadataka.

Prvo izdanje ove zbirke tiskano je 1973.godine. U ovom izdanju, kao i u prethodnim izdanjima, izvršene su mnoge dopune i izmjene.

Jadranka Vuletin

U Splitu, prosinca 1988.

NAPOMENA UZ PETO IZDANJE

Ovo izdanje izlazi bez znatnih promjena. Dopuna i izmjena sadržaja izvršena je samo u nekoliko zadataka. Ispravljeni su uočeni nedostaci.

Jadranka Vuletin

U Splitu, veljače 1992.

Dr. Jadranka Vuletin: ZADACI IZ FIZIKE (Titraji i valovi,
Toplina, Atomi)

Izdavač: Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje,
Sveučilište u Splitu

Recenzent: Dr. Petar Kulišić

Objavljivanje odobreno rješenjem Komisije za izdavačku
djelatnost Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i
brodogradnje u Splitu: broj 1/88. od 15.XII 1988.

S A D R Ž A J

1. TITRAJI I VALOVI	1
1.1. Mehanički titraji i valovi	1
zadaci	7
rješenja	78
1.2. Električni titraji i elektromagnetski valovi...	26
zadaci	27
rješenja	88
2. TOPLINA	37
2.1. Toplina i temperatura	37
zadaci	39
rješenja	76
2.2. Kinetičko molekularna teorija topline	44
zadaci	46
rješenja	107
2.3. Termodinamika	48
zadaci	50
rješenja	110
3. KVANTI SVJETLOSTI	55
zadaci	58
rješenja	121
4. ELEKTRONI I IONI	62
zadaci	62
rješenja	126
5. STRUKTURA ATOMA	66
zadaci	73
rješenja	133
FIZIKALNE KONSTANTE I PODACI	143
LITERATURA	147

1. TITRAJI I VALOVI

1.1. MEHANIČKI TITRAJI I VALOVI

Harmonijsko titranje

Harmonijska sila:

$$F = - k u \quad (1.1)$$

Jednadžba harmonijskog titranja:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + k u = 0 \quad (1.2)$$

Rješenje jednadžbe (1.2.):

$$u(t) = A \cos (\omega t + \phi) \quad (1.3)$$

Energija tijela koje harmonijski titra:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} k u^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (1.4)$$

$u(t)$ - elongacija tijela u trenutku t

k - konstanta opruge

m - masa tijela

A - amplituda titranja

ω - kružna frekvencija;

$$\omega = 2 \pi v$$

v - frekvencija; $v = 1/T$

T - period titranja

$$T = 2\pi \sqrt{m/k} \quad (1.5)$$

$\omega t + \phi$ - faza titranja
 ϕ - početna faza ($t = 0$)
 E - ukupna energija tijela
 E_p - potencijalna energija
 E_k - kinetička energija
 v - brzina tijela

Prigušeno titranje

Jednadžba prigušenog titranja ako je sila trenja oblika

$$F = -m' \gamma v$$

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + k u + m \gamma v = 0 \quad (1.6)$$

Rješenje jednadžbe (1.6) ako je $\gamma/2 < \sqrt{k/m}$:

$$u(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(\omega t + \phi) \quad (1.7)$$

gdje je

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \quad (1.8)$$

m - masa tijela
 v - brzina tijela
 γ - faktor prigušenja
 ω - kružna frekvencija kod prigušenog titranja
 ω_0 - kružna frekvencija u slučaju da nema prigušenja tzv. vlastita kružna frekvencija:
 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Prisilno titranje

Jednadžba za prisilno titranje ako je vanjska sila oblika $F(t) = F(0) \cos \omega t$:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + k u + m \gamma \dot{u} = F(0) \cos \omega t = 0 \quad (1.9)$$

Rješenje jednadžbe (1.9) može se napisati u obliku:

$$u(t) = A \cos (\omega t - \phi)$$

gdje je

$$A = \frac{F(0)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \quad (1.10)$$

Ako kružna frekvencija ω poprima vrijednost:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

dolazi do pojave rezonancije.

Valno gibanje

Valna jednadžba u jednodimenzionalnom sredstvu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.11)$$

Elongacija u čestice sredstva ako izvor vala harmonijski titra:

$$u = A \sin (kx - \omega t + \phi) \quad (1.12)$$

Brzina pojedine čestice sredstva:

$$\dot{u} = \partial u / \partial t = -A \omega \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (1.13)$$

Brzina širenja transverzalnog vala na žici:

$$v = \sqrt{F L / m} \quad (1.14)$$

Brzina širenja longitudinalnog vala:

$$v = \sqrt{E / \rho} \quad (1.15)$$

Dužina vala:

$$\lambda = v T = v / \nu \quad (1.16)$$

Valni broj:

$$k = 2\pi / \lambda \quad (1.17)$$

Snaga vala u jednodimenzionalnom sredstvu:

$$P = 2\pi^2 \nu^2 A^2 (m/L) v \quad (1.18)$$

A - amplituda vala

F - sila kojom je žica zategnuta

m - masa žice

L - duljina žice

E - modul elastičnosti sredstva

ρ - gustoća sredstva

Refleksija vala

Valna funkcija upadnog, reflektiranog i transmitiranog vala:

$$u_u = A_u \sin \frac{\omega}{v_1} (x - v_1 t) \quad (1.19)$$

$$u_r = A_r \sin \frac{\omega}{v_1} (x + v_1 t) \quad (1.20)$$

$$u_t = A_t \sin \frac{\omega}{v_2} (x - v_2 t) \quad (1.21)$$

Amplitude reflektiranog i transmitiranog vala:

$$A_r = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} A_u \quad (1.22)$$

$$A_t = \frac{2 v_2}{v_1 + v_2} A_u \quad (1.23)$$

v_1, v_2 - brzine vala u pojedinim sredstvima

Jednadžba stojnog vala:

$$u = 2 A \sin kx \cos \omega t \quad (1.24)$$

Koordinate čvorova i trbuha:

a) kod refleksije na čvrstom kraju

$$x_c = n \frac{\lambda}{2} \quad (1.25)$$

$$x_t = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (1.26)$$

b) kod refleksije na slobodnom kraju

$$x_c = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (1.27)$$

$$x_t = n \frac{\lambda}{2} \quad (1.28)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Moguće valne dužine i frekvencije žice učvršćene na oba kraja:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (1.29)$$

$$v_n = \frac{n v}{2L} \quad (1.30)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Dopplerova pojava

Frekvencija vala v' koju registrira promatrač (detektor):

$$v' = \frac{v \pm v_d}{v} v \quad (1.31)$$

ako je v - frekvencija izvora vala

v - brzina širenja vala kroz sredstvo

v_d - brzina detektora u odnosu na izvor vala (predznak "+" ako se detektor približava izvoru, a "-" ako se od njega udaljava)

odnosno

$$v' = \frac{v}{v \pm v_i} v \quad (1.32)$$

ako je v_i - brzina izvora vala u odnosu na detektor (predznak "+" ako se izvor udaljava od detektora, a "-" ako mu se približava).

Ako se sredstvo (kojim se val širi) giba brzinom v_s paralelno s pravcem koji spaja detektor i izvor, relacija (1.32) poprima oblik:

$$v' = \frac{v}{v \pm v_i \pm v_s} v \quad (1.33)$$

ZADACI

1.1.1. Čestica harmonijski titra s amplitudom 0,2 m i periodom od 4 s. Nacrtati elongaciju, brzinu i akceleraciju kao funkciju vremena u slučaju da je čestica u početnom trenutku:

- a) maksimalno udaljena od ravnotežnog položaja,
- b) u ravnotežnom položaju.

1.1.2. Tijelo izvodi linearno harmonijsko gibanje oko ravnotežnog položaja. U trenutku $t=0$ ima pomak 4 cm i brzinu jednaku nuli. Period titranja je 3 s, a masa tijela 2 g.

- a) Odrediti kutnu frekvenciju, amplitudu, maksimalnu brzinu i akceleraciju u trenutku $t = 4$ s.
- b) Za koliko vremena tijelo stigne iz početnog položaja u točku koja je udaljena od njega 3 cm?
- c) Kolika je veličina sile koja djeluje na tijelo u trenutku $t = 2$ s?

1.1.3. Jednadžba gibanja tijela koje titra je:

$$u = 0,2 \cos (4,2 t + 0,4) \text{ [m]} .$$

Naći amplitudu, period, početni fazni kut, fazu u trenutku $t = 4$ s, maksimalnu brzinu tijela i konstantu opruge. Kolika je brzina tijela u trenutku kada je ono udaljeno 0,1 m od njegova ravnotežnog položaja? Izračunati položaj tijela u trenutku maksimalne akceleracije. Masa tijela je 1 kg.

1.1.4. Tijelo težine 15,2 N obješeno o oprugu istegne je za 18,3 cm.

- a) Izračunati frekvenciju titranja tijela ako se ono povuče nadole i pusti.
- b) Napisati jednadžbu gibanja i rješenje jednadžbe ako je amplituda titranja jednaka 12 cm, a početni pomak 7 cm.

Zanemariti masu opruge. Pretpostaviti da opruga titra kao jednostavni harmonijski oscilator.

1.1.5. Amplituda tijela koje harmonijski titra je 10 cm, frekvencija titranja 2 Hz, a početna faza jednaka nuli. Izračunati:

- a) maksimalnu vrijednost brzine i akceleracije tijela
- b) brzinu i akceleraciju u trenutku kada je tijelo udaljeno od ravnotežnog položaja 8 cm.

1.1.6. Tijelo mase 50 g koje je vezano za kraj opruge izvučeno je iz ravnotežnog položaja za 20 cm i pušteno. Napisati jednadžbu gibanja koje će tijelo izvoditi. Izračunati silu koja djeluje na tijelo te brzinu i akceleraciju kada je tijelo udaljeno od ravnotežnog položaja 5 cm.

Koristiti podatak da se opruga produži 10 cm kada na nju djeluje sila od 1 N. Zanemariti masu opruge. Pretpostaviti da opruga izvodi jednostavno harmonijsko titranje. Za početnu fazu uzeti vrijednost nula.

Zanemariti trenje između tijela i podloge.

1.1.7. Koliki je omjer kinetičke energije čestice koja harmonijski titra prema njenoj potencijalnoj energiji a) u trenutku $t = T/12$ s, b) kada je pomak tijela jednak polovini amplitude? Početna faza jednaka je nuli.

1.1.8. Na česticu mase 0,20 kg djeluje elastična sila konstante $k = 22$ N/m i ona titra s amplitudom od 15 cm.

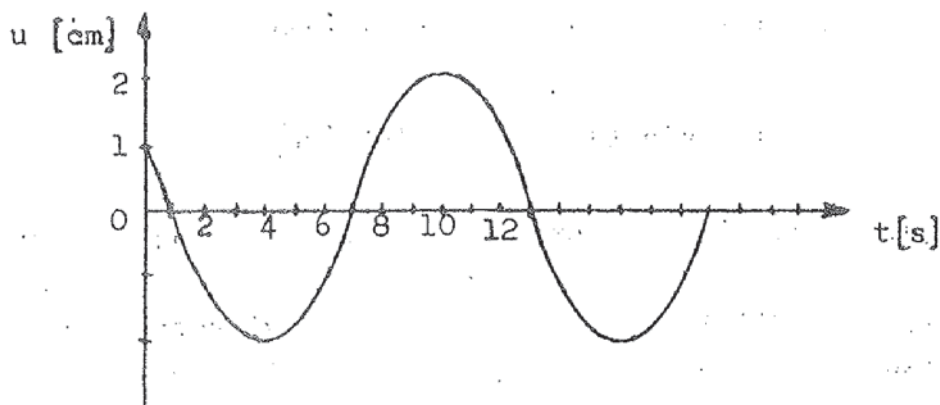
- a) Izračunati potencijalnu i kinetičku energiju čestice kada je ona udaljena od ravnotežnog položaja 5 cm te period titranja.
- b) Prikazati grafički kinetičku, potencijalnu i ukupnu energiju kao funkciju pomaka.

1.1.9. Ukupna energija tijela koje harmonijski titra iznosi $3 \cdot 10^{-3}$ J, a maksimalna sila koja na nj djeluje $1,5 \cdot 10^{-2}$ N.

Napisati jednadžbu gibanja tog tijela ako je period titranja 2 s, a početna faza 30° . Izračunati brzinu tijela u trenutku kada je elongacija tijela jednaka četvrtini amplitude.

1.1.10. Jedan kraj elastične uzvojnice, koja se nalazi na horizontalnoj podlozi, je učvršćen a na drugi kraj pričvršćeno je tijelo mase 2 kg. Tijelo je pomaknuto 5 cm iz ravnotežnog položaja i zadržano je u tom položaju vanjskom silom od 10 N. Zatim se tijelo pusti i ono počne titrati. Kolika je potencijalna energija tijela u trenutku $t = \pi/15$ s? Zanemariti trenje između tijela i podloge.

1.1.11. Rezultati mjerenja vremenske zavisnosti elongacije čestice koja harmonijski titra prikazani su na crtežu:



Napisati jednadžbu gibanja čestice. Odrediti brzinu čestice u trenutku 6 s i silu koja na nju tada djeluje. Koliko iznosi potencijalna energija čestice u tom trenutku? Masa čestice je 12g.

1.1.12. Pokazati da za male otklone matematičko i fizičko njihalo izvode harmonijsko titranje.

1.1.13. Matematičko njihalo izvrši 100 titraja u 204 s. U početnom trenutku ($t = 0$) nit njihala zatvara maksimalni kut od $\pi/40$ radijana s pravcem ravnotežnog položaja. Napisati jednadžbu njihala i izračunati kutnu brzinu i akceleraciju kuglice njihala za kut $\pi/80$ radijana. Duljina niti njihala je 1 m.

Iz danih podataka izračunati akceleraciju sile teže na mjestu titranja njihala.

1.1.14. Izračunati period titranja tankog homogenog štapa konstantnog presjeka, duljine 2 m koji se pri malom kutu odklona njiše oko horizontalne osi koja prolazi kroz jedan njegov kraj. Zanemariti trenje.

1.1.15. Čestica mora istovremeno izvoditi dva harmonijska gibanja jednake frekvencije i smjera:

$$u_1 = 3 \sin(10t + \pi/4) \text{ [cm]}$$

$$u_2 = 6 \sin(10t + \pi/3) \text{ [cm]}$$

Naći rezultantno gibanje koristeći metodu rotirajućih vektora.

1.1.16. Tijelo mase 10 g giba se u viskoznom sredstvu pod djelovanjem elastične sile. Naći funkciju koja opisuje gibanje promatranog tijela ako je u početnom trenutku pomak tijela bio jednak 4 cm, a brzina 20 cm s^{-1} .

Restitucijska konstanta iznosi $0,2 \text{ N m}^{-1}$. Uzeti da je sila trenja tijela u viskoznom sredstvu proporcionalna brzini gibanja tijela, a za konstantu proporcionalnosti vrijednost $4 \cdot 10^{-2} \text{ N s m}^{-1}$.

Prikazati grafički dobivenu funkciju $u(t)$.

1.1.17. Na tijelo mase 0,3 kg djeluje elastična sila čija je konstanta $k = 20 \text{ N/m}$. Izračunati kružnu frekvenciju ako je prigušenje zanemarivo.

Za koje će vrijednosti faktora prigušenja gibanje biti:

- a) kvaziperiodički prigušeno
- b) kritički prigušeno
- c) aperiodično?

Koliki dio početne energije ostaje kada se amplituda smanji na trećinu od svoje početne vrijednosti?

1.1.18. Na oprugu konstante 15 N/m obješeno je tijelo mase 300 g . Na tijelo djeluje sila oblika:

$$F = 2 \cos 10 t \quad [\text{N}] .$$

Izračunati amplitudu prisilnog titranja ako je faktor prigušenja $\gamma = 4 \text{ s}^{-1}$.

Nacrtati amplitudu prisilnog titranja kao funkciju ω/ω_0 . Kod koje vrijednosti ω dolazi do rezonancije?

1.1.19. Transverzalni val je dan jednadžbom:

$$u = 2 \cos (0,4x - 3t)$$

u kojoj su sve veličine izražene u jedinicama SI sustava. Naći amplitudu, period, frekvenciju, brzinu, pravac širenja vala te valnu dužinu.

Nacrtati elongaciju vala kao funkciju vremena.

1.1.20. Transverzalni sinusoidalni val amplitude 20 cm i valne dužine 100 cm giba se s lijeva nadesno duž zategnute niti brzinom od 80 cm s^{-1} . U trenutku $t = 0$ lijevi kraj niti ($x = 0$) ima pomak $u = 0$ i giba se prema dolje. Naći jednadžbu vala.

1.1.21. Val na žici je dan relacijom:

$$u = 0,1 \sin (2x - 4t)$$

gdje su sve veličine izražene u jedinicama internacionalnog sustava.

- a) Izračunati pomak u trenutku $t = 0$ za vrijednost $x = 0,1, 0,2, 0,3, \dots$ m.
- b) Koliki je pomak kod $x = 1$ m u vremenu $t = 0,1, 0,2, \dots$ s?
- c) Izračunati brzinu titranja čestice žice i brzinu širenja vala.

1.1.22. Jedan kraj žice je učvršćen, a drugi prelazi preko kotura i nosi teret od 0,4 kg. Titranje izvora na učvršćenom kraju žice dano je relacijom (u SI jedinicama):

$$u = 0,2 \sin 3t .$$

Linearna gustoća žice je $0,01 \text{ kg m}^{-1}$.

Izračunati brzinu širenja vala u žici, frekvenciju i valnu dužinu. Napisati jednadžbu pomaka za točku koja je udaljena 1 m od izvora titranja i nacrtati graf $u(t)$ za tu točku.

1.1.23. Naći metodom rotirajućih vektora rezultatni val iz slijedećih komponentnih valova:

$$u_1 = A \sin \omega t \quad u_2 = A \sin (\omega t + \pi/4) \quad u_3 = A \sin (\omega t + \pi/2)$$

1.1.24. Šipka duljine 2 m i mase 31 g produlji se za 0,1 mm kada se optereti silom od 196,2 N. Naći brzinu širenja longitudinalnog vala uzduž šipke.

1.1.25. Koliku bi minimalnu snagu trebalo dovoditi da bi se kroz žicu mogli širiti valovi amplitude $0,20\text{ cm}$ i frekvencije 30 s^{-1} , ako je linearna gustoća žice $3 \cdot 10^{-4}\text{ kg m}^{-1}$, a napetost 8 N ?

1.1.26. Žica od bakra povezana je sa žicom od željeza tako da tvore jednu dugu žicu. Žica je napeta silom od $9,81\text{ N}$. Transverzalni sinusoidalni val amplitude 2 cm i frekvencije 10 Hz giba se u žici od bakra prema spoju. Kolike su amplitude reflektiranog i transmitiranog vala? Poprečni presjek žice je 1 mm^2 . Napisati jednadžbu upadnog, reflektiranog i transmitiranog vala.

1.1.27. Dva transverzalna sinusoidalna vala amplitude $0,50\text{ cm}$ i valne dužine 8 cm putuju u suprotnim smjerovima uzduž žice. Brzina vala u žici je $1,2\text{ m s}^{-1}$. Napisati jednadžbe ovih dvaju transverzalnih valova i naći jednadžbu rezultantnog vala. Nacrtati oblik žice u vremenu $t = 0, 1, 2, \dots\text{ s}$.

1.1.28. Kolika mora biti duljina žice da bi na njoj nastao stojni val: a) ako je žica učvršćena na oba kraja
b) ako je žica učvršćena samo na jednom kraju
c) ako su joj oba kraja slobodna?

Dužinu žice izraziti u valnim dužinama.

Nacrtati za sve te slučajeve tri najjednostavnija nastala stojna vala.

1.1.29. Odrediti osnovnu i dvije gornje frekvencije željezne žice učvršćene na oba kraja i zategnute silom od 50 N . Dužina žice je 2 m , promjer $0,2\text{ mm}$ a specifična težina $76,5\text{ kN/m}^3$.

1.1.30. Jedan kraj elastičnog štapa duljine 110 cm je učvršćen. Kolika je valna dužina osnovnog i prvog gornjeg tona?

1.1.31. Frekvencija tona koji daje sirena lokomotive je 650 Hz. Kolika je frekvencija tona koji čujemo ako se lokomotiva udaljava od nas brzinom od 20 m s^{-1} ? Za brzinu zvuka u zraku uzeti 340 m s^{-1} . Pretpostaviti da promatrač i zrak miruju.

1.1.32. Dva izvora A i B ispuštaju zvukove jednakih frekvencija od 500 Hz. Izvor A miruje a B se giba nadesno od A brzinom od 61 m s^{-1} . Promatrač se nalazi između izvora A i B i giba se nadesno brzinom od $30,5 \text{ m s}^{-1}$. Kolika je razlika u frekvenciji zvuka kojega promatrač prima od izvora A i od izvora B? Uzeti za brzinu zvuka $333,5 \text{ m s}^{-1}$. Zanimariti gibanje zraka.

1.1.33. Vlak A giba se brzinom od 50 m s^{-1} u mirnom zraku, a njegova sirena odašilje zvuk frekvencije 600 s^{-1} .

a) Koliku bi frekvenciju zvuka registrirao detektor ako je postavljen ispred vlaka a koliku ako se nalazi iza njega?

b) Koliku bi frekvenciju sirene registrirali putnici u vlaku B, ako vlak B mimoilazi vlak A (u istom smjeru) brzinom od 100 m s^{-1} , prije prolaza pored vlaka A, a koliku nakon prolaza?

c) Izračunati frekvencije navedene u dijelu zadatka a) u slučaju da vjetar ima brzinu od 20 m s^{-1} u pravcu gibanja vlaka. Za brzinu zvuka uzeti 343 m s^{-1} .

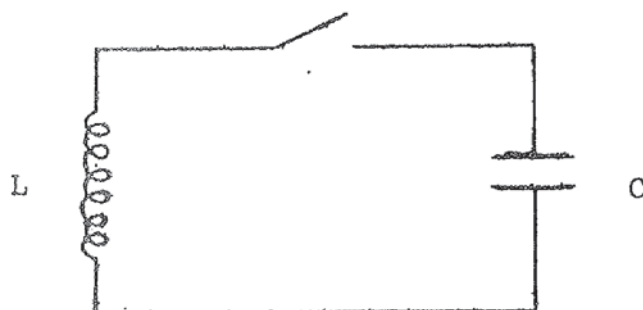
1.1.34. Izvor šalje zvučni signal duljine trajanja od 2 sekunde. Detektor registrira taj signal u trajanju od 3 sekunde. Kolikom se brzinom izvor udaljava od detektora?

1.1.35. Dva promatrača A i B odašilju zvukove frekvencije od 1000 Hz. Ako promatrač A miruje a B se udaljava od A brzinom od 10 m s^{-1} koliko će udara u sekundi registrirati promatrač A? Pretpostaviti da zrak miruje. Za brzinu zvuka uzeti 347 m s^{-1} .

1.1.36. Ultrazvučni izvor sonarnog sistema razarača radi na frekvenciji od 50kHz. Izračunati brzinu udaljavanja podmornice iz podatka da je razlika frekvencija između emitiranog zvuka iz razarača i zvuka reflektiranog od podmornice 400 Hz. Razarač miruje. Za brzinu zvuka u moru uzeti 1450 m s^{-1} .

1.2. ELEKTRIČNI TITRAJI I ELEKTROMAGNETSKI VALOVI

Nepriгуšeni električni titraji



Crt. 1.1.

Jednadžba nepriгуšenih električnih titranja:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (1.34)$$

i njeno rješenje:

$$q = Q_m \cos(\omega t + \phi) \quad (1.35)$$

Kružna frekvencija titranja:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (1.36)$$

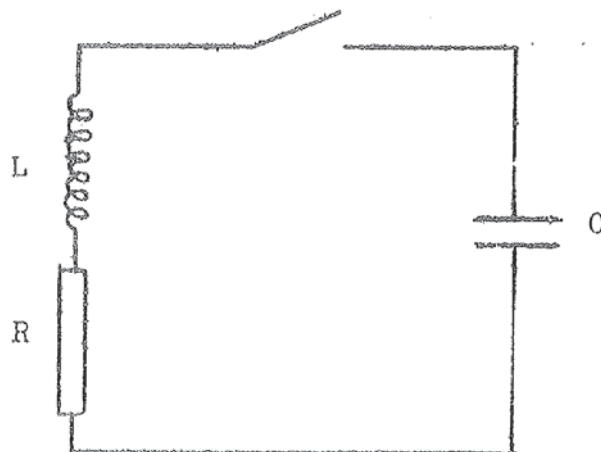
q - naboj na kondenzatoru u trenutku t

Q_m - maksimalni naboj na kondenzatoru

L - induktivitet zavojnice

C - kapacitet kondenzatora

Prigušeni električni titraji



Crt. 1.2.

Jednadžba prigušenih električnih titraja:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (1.37)$$

Rješenje jednadžbe (1.37) ako je omski otpor $R \ll 2\sqrt{L/C}$:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega} Q_m e^{-\frac{R}{2L} t} \cos(\omega t + \phi) \quad (1.38)$$

gdje su

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (1.39)$$

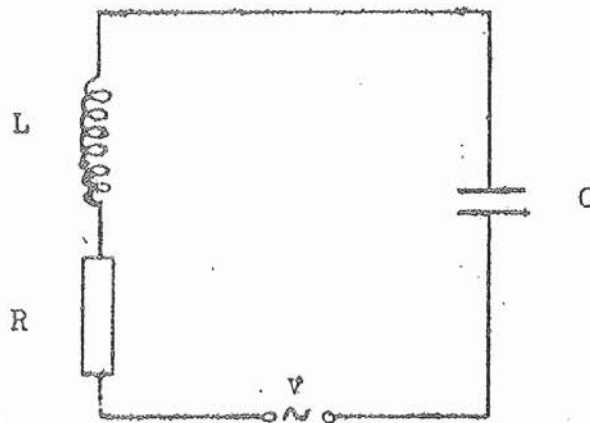
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (1.40)$$

$\frac{R}{2L}$ - koeficijent gušenja

ω - kružna frekvencija kod prigušenih titraja

ω_0 - kružna frekvencija u slučaju da nema prigušenja

Prisilni električni titraji



Crt. 1.3.

Jednadžba prisilnih električnih titraja ako je primijenjeni električni napon oblika $v = V_0 \cos \omega t$:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \cos \omega t = 0 \quad (1.41)$$

Rješenje jednadžbe (1.41) nakon prijelaznog stanja uspostavljanja struje u krugu:

$$q = Q_m \sin(\omega t + \phi) \quad (1.42)$$

gdje je maksimalni naboj na oblogu kondenzatora:

$$Q_m = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 \omega^2 + (L\omega^2 - \frac{1}{C})^2}} \quad (1.43)$$

a fazni kut ϕ :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \quad (1.44)$$

Maxwellove jednačbe u integralnom obliku

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho \, dV \quad (1.45)$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (1.46)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (1.47)$$

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad (1.48)$$

Maxwellove jednačbe u diferencijalnom obliku

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (1.49)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.50)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.51)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.52)$$

E - električno polje

H - magnetsko polje

D - električna indukcija

B - magnetska indukcija

ρ - gustoća električnog naboja

I - električna struja

j - gustoća električne struje

Valna jednađba za električno i magnetsko polje

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.53)$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Brzina širenja elektromagnetskog vala u nekom sredstvu:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (1.54)$$

Brzina širenja elektromagnetskog vala u vakuumu:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Rješenje valne jednađbe ako izvor vala harmonijski titra:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos (\vec{k}\vec{r} - \omega t) \quad (1.55)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos (\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

ϵ - apsolutna dielektrična konstanta sredstva

μ - apsolutna magnetska permeabilnost sredstva

E_0 - amplituda električnog vektora

H_0 - amplituda magnetskog vektora

$\vec{k}$ - valni vektor

ω - kružna frekvencija vala

Veza između električnog i magnetskog polja u elektromagnetskom valu:

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H \quad (1.56)$$

Energija elektromagnetskog vala

Energija elektromagnetskog vala koja prostruji u jedinici vremena kroz okomito postavljenu jediničnu površinu:

$$P = \frac{v}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) = v\epsilon E^2 = v\mu H^2 = EH \quad (1.57)$$

Poyntingov vektor:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (1.58)$$

Refleksija i lom elektromagnetskih valova

Zakon refleksije:

$$u = r \quad (1.59)$$

Zakon loma:

$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.60)$$

Indeks loma sredstva:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (1.61)$$

Za optički prozirne tvari $\mu_r = 1$, pa je:

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (1.62)$$

- u - upadni kut
- r - kut refleksije
- ℓ - kut loma
- c - brzina elektromagnetskog vala u vakuumu
- v - brzina elektromagnetskog vala u nekom sredstvu
- λ - valna dužina
- ε_r - relativna dielektrična konstanta sredstva
- μ - relativna magnetska permeabilnost sredstva

Koeficijent refleksije i transmisije elektromagnetskog vala ako val upada okomito na granicu sredstava:

$$R = I_r/I_u = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \quad (1.63)$$

$$T = I_t/I_u = \frac{4n}{(n+1)^2}$$

Koeficijent refleksije i transmisije elektromagnetskog vala ako val ne upada okomito na granicu sredstava, a

a) električno polje titra okomito na upadnu ravninu:

$$R_{\perp} = (I_r/I_u)_{\perp} = \frac{\sin^2(u-\ell)}{\sin^2(u+\ell)} \quad (1.64)$$

$$T_{\perp} = (I_t/I_u)_{\perp} = \frac{4 \sin^2 \ell \cos^2 u}{\sin^2(u+\ell)}$$

b) električno polje titra paralelno s upadnom ravninom:

$$R_{\parallel} = (I_r/I_u)_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(u-\ell)}{\operatorname{tg}^2(u+\ell)} \quad (1.65)$$

$$T_{\parallel} = (I_t/I_u)_{\parallel} = \frac{4 \sin^2 \ell \cos^2 u}{\sin^2(u+\ell) \cos^2(u-\ell)}$$

Polarizacija elektromagnetskog vala

Paralelna komponenta u reflektiranom valu se gasi ako je:

$$u + l = \frac{\pi}{2} \quad \text{odnosno} \quad \operatorname{tg} u = n \quad \dots \text{ Brewsterov zakon} \quad (1.66)$$

Intenzitet transmitiranog svjetla I iza analizatora ako analizator i polarizator zatvaraju kut α :

$$I = I_0 \cos^2 \alpha \quad \dots \text{ Malusov zakon} \quad (1.67)$$

I_0 - intenzitet svjetla koje upada na analizator

Disperzija elektromagnetskog vala

$$n = \sqrt{1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}} \quad (1.68)$$

Kada je frekvencija ω dosta različita od ω_0

$$n \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.69)$$

N - broj električnih dipola u jedinici volumena

e - naboj elektrona

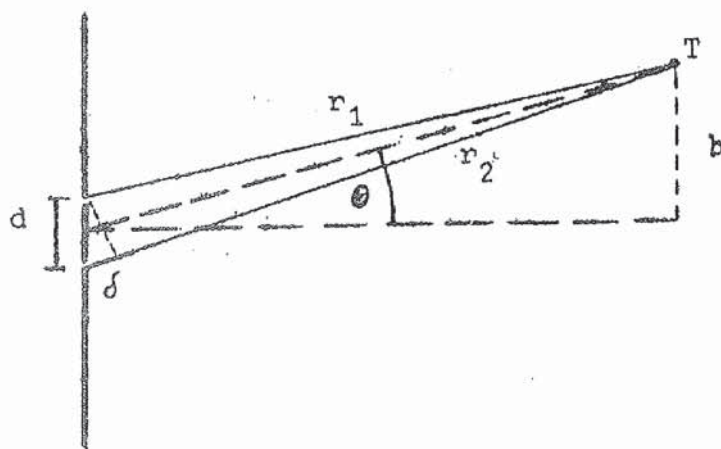
m - masa elektrona

ω_0 - vlastita kružna frekvencija oscilatora

ω - kružna frekvencija elektromagnetskog vala

γ - faktor prigušenja

Interferencija elektromagnetskih valova



Crt. 1.4.

Uvjet za konstruktivnu interferenciju u točki T:

$$\delta = m\lambda \quad (1.70)$$

Uvjet za destruktivnu interferenciju:

$$\delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (1.71)$$

δ - razlika optičkih putova;

$$\delta = n(r_2 - r_1)$$

$r_2 - r_1$ - razlika geometrijskih putova;

$$r_2 - r_1 = d \sin \theta$$

n - indeks loma sredstva

d - udaljenost dviju pukotina

$m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Relacije (1.70) i (1.71) za vakuum ($n=1$)

$$d \sin \theta = m\lambda \quad (1.70')$$

$$d \sin \theta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (1.71')$$

Razmak s između dvije svijetle (ili tamne) pruge interferencije:

$$s = \frac{D}{d} \lambda \quad \text{uz uvjet } D \gg d \quad (1.72)$$

D - udaljenost zastora od dviju pukotina

Intenzitet električnog polja E u točki T .

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 = 2 I_0 (1 + \cos \phi) \quad (1.73)$$

gdje je razlika faza ϕ :

$$\phi = k d \sin \theta$$

Intenzitet u slučaju interferencije iz N izvora:

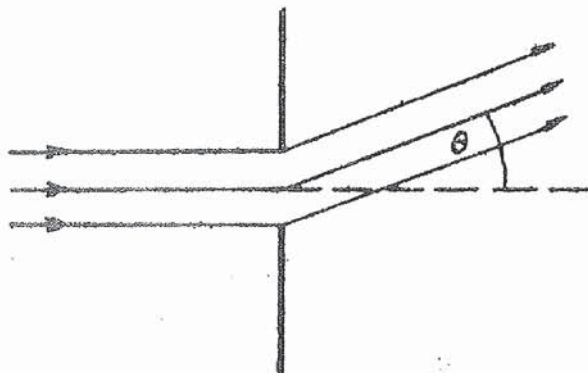
$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}$$

I_0 - intenzitet koji bi dao jedan izvor u toj točki

k - valni broj; $k = 2\pi/\lambda$

Ogib elektromagnetskih valova

Ogib na jednoj pukotini



Crt. 1.5.

Intenzitet električnog polja I:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 y}{y^2} \quad (1.76)$$

gdje je:

$$y = \pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta$$

Minimum intenziteta nastaje za smjerove θ dane relacijom:

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{a} \quad (1.77)$$

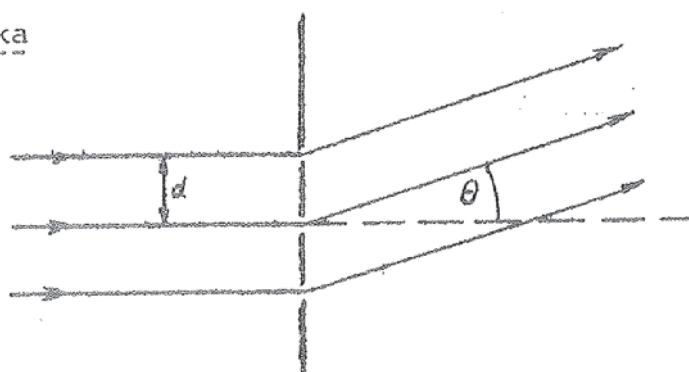
a maksimumi se nalaze približno u sredini između minimuma

a - širina pukotine

I_0 - intenzitet za $\theta = 0$

$m = 1, 2, 3, \dots$ red pruga ogiba

Ogibna rešetka



Crt. 1.6.

Intenzitet električnog polja:

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin y}{y} \right)^2 \left(\frac{\sin Nz}{\sin z} \right)^2 \quad (1.78)$$

gdje su:

$$y = \pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta$$

$$z = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

Oštri maksimumi se javljaju kada je:

$$d \sin \theta = m \lambda \quad (1.79)$$

d - razmak između dviju susjednih
pukotina (konstanta rešetke)

N - broj pukotina

a - širina pukotine

m - cijeli broj

ZADACI

1.2.1. Električni titrajni krug se sastoji iz kondenzatora kapaciteta $0,025 \mu\text{F}$ i zavojnice induktiviteta 5 mH zanemarljivog omskog otpora. Maksimalna količina naboja kondenzatora iznosi $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. Izračunati naboj i jakost struje u krugu u trenutku $t = 30 \text{ s}$ i prikazati grafički njihovu vremensku zavisnost.

1.2.2. Kondenzator kapaciteta $0,01 \mu\text{F}$ i zavojnica induktiviteta 50 mH omskog otpora $1 \text{ k}\Omega$ spojeni su u seriju (crt.1.2.) Kondenzator se u početku priključi na napon od 400 V , a zatim odvoji od izvora. Izračunati frekvenciju ω i njen odnos prema frekvenciji ω_0 kada bi omski otpor bio zanemarljiv. Koliki je koeficijent gušenja električnih titraja?

1.2.3. Naći rješenje jednadžbe (1.37) ako je omski otpor kruga $R > 2 \sqrt{L/C}$. Prikazati grafički dobiveno rješenje.

1.2.4. Izvor izmjeničnog napona oblika $v = 100 \cos 120 \pi t$ (u kojemu su sve veličine izražene u jedinicama internacionalnog sustava) povezan je u seriju s otpornikom otpora 560Ω , zavojnicom induktiviteta 3 mH zanemarljivog omskog otpora i kondenzatorom kapaciteta 11000 pF . Izračunati naboj na oblogu kondenzatora 5 minuta nakon uključenja izmjeničnog napona i amplitudu struje.

1.2.5. Pokazati da elektromagnetsko polje:

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \cos(y - ct)$$

$$B_x = \cos(y - ct), \quad B_y = B_z = 0$$

zadovoljava Maxwelllove jednadžbe:

1.2.6. U točki T magnetskog polja $\text{rot } H$ ima komponente:

$$\text{rot}_x H = 3,2 \text{ A m}^{-2}$$

$$\text{rot}_y H = 4,3 \text{ A m}^{-2}$$

$$\text{rot}_z H = 2,0 \text{ A m}^{-2}$$

Izračunati električnu indukciju D pretpostavljajući da je u trenutku $t = 0$ $D = 0$.

1.2.7. Zavojnica sa N zavoja, duljine l i omskog otpora R priključi se na razliku potencijala V u sredstvu magnetske permeabilnosti μ . Odrediti rotaciju električnog polja koje se formira u fazi zatvaranja kruga u točki osi u unutrašnjosti zavojnice u trenutku t . Duljina zavojnice je mnogo veća od njezina promjera $2r$.

1.2.8. Gustoća pomaka u homogenom i izotropnom dielektrikumu je: $j'_0 = 0,4 \text{ A m}^{-2}$ uzduž određenog pravca. Njen smjer je paralelan s tim pravcem, a iznos opada po zakonu: $j' = j'_0 \cos \omega t / (a + r^2)$ gdje je r udaljenost od spomenutog pravca, $a = 1,1$, $\omega = 50\pi \text{ s}^{-1}$. Izračunati $\oint \vec{H} d\vec{s}$ u trenutku $1/300 \text{ s}$ uzduž polumjera $0,2 \text{ m}$ čija je os K u pravcu maksimalne gustoće struje pomaka.

1.2.9. Na dvije metalne, koaksijalne, valjkaste površine (dužine mnogo veća od promjera) primijenjena je razlika potencijala $V = 10^4 \sin 20 \pi t$ [V]. Polumjer vanjskog valjka iznosi 12 cm , a unutarnjeg 3 cm . Izračunati $\text{rot } H$ u točkama zamišljene valjkaste koaksijalne površine polumjera 8 cm u trenutku $1/100 \text{ s}$. Među valjkastim površinama je vakuum.

1.2.10. U odredjenom sredstvu silnice magnetskog polja su paralelne, a veličina magnetske indukcije dana je izrazom: $B = B_0 \sin 20\pi t / e^r$ gdje je $B_0 = 1$ T vrijednost B uzduž pravca u kojem je magnetska indukcija maksimalna, a r je udaljenost od ovog pravca.

Izračunati $\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s}$ uzduž kružnice polumjera 6 cm čija os koincidira sa pravcem u kojem je B maksimalan u trenutku 1/40 s.

1.2.11. Napisati valnu jednadžbu za slučaj širenja elektromagnetskog vala u homogenom i izotropnom sredstvu bez naboja i struja relativne dielektrične konstante 3,2 i magnetske permeabilnosti 105 te izračunati omjer između brzine vala u vakuumu i u spomenutom sredstvu (indeks loma).

1.2.12. Da li izraz $E = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$ zadovoljava valnu jednadžbu:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad ?$$

1.2.13. Elektromagnetski val širi se u feromagnetskom materijalu relativne dielektrične konstante $\epsilon_r = 10$ i magnetske permeabilnosti $\mu_r = 1000$. Kolika je brzina širenja vala? Kolika je valna dužina valova frekvencije 100 MHz?

1.2.14. Magnetsko polje elektromagnetskog vala dano je (u jedinicama SI) sa:

$$H_y = 3 \cdot 10^2 \sin \pi \left(\frac{1}{3} \cdot 10^6 z - 10^{14} t \right)$$

$$H_x = 0 \quad H_z = 0$$

Odrediti frekvenciju, valnu dužinu, period i amplitudu vektora magnetskog polja. U kojem pravcu se širi elektromagnetski val i kolikom brzinom?

1.2.15. Odrediti indeks loma prozirnog sredstva kroz koje se širi ravni val dan izrazom (u jedinicama SI):

$$E_x = 10^3 \sin 2\pi \left(\frac{3}{2} \cdot 10^7 z - 6 \cdot 10^{14} t \right)$$

i valnu dužinu koju bi taj isti val imao u vakuumu.

1.2.16. Naći rezultatnu amplitudu električnog polja iz komponenata danih u jedinicama SI izrazima:

$$E_1 = 0,5 \sin 20 t \quad E_2 = \sin (20 t + \pi/3)$$

pomoću metoda rotirajućih vektora.

1.2.17. Naći val koji bi trebalo dodati valu $E_1 = 2 \sin \omega t$ da bi nastao rezultatni val $E = 3 \sin (\omega t + \frac{\pi}{2})$ koristeći metodu rotirajućih vektora.

1.2.18. U odredjenom trenutku jakost električnog polja elektromagnetskog vala je $2 \cdot 10^{-4}$ V/m. Izračunati magnetsku indukciju. Val se širi u zraku.

1.2.19. Napišite komponente indukcije elektromagnetskog vala ako su komponente pripadnog električnog polja (u SI jedinicama) dane sa:

$$E_x = 3 \cdot 10^2 \sin \pi (2 \cdot 10^7 z - 5 \cdot 10^{14} t)$$

$$E_y = 0 \quad E_z = 0$$

1.2.20. Ravni, harmonijski, linearno polarizirani elektromagnetski val valne duljine $0,5 \cdot 10^{-6}$ m širi se u pozitivnom smjeru osi x u vakuumu. Amplituda njegovog električnog polja iznosi 32 V m^{-1} . Ravnina titranja vektora električnog polja zatvara 45° sa xz ravninom. Napisati izraz za vektor električnog polja i magnetske indukcije.

1.2.21. Solarna konstanta (snaga zračenja po jedinici površine postavljene okomito na pravac širenja vala sa Sunca na Zemlju) iznosi $1,35 \text{ kW m}^{-2}$. Koliki je iznos vektora električnog polja i magnetske indukcije na površinu Zemlje?

1.2.22. Radio-stanica odašilje snagu od 80 kW. Kolika je jakost električnog polja na udaljenosti 30 km od stanice?

1.2.23. Maksimalna jakost električnog vektora sfernog elektromagnetskog vala u blizini detektora je $5 \cdot 10^{-2} \text{ V m}^{-1}$. Izračunati snagu koju prima jedinica površine detektora. Kolika je maksimalna jakost električnog polja na mjestu nastale emisije? Udaljenost izvora i detektora je 12 km. Val se širi u zraku.

1.2.24. Nabijena čestica s nabojem $-e$ prolazi na udaljenosti r od čestice naboja $+e$, koja miruje. Koliki je gubitak energije ovog sistema uslijed zračenja u jedinici vremena?

1.2.25. Na dvije metalne kuglice udaljene 80 cm primijenjena je sinusoidalna potencijalna razlika frekvencije 1 MHz. Maksimalni naboj na svakoj kuglici iznosi 10^{-8} As . Izračunati snagu koju zrači ovaj dipol.

1.2.26. Izračunati indeks loma za staklo relativne dielektrične konstante 2,5.

1.2.27. Valna dužina crvene svjetlosti u vakuumu iznosi 6500 Å . Kolika će biti u staklu indeksa loma 1,54?

1.2.28. Koliko vremena treba svjetlosti valne duljine 5890 Å da prodje kroz cijev duljine 40 m napunjenu vodom? Za indeks loma vode uzeti $4/3$.

1.2.29. Svjetlosni val, prolazeći kroz zrak, pada okomito na površinu vode. Koliko se svjetla reflektira?
Za indeks loma zraka uzeti 1, a za vodu $4/3$.

1.2.30. Izračunati koeficijent refleksije svjetlosti za graničnu površinu zrak-led ako svjetlo pada pod kutem od 40° . Indeks loma leda je 1,31. Koliki je koeficijent transmisije u ovom slučaju?

1.2.31. Kakvo titranje izvodi vektor električnog polja čije su komponente:

$$a) E_y = 2 \cos \pi t$$

$$b) E_y = 2 \cos \pi t$$

$$E_z = \cos \pi t$$

$$E_z = 2 \sin \pi t$$

i kakav je nastali val?

1.2.32. Koliki je najpogodniji upadni kut nepolarizirane svjetlosti na graničnu površinu zrak-voda da bi nastala najbolja polarizacija reflektirane zrake?
Graničnu kut loma za zrak i vodu je $48^\circ 40'$.

1.2.33. Odrediti koeficijent refleksije prirodnog svjetla koje pada na staklo pod kutem maksimalne polarizacije. Indeks loma stakla je 1,54.

1.2.34. Na kristal islandskog kalcita pada natrijeva svjetlost čija je valna dužina mjerena u vakuumu $5890 \text{ \AA}$. Izračunati dužinu vala redovne i izvanredne zrake svjetlosti u kristalu ako je indeks loma islandskog dvočlomca za redovnu zraku 1,66, a za izvanrednu zraku 1,49.

1.2.35. Koliki je kut između glavnih ravnina polarizatora i analizatora ako se intenzitet prirodnog svjetla, koje prolazi kroz polarizator i analizator, umanjuje 4 puta? Zanimariti apsorpciju i refleksiju svjetla.

1.2.36. Nepolarizirano svjetlo prolazi kroz 3 dikroična polarizatora. Drugi polarizator zatvara kut od 20° s prvim, a treći 40° s prvim. Koliki je intenzitet svjetlosti koja izlazi iz uređaja u odnosu na upadnu nepolariziranu svjetlost?

1.2.37. Između polarizatora A (koji ima propusnost u vertikalnom pravcu) i polarizatora B (koji propušta svjetlost u horizontalnom pravcu) stavljen je polarizator C čiji pravac propusnosti zatvara 30° sa vertikalom. Koliki je omjer intenziteta svjetlosti, koja izlazi iz polarizatora B, prije i poslije ubacivanja polarizatora C u odnosu na upadno svjetlo. Na polarizator A pada prirodno svjetlo.

1.2.38. Koju vrstu polarizacije ima ravni elektromagnetski val ako su projekcije vektora E na x i y osi okomite na pravac širenja vala i definirane jednačinama:

- a) $E_x = E \cos(\omega t - kz)$, $E_y = E \sin(\omega t - kz)$
- b) $E_x = E \cos(\omega t - kz)$, $E_y = E \cos(\omega t - kz + \pi)$
- c) $E_x = E \cos(\omega t - kz)$, $E_y = E \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{4})$

1.2.39. Prikazati grafički zavisnost indeksa loma o frekvenciji upadne svjetlosti.

1.2.40. Izračunati indeks loma zraka za frekvencije koje su dosta manje od $\nu_0 = 1,6 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ (karakteristična frekvencija za zrak). Gustoća zraka je $1,3 \text{ kg m}^{-3}$, a srednja molarna masa $28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$.

1.2.41. Izračunati indeks loma zraka za rendgenske zrake frekvencije $\nu = 3 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}$. Zrak apsorbira svjetlost iz ultraljubičastog područja spektra (valne dužine $1860 \text{ \AA}$). Gustoća zraka je $1,3 \text{ kg m}^{-3}$, a srednja molarna masa $28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$.

1.2.42. Odrediti brzinu širenja harmonijskog elektromagnetskog vala u homogenom sloju ionosfere ako je kružna frekvencija vala $8 \cdot 10^7 \text{ Hz}$, a koncentracija slobodnih elektrona u tom sloju 10^{12} m^{-3} .

1.2.43. Dva koherentna izvora udaljena L metara šalju valove, valne dužine $\lambda \ll L$, jedan prema drugome uzduž pravca koji ih povezuje. Naći položaje točaka maksimalnog intenziteta između tih dvaju izvora ako su izvori u fazi.

1.2.44. U Youngovu eksperimentu dvije su pukotine udaljene $0,15 \text{ mm}$, a pruge interferencije uhvaćene su na zastoru 75 cm udaljenom od pukotine. Četvrta svijetla pruga nadjena je na udaljenosti $1,1 \text{ cm}$ od centralne pruge. Izračunati iz navedenih podataka valnu dužinu upotrebljene svjetlosti.

1.2.45. Ako je uređaj iz zadatka 1.2.44. uronjen u vodu, koliki bi trebao biti razmak pukotina? Indeks loma vode je $4/3$.

1.2.46. Pukotina širine 1 mm razdijeljena je žicom promjera $0,9 \text{ mm}$. Pukotina je osvijetljena svjetlošću valne dužine $5890 \text{ \AA}$ koje pada okomito na pukotinu. Naći položaj prvog i drugog maksimuma na zastoru udaljenom 2 m od pukotina.

1.2.47. Kolika bi morala biti udaljenost dviju pukotina u Youngovu eksperimentu s mikro-valovima frekvencije $3 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ da bi se prvi interferencijski maksimum pojavio kod kuta od 45° prema neotklonjenom snopu? Nacrtati raspodjelu intenziteta.

1.2.48. Dipolne antene radio-odašiljača frekvencije 2 MHz udaljene su jedna od druge 500 m. Naći smjerove u kojima dolazi do konstruktivne interferencije.

1.2.49. Odrediti metodom rotirajućih vektora intenzitet svjetlosti kod interferencije na tri pukotine (fazorski dijagram).

1.2.50. Kolika je širina pukotine na koju okomito pada svjetlo valne dužine $4360 \text{ \AA}$ ako se prvi ogibni minimum pojavljuje kod kuta od 30° ?

1.2.51. Okomito na površinu pukotine širine 0,1 mm pada svjetlo valne dužine $5890 \text{ \AA}$. Naći položaj drugog minimuma te omjer intenziteta prvog i centralnog maksimuma.

1.2.52. Kod kojeg će se kuta pojaviti linije spektra prvog reda ako paralelan snop svjetlosti valne dužine $5460 \text{ \AA}$ pada okomito na ogibnu rešetku s 10^4 linija po centimetru?

1.2.53. Optička mrežica obasjana je pod pravim kutom svjetlošću valne dužine $6800 \text{ \AA}$. Maksimum prvog reda se vidi pod kutom od 10° . Koliko ima zareza na 1 cm rešetke?

1.2.54. Kolika je razlika u kutu otklona između plave ($4358 \text{ \AA}$) i zelene ($5461 \text{ \AA}$) živine linije u spektru prvog reda ako svjetlo pada okomito na optičku rešetku koja ima 4000 linija na cm? Isti proračun ponoviti za spektar drugog reda.

1.2.55. Laserski snop valne dužine $6328 \text{ \AA}$ pada okomito na optičku rešetku koja ima 2500 linija po cm. Izračunati omjer intenziteta prvog i drugog glavnog maksimuma. Širina pukotine je $1 \text{ }\mu\text{m}$.

1.2.56. Kolika bi trebala biti širina pukotine u Youngovu eksperimentu da bi prvi ogibni minimum bio dalji od desete svijetle pruge interferencije? Udaljenost pukotina je 2 mm.

1.2.57. Osam identičnih mikrovalnih oscilatora, koji emitiraju valove valne dužine od 10 cm, poredani su po pravcu. Razmak između susjednih oscilatora je 1 m. U kojim pravcima je intenzitet maksimalan?

1.2.58. Pri kojem najmanjem kutu se odbijaju rendgenske zrake valne dužine $0,28 \text{ \AA}$ od kristalne rešetke kalijeva klorida? Gustoća kalijeva klorida je $1,98 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ a molarna masa $74,55 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$.

1.2.59. Rendgenska zraka energije 17,45 keV pada na kristal NaCl gustoće 2165 kg m^{-3} . Kut refleksije drugog reda od ravnina kristala iznosi $14^{\circ}40'$. Atomska masa Na iznosi $23 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$ a Cl $35,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$.
Izračunati iz ovih podataka Avogadrov broj.

2. TOPLINA

2.1. TOPLINA I TEMPERATURA

Veza između Celsiusove, Fahrenheitove i Kelvinove temperaturne skale:

$$\frac{t^{\circ}\text{C}}{100} = \frac{t^{\circ}\text{F} - 32}{180} \quad (2.1)$$
$$t^{\circ}\text{C} = T^{\circ}\text{K} - 273,15$$

Termičko širenje (većine) čvrstih tijela i tekućina (linearna aproksimacija):

$$l_t = l_0 (1 + \beta t) \quad (2.2)$$

$$V_t = V_0 (1 + \alpha t)$$

l - dužina tijela (l_0 pri 0°C ,
 l_t pri $t^{\circ}\text{C}$)

V - volumen tijela (V_0 pri 0°C ,
 V_t pri $t^{\circ}\text{C}$)

β - linearni koeficijent širenja

α - volumni koeficijent širenja

Za idealne plinove vrijede zakoni:

Gay-Lussacov:

$$V_t = V_0 (1 + \alpha t) \quad \text{uz } p = \text{konst}, \quad (2.3)$$

$$p_t = p_0 (1 + \alpha t) \quad \text{uz } V = \text{konst}, \quad (2.4)$$

Boyle-Mariotteov:

$$p V = \text{konst} \quad \text{uz } t = \text{konst.} \quad (2.5)$$

Jednadžba stanja idealnog plina:

$$p V = n R T \quad (2.6.)$$

p - tlak plina

V - volumen plina

T - temperatura plina u K

n - broj molova plina

$$n = \frac{m}{M}$$

m - masa plina

M - molarna masa plina

R - univerzalna plinska konstanta

$$R \approx 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Količina topline utrošene pri zagrijavanju tijela mase m od temperature t_1 do temperature t_2 :

$$Q = m \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt = m \bar{c} (t_2 - t_1) \quad (2.7)$$

Molarna specifična toplina:

$$C = M c$$

c - specifična toplina

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dt}$$

$\bar{c}$ - srednja vrijednost specifične topline u intervalu $[t_1, t_2]$

M - molarna masa tijela

Količina topline ΔQ koja prodje kroz sloj debljine Δx , poprečnog presjeka S , u vremenu Δt , ako je medju krajevima Δx temperaturna razlika ΔT :

$$\Delta Q = k S \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta t \quad (2.9)$$

k - koeficijent termičke vodljivosti

Za količinu topline prenesene konvekcijom vrijedi aproksimacijaka formula:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = h S \Delta T$$

h - koeficijent konvekcije

S - površina tijela

ΔT - razlika temperature izmedju površine tijela i okolnog fluida

ZADACI

2.1.1. Vrelište žive je 357°C pri normalnom tlaku. Izraziti ovu temperaturu u $^{\circ}\text{F}$ i K .

2.1.2. Čelični metar (baždaren pri 20°C) pokazivao je za duljinu žice 20 m pri temperaturi od 0°C . Kolika je stvarna duljina žice?

2.1.3. Njihalica ure, načinjena od mjedi, udara sekunde pri temperaturi od 0°C . Koliku bi korekciju trebalo izvršiti nakon 30 dana ako se ura koristila pri prosječnoj temperaturi od 30°C ?

2.1.4. Kružni otvor u aluminijskoj ploči ima promjer 10 cm pri 0°C . Kolika će biti površina otvora pri temperaturi od 60°C ?

2.1.5. Željezno spremište volumena 35 l napunjeno je benzinom pri temperaturi od 273 K. Koliko će benzina isteći iz spremišta ako temperatura poraste do 300 K.

2.1.6. Izračunati promjenu gustoće olovne kugle pri zagrijavanju od 27°C do 107°C. Za gustoću olova pri 0°C uzeti $11,34 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

2.1.7. Plin zauzima volumen od 2 m^3 kod 0°C i tlaka od 10^5 Pa .

a) Izračunati tlak plina nakon izotermne ekspanzije na dvostruko veći volumen.

b) Koliko će se promijeniti volumen plina ako se izobarno zagrijava do temperature od 127°C ?

c) Izračunati promjenu tlaka plina ako se plin izovolumno hladi do - 73°C.

Pretpostaviti da je plin idealan.

2.1.8. 50 litara helija nalazi se pod tlakom od 20 Pa na temperaturi od 288 K. Kolika je masa helija?

2.1.9. Posuda sadrži 1 g kisika pri temperaturi od 47°C. Zbog istjecanja plina tlak pada na 5/8 svoje početne vrijednosti, a temperatura se smanji na 27°C. Koliko je grama kisika isteklo?

2.1.10. Koliki bi bio tlak u posudi od 2 litre ako se u njoj nalazi $2 \cdot 10^{15}$ molekula kisika a ako je temperatura u posudi 373 K?

2.1.11. Na početku takta sabijanja cilindar jednog Dieselmotora sadrži 800 cm^3 zraka na atmosferskom tlaku i na temperaturi od 20°C. Na kraju takta zrak je sabijen na 50 cm^3 volumena, a tlak se povećao na 40 atm. Izračunati temperaturu.

2.1.12. Koliki je tlak u posudi od 1 litre ako su u njoj nalazi $3 \cdot 10^{-7}$ grama argona pri temperaturi od 300 K? Atomska masa argona je $40 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$.

2.1.13. Izračunati broj atoma neona u cijevi Geiger-Müllerova brojača ako je tlak u njoj 10 cm Hg, volumen cijevi brojača 100 cm^3 , a sobna temperatura 27°C .

2.1.14. 10 g dušika nalazi se pod tlakom od $3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ i pri temperaturi od 10°C . Zagrijavanjem plin se širi pri konstantnom tlaku i poprima volumen od 10 l. Odrediti volumen dušika prije širenja, temperaturu poslije širenja te omjer gustoće plina prije i poslije širenja.

2.1.15. Koliko je topline potrebno za zagrijavanje 8 kg željeza od 20°C do temperature tališta?

2.1.16. Usporediti toplinske kapacitete jednakih masa bakra i aluminijske te toplinske kapacitete jednakih volumena bakra i aluminijske.

2.1.17. Izračunati molarnu specifičnu toplinu za magnezij

2.1.18. U Jouleovom eksperimentu pada tijelo mase 7 kg s visine od 40 m i pokreće osovinu s lopaticama koje su uronjene u 0,6 kg vode. Koliko će porasti temperatura vode? Zanimati gubitke na okolinu.

2.1.19. Električni grijač snage 300 W zagrijava tekućinu mase 800 g. Za vrijeme grijanja od 2 minute temperatura tekućine se povećala od 17°C do $40,7^\circ\text{C}$. Naći specifičnu toplinu tekućine. Zanimati gubitke topline.

2.1.20. Komad platine mase 0,1 kg je iz visoke peći uronjen u aluminijsku posudu mase 0,5 kg u kojoj se nalazi 0,6 kg vode temperature 293 K. Nakon miješanja, maksimalna temperatura vode je 298 K. Kolika je temperatura u visokoj peći?

2.1.21. U termički izoliranoj posudi nalazi se 0,2 kg smrznutog leda na temperaturi tališta. U led se unese bez gubitaka topline 0,4 kg željeza temperature 373 K. Koliko će se leda rastaliti?

2.1.22. Izračunati specifičnu toplinu nepoznate legure iz slijedećih podataka: bakreni kalorimetar mase 0,6 kg sadrži 1,2 kg vode od 15°C , a kada se legura mase 200 g temperature 100°C unese u kalorimetar, temperatura vode poraste za $1,25^{\circ}\text{C}$.

Za mjerenje temperature se koristio termometar mase 55 g, specifične topline $0,20 \text{ cal g}^{-1} (^{\circ}\text{C})^{-1}$. Da li treba uzeti u obzir njegov toplinski kapacitet?

2.1.23. Koliko topline treba dovesti masi od 200 g leda temperature od -20°C , da se pretvori u paru temperature od 100°C pri normalnom tlaku?

2.1.24. U aluminijski kalorimetar mase 0,2 kg koji sadrži 0,6 kg vode od 293 K stavljeno je 0,15 kg leda od 263 K i 20 g vodene pare od 393 K. Kolika je temperatura nastale smjese?

2.1.25. Bakreni kalorimetar mase 150 g sadrži smjesu od 200 g leda i vode. 30 g vodene pare temperature 100°C ulazi u kalorimetar i tu se kondenzira. Ravnotežna temperatura iznosi 50°C . Koliko je leda bilo u kalorimetru?

2.1.26. 200 g vode prehladjeno je do -6°C . Koliko će se vode smrznuti ako trešnjom nastupi smrzavanje?

2.1.27. Nacrtati dijagram $p=f(T)$ za CO_2 . Označiti na njemu područja u kojima tvar postoji u čvrstom, tekućem i plinskom agregatnom stanju. Istaknuti trojnu i kritičnu točku.

Kritične su konstante za CO_2 : $p_c = 74 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$, $v_c = 0,095 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$, $T_c = 304 \text{ K}$. U trojnoj točki je $T = 216 \text{ K}$, a $p = 5,1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$.

2.1.28. Jedan kraj željezne šipke održava se na temperaturi od 100°C , a drugi je uronjen u smjesu vode i leda. Duljina šipke je 10 cm, a poprečni presjek 1 cm^2 . Koliki je temperaturni gradijent duž štapa? Kolika je temperatura u točki štapa udaljenoj 2 cm od kraja uronjenog u vodu i led? Kolika se količina leda rastali za 40 minuta? Zanemariti gubitke kroz stijenke štapa.

2.1.29. Željezna pločica debljine 2 mm dodiruje bakrenu pločicu debljine 10 mm. Vanjska površina željezne pločice održava se pri konstantnoj temperaturi od 273 K, a vanjska površina bakrene pri 373 K. Izračunati temperaturu njihove dodirne površine.

2.1.30. Zidovi su nekog hladnjaka ekvivalentni ploči pluta površine 6 m^2 debljine 8 cm. Ako je prosječna unutarnja temperatura hladnjaka 4°C , a temperatura okoline 20°C , kolika je brzina strujanja topline kroz zidove hladnjaka?

2.1.31. U posudi od keramike oblika kugle treba održavati temperaturu od -10°C . Koliku bi količinu topline bilo potrebno odvoditi za vrijeme od dva sata da bi se u posudi održala ta temperatura?

Unutarnji polumjer posude je 10 cm, a vanjski 11 cm. Temperatura okoline je 20°C .

2.1.32. Kolika je struja topline kroz 1 m^2 prozorskog stakla debljine 2 mm, ako je temperatura sobe 22°C , a okoline -10°C .

Koeficijent konvekcije za vertikalnu ploču u zraku pri atmosferskom tlaku iznosi:

$$h = 1,78 (\Delta T)^{1/4} \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

2.1.33. Temperatura vanjske površine vertikalne cijevi za dovod pare je 369 K, a temperatura okolnog zraka 293 K. Koliko se topline preda okolnom zraku konvekcijom za vrijeme od 2 sata?

Vanjski polumjer cijevi je 7 cm, a visina cijevi 3,8 m.

Koeficijent konvekcije za vertikalnu cijev polumjera r u zraku pri atmosferskom tlaku dan je izrazom:

$$h = 4,187 \left(\frac{\Delta T}{2r} \right)^{1/4} \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

2.2. KINETIČKO MOLEKULARNA TEORIJA TOPLINE

Veza između tlaka i volumena idealnog plina:

$$p V = N m \overline{v^2} / 3 \quad (2.11)$$

Srednja kinetička energija translacije molekule idealnog plina pri temperaturi T K:

$$\bar{E}_k = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k T \quad (2.12)$$

Unutarnja energija idealnog plina:

$$U = \frac{i}{2} n R T \quad (2.13)$$

N - ukupni broj molekula plina

m - masa molekule plina

$\sqrt{\overline{v^2}}$ - srednja kvadratična brzina

i - broj stupnjeva slobode

n - broj molova plina

R - univerzalna plinska konstanta

k - Boltzmannova konstanta; $k = R/N_0$

$$k = 1,3806 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

N_0 - Avogadrov broj

$$N_0 = 6,0224 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Maxwellova raspodjela molekula po brzinama:

$$N_v = \frac{dN}{dv} = K v^2 e^{-mv^2/2kT} \quad (2.14)$$

$$K = 4 N \pi^{-1/2} (m/2kT)^{3/2}$$

Maxwell-Boltzmannova raspodjela molekula po energijama:

$$N_E = \frac{dN}{dE} = C E^{1/2} e^{-E/KT} \quad (2.15)$$

$$C = 2 N \pi^{-1/2} (kT)^{-3/2}$$

$N_V dv$ - broj molekula plina koje imaju brzine u intervalu između v i $v+dv$

$N_E dE$ - broj molekula plina čije energije leže između E i $E+dE$

Srednji slobodni put molekule plina:

$$\bar{s} = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma} \quad (2.16)$$

σ - mikroskopski udarni presjek sudara molekula plina

$$\sigma = (2r)^2 \pi$$

r - polumjer molekule plina

n - broj molekula u jediničnom volumenu plina

Van der Waalsova jednačba stanja plina:

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - n b) = n R T \quad (2.17)$$

n - broj molova plina; $n = m/M$

m - masa plina

M - molarna masa plina

a, b - konstante karakteristične za određeni plin

$$a = 3 V_c^2 p_c, \quad b = \frac{V_c}{3} = \frac{T_c R}{8 p_c}$$

p_c, V_c - tlak, volumen u kritičnoj
točki

T_c - kritična temperatura

ZADACI

2.2.1. Koliko ima molekula u 1 cm^3 plina pri temperaturi od 20°C i tlaku od 10^{-10} mm Hg (odličan laboratorijski „vakuum“)?

2.2.2. Izračunati srednju vrijednost kinetičke energije translacije molekule idealnog plina pri temperaturi od 27°C te ukupnu kinetičku energiju kaotičnog gibanja jednog mola plina.

2.2.3. U volumenu od 10 dm^3 nalazi se 1 mol kisika pri tlaku od 10^5 Pa . Odrediti srednju kinetičku energiju translacije molekule plina. Pretpostaviti da je plin idealan.

2.2.4. Kod koje je temperature prosječna kinetička energija translacije dovoljna za pobudjenje elektrona vodikova atoma iz osnovnog u prvo pobudjeno stanje (energijska razlika $10,2 \text{ eV}$)?

2.2.5. Izračunati unutarnju energiju 1 mola dušika na temperaturi od 298 K .

2.2.6. Izračunati prosječnu i najvjerojatniju brzinu te srednju kvadratičnu brzinu molekula idealnog plina.

2.2.7. Kolika je srednja kvadratična brzina vodikove molekule na temperaturi od 20°C ? Kolika je pri toj temperaturi prosječna i najvjerojatnija brzina?

2.2.8. Kolika je kinetička energija molekule dušika koja se giba s najvjerojatnijom brzinom po Maxwelllovoj raspodjeli pri temperaturi od 300 K ?

2.2.9. Koliko molekula kisika ima brzinu od 200 m s^{-1} do 210 m s^{-1} pri temperaturi od 273 K ?

2.2.10. Koliko puta više ima molekula kisika pri temperaturi od 300 K sa brzinom u području od 300 m s^{-1} do 310 m s^{-1} , nego u području od 800 m s^{-1} do 810 m s^{-1} ?

2.2.11. Izračunati odnos broja molekula idealnog plina po jedinici energije za energije $0,2 \text{ eV}$ i $0,02 \text{ eV}$ pri temperaturi plina od 600 K .

2.2.12. Izvesti relaciju raspodjele molekula po visini

a) zanemarujući uzgon

b) uzimajući u obzir uzgon.

2.2.13. U jednom od svojih eksperimenata s vodenom suspenzijom mastiksa Perrin je našao na jednom nivou 49 čestica na jedinici površine u vrlo tankom sloju i 14 čestica na jedinici površine u sloju koji je ležao $60 \mu\text{m}$ više pri temperaturi od 20°C . Gustoća mastiksa iznosi $1,194 \text{ g cm}^{-3}$, a polumjer kuglice mastiksa $0,212 \mu\text{m}$. Odrediti iz ovih podataka Avogadrov broj.

2.2.14. Izvesti barometarsku formulu.

2.2.15. Na kojoj je visini tlak zraka 80% od tlaka na površini mora? Temperaturu smatrati konstantnom i jednakom 0°C . Srednja molarna masa zraka je $28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$.

2.2.16. Zračni balon za meteorološka istraživanja ima u trenutku lansiranja volumen $0,03 \text{ m}^3$. Odrediti njegov volumen na visini od 4 km . Za srednju temperaturu zraka uzeti 7°C , a za molarnu masu $28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$.

2.2.17. Izračunati srednju duljinu slobodnog puta molekula dušika pri normalnim uvjetima. Za promjer molekule dušika uzeti $3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$.

2.2.18. Koliki je prosječni broj sudara u sekundi molekula kisika pri temperaturi od 300 K i tlaka 10^5 Pa. Za promjer molekule kisika uzeti $2,9 \cdot 10^{-8}$ cm.

2.2.19. Udaljenost između katode i anode u cijevi za izbijanje iznosi 12 cm. Koliki bi morao biti tlak u cijevi da elektroni ne bi doživjeli sudar na putu od katode do anode? Temperatura u cijevi iznosi 300 K. Za promjer molekule plina uzeti $3 \cdot 10^{-8}$ cm. Srednja duljina slobodnog puta elektrona u zraku je oko 5,7 puta veća od srednje duljine slobodnog puta molekula samoga plina.

2.2.20. Na kojoj se temperaturi nalazi 1 mol dušika ako pri tlaku od 10^7 Pa zauzima volumen od 1 litre? Kolika bi bila ova temperatura kad bi plin bio idealan?

Konstante su korekcije van der Waalsove jednadžbe za dušik:

$$a = 13,14 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^4 \text{ mol}^{-2}, \quad b = 0,038 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$$

2.2.21. Naći vrijednosti konstanti a i b za zrak iz podataka: $T_c = 132,5$ K, $p_c = 37,6 \cdot 10^5$ N m⁻².

2.2.22. 2 kg ugljičnog dioksida zauzima volumen od 4 m³ pri temperaturi od 20°C. Koliko će se pogriješiti pri proračunu tlaka ako se plin smatra idealnim? Za konstante a i b uzeti vrijednosti: $a = 36,4 \cdot 10^{-2}$ N m⁴ mol⁻², $b = 0,043 \cdot 10^{-3}$ m³ mol⁻¹.

2.3. TERMODINAMIKA

Prvi zakon termodinamike:

$$\delta Q = dU + \delta W \quad (2.19)$$

Q - količina topline
U - unutarnja energija
W - izvršeni rad

Molarna specifična toplina idealnog plina pri konstantnom volumenu:

$$C_V = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{V=\text{konst}} = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R \quad (2.20)$$

Molarna specifična toplina idealnog plina pri konstantnom tlaku:

$$C_P = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{p=\text{konst}} \quad (2.21)$$

$$C_P = C_V + R$$

i - broj stupnjeva slobode

n - broj molova plina

R - univerzalna plinska konstanta

Rad pri promjeni stanja plina:

a) izobarni proces ($p = \text{konst}$)

$$W = p (V_2 - V_1) \quad (2.23)$$

b) izotermni proces ($T = \text{konst}$; $p V = \text{konst}$)

$$W = n R T \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.24)$$

c) adijabatski proces ($Q = \text{konst}$; $p V^\gamma = \text{konst}$)

$$W = n \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_2) \quad (2.25)$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (2.26)$$

Rad kod Carnotovog kružnog procesa:

$$W = |Q_1| - |Q_2| = Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \quad (2.27)$$

Q_1 - apsorbirana količina topline

Q_2 - količina topline predana hladnijem rezervoaru

Promjena entropije pri reverzibilnoj promjeni stanja:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (2.28)$$

Veza izmedju entropije i termodinamičke vjerojatnosti:

$$S = k \ln P \quad (2.29)$$

P - vjerojatnost raspodjele
molekula

k - Boltzmannova konstanta

ZADACI

2.3.1. U valjku s pokretnim klipom volumena 3 litre nalazi se zrak pri tlaku od 10^5 Pa. Uslijed zagrijavanja, njegov se volumen podvostruči. Kolika je promjena unutarnje energije plina? Uzeti da je zrak dvoatomni idealni plin molarne mase $28,8 \cdot 10^{-3}$ kg mol $^{-1}$.

2.3.2. Jednoatomni idealni plin grije se izovolumno od temperatura 300 K do 400 K a zatim izobarno. Dovedena količina topline jednaka je u oba procesa. Izračunati temperaturu na koju se je zagrijao plin nakon izobarnog procesa.

2.3.3. Izračunati omjer C_p/C_v za jednoatomne i dvoatomne idealne plinove.

2.3.4. Kolike su specifične topline c_v i c_p za kisik?

2.3.5. Kolika je gustoća plina pri normalnim uvjetima ako razlika njegovih specifičnih toplina iznosi:

$$c_p - c_v = 294,5 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} ?$$

2.3.6. Izračunati količinu topline potrebnu da se masi od 20 g vodika povisi temperatura od 20°C do 100°C izovolumnim procesom.

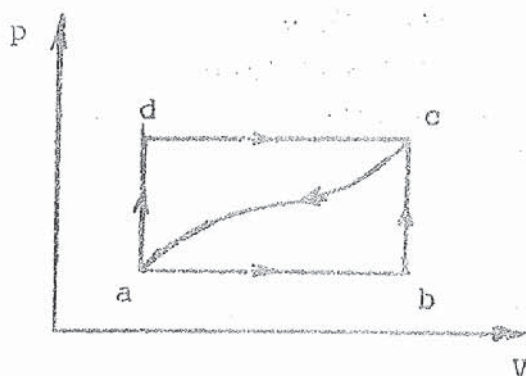
2.3.7. Koliko je topline potrebno dovesti dvoatomnom plinu molarne mase $2,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$ da bi mu se povisila temperatura za 100 K izobarnim procesom? Masa plina je 30 grama.

2.3.8. Vodiku mase 10 grama, temperature 300 K adijabatskim širenjem poveća se volumen 4 puta, a nakon toga izotermnom kompresijom smanji na polovinu početnog iznoša. Kolika je promjena unutarnje energije nakon ovih procesa? Pretpostaviti da je vodik idealni plin.

2.3.9. Sumporovodik (H_2S) volumena 3 m^3 , mase 6 kg, temperature 300 K sabije se adijabatski tako da se njegov tlak poveća 2 puta. Odrediti promjenu unutarnje energije plina te odnos broja molekula plina sa brzinom od 100 m s^{-1} na početku i kraju adijabatskog procesa. Za konstantu γ uzeti vrijednost 1,3.

2.3.10. Dovodjenjem topline jednom molu jednoatomnog idealnog plina uz konstantni tlak, povisi mu se temperatura od 300 K do 400 K. Do koje temperature bi se izovolumno zagrijala dva mola dvoatomnog idealnog plina ako bi im se dovela jednaka količina topline i ako im je početna temperatura bila ista (300 K)?

2.3.11. Pri prijelazu iz stanja a u stanje c duž puta adc (crtež 2.1.) u sistem se dovodi 251,2 J topline, a sistem vrši rad 125,6 J.



Crt. 2.1.

- Koliki je rad duž abc ako je dovedena količina topline 175,8 J ?
- Ako se sistem vraća iz stanja c u stanje a duž krivocrtnog puta, izvršeni rad na sistemu je 62,8 J. Da li sistem apsorbira ili oslobađa toplinu i koliko ?

- c) Ako je unutarnja energija $U_a = 217,7 \text{ J}$, kolika je U_c ?
d) Ako je $U_b = 83,7 \text{ J}$, koliki je Q za proces ab, a koliki za bc ?

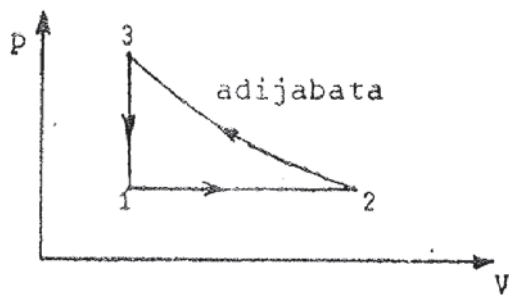
2.3.12. 1 kg zraka temperature $t_1 = 227^\circ\text{C}$, tlaka $p_1 = 10^4 \text{ N m}^{-2}$ izotermno se širi tako da je $p_1/p_2 = 3$, zatim se adijabatski sabija do tlaka p_1 , a nakon toga izobarnim procesom poprima volumen $14,4 \text{ m}^3$. Izračunati izvršeni rad u ovom procesu. Za molarnu masu zraka uzeti $28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$. Pretpostaviti da je zrak dvoatomni idealni plin.

2.3.13. 4 kg ugljičnog dioksida temperature 288 K i tlaka $2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ adijabatski se sabija do nekog tlaka p_2 . Poslije toga plin se izotermno širi. Odrediti volumen, tlak i temperaturu plina nakon širenja ako je prirast unutarnje energije u adijabatskom procesu 102 kJ jednak količini topline dane plinu u izotermnom procesu. Za konstantu γ uzeti vrijednost 1,3.

2.3.14. Odredjena masa zraka temperature T_1 zauzima volumen $V_1 = 100 \text{ l}$ pri tlaku od 76 cm Hg . Plin se najprije komprimira adijabatski do tlaka p_2 , a zatim se izovolumno hladi do temperature T_1 i tlaka $p_3 = 20 \text{ atm}$. Izračunati tlak p_2 , rad utrošen na kompresiji i količinu topline predane okolini za vrijeme hladjenja. Prikazati proces u p - V dijagramu.

2.3.15. Idealni dvoatomni plin pri temperaturi od 400 K zauzima volumen od 1 m^3 kod tlaka od $2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Plin ekspandira adijabatski i poprima volumen od 2 m^3 , a zatim se komprimira izotermno do početnog volumena. Nakon toga plinu izovolumno poraste tlak i on se vraća u početno stanje. Odrediti rad izvršen za vrijeme ciklusa i temperaturu na kraju adijabatske ekspanzije.

2.3.16. Rezerzibilni stroj radi s jednim molom jednoatomnog plina prema dijagramu prikazanom na crtežu 2.2.



Crt. 2.2.

Početni tlak $p_1 = 10^5$ Pa, a temperature su $T_1 = 300$ K, $T_2 = 580$ K, $T_3 = 400$ K.

Izračunati promjenu unutarnje energije, topline i izvršeni rad za svaki od tri procesa i za cijeli ciklus. Koliko iznosi tlak p_3 ?

2.3.17. Toplinski stroj radi po Carnotovom ciklusu. Početni volumen zraka je 2 l, temperatura 127°C , tlak 7 at. Poslije prvog izotermnog širenja zrak poprima volumen 5 l, a poslije adijabatskog širenja 8 l.

Izračunati: a) koordinate presjeka izoterma i adijabata
b) rad u pojedinim dijelovima ciklusa
c) ukupni rad i koeficijent iskorištenja stroja.

2.3.18. Carnotov stroj radi između temperatura 500 K i 200 K te u jednom ciklusu primi $4 \cdot 10^3$ J topline. Koliki je koeficijent iskorištenja stroja? Koliko topline predaje spremištu niže temperature?

2.3.19. Stroj koji radi između temperatura 543 K i 333 K ima koeficijent iskorištenja 15%. Kolika bi bila efikasnost ako bi to bio Carnotov stroj?

2.3.20. Carnotov stroj na temperaturi od 300 K dobiva 4186,8 J topline. Temperatura hladnijeg rezervoara je 220 K. Koliko je topline predano hladnijem rezervoaru? Koliki je dobiveni rad u kružnom procesu? Koliki je koeficijent iskorištenja stroja? Ako isti stroj radi kao hladnjak, koliki rad mora biti utrošen da bi se apsorbiralo 8373,6 J iz hladnijeg rezervoara?

2.3.21. Kolika bi se količina topline mogla osloboditi iz 500 m^3 oceanske vode ako bi se temperatura vode spustila za 2 K? Zašto se ne koristi ovaj izvor energije?

2.3.22. Izračunati promjenu entropije pri prijelazu 1 kg leda temperature -25°C u paru temperature 120°C .

2.3.23. 0,1 kg dušika adijabatski se sabija i pri tome mu temperatura poraste od 400 K do 500 K. Izračunati rad i promjenu entropije u tom procesu.

2.3.24. 0,1 kg dušika izobarno se zagrijava od 273 K do 398 K a zatim se izovolumno hladi do 353 K te izotermno širi do dvostruko većeg volumena. Izračunati promjenu entropije.

2.3.25. Dva mola idealnog, dvoatomnog plina volumena 1 m^3 zagrijavaju se pod stalnim tlakom do volumena od 3 m^3 , a zatim adijabatskom kompresijom vraćaju na početni volumen. Izračunati ukupnu promjenu entropije u ovim procesima.

2.3.26. Kolika je promjena entropije kada se 100 g vode od 0°C pomiješa s 50 g vode od 50°C ?

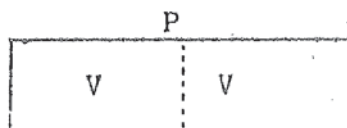
2.3.27. 0,2 kg željeza temperature od 373 K uroni se u 0,3 kg vode koja se nalazi u kalorimetru na temperaturi od 285 K. Koliko se promijenila entropija sistema po izjednačenju temperature?

2.3.28. Zrak volumena 3 m^3 , temperature 300 K i tlaka $2 \cdot 10^5\text{ Pa}$ izobarno se hladi do 100 K, a zatim izotermno širi do takvog volumena da ga adijabatska kompresija vraća u početno stanje. Izračunati rad i promjenu entropije za ovaj proces. Srednja molarna masa zraka je $28,8 \cdot 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\gamma = 1,4$. Pretpostaviti da je zrak idealni plin.

2.3.29. U dvjema posudama A i B nalazi se jednaka količina (1 mol) istog jednoatomnog idealnog plina. Posude su međusobno toplinski izolirane i izolirane su od okoline. Plin u posudi A ima temperaturu 800 K, a plin u posudi B 400 K. Posude se spoje toplinskim vodičem. Prijelaz topline iz posude A u B vrši

se bez gubitaka topline. Postignuta ravnotežna temperatura iznosi 600 K. Kolika je promjena entropije pri ovom procesu?

2.3.30. Zrak zauzima volumen $V = 51$ pri tlaku od $2 \cdot 10^5$ Pa i temperaturi od 313 K. Pomakom pregrade P (crtež 2.3)



plin će se proširiti na dvostruko veći volumen. Izračunati promjenu entropije koristeći Boltzmannovu relaciju.

Crt. 2.3.

3. KVANTI SVJETLOSTI

Stefan-Boltzmannov zakon

$$I = \sigma T^4 \quad (3.1)$$

Wienov zakon

$$\lambda_m T = \text{konst.} = 0,0029 \text{ [m K]} \quad (3.2)$$

Rayleigh-Jeansov zakon

$$W_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k T d\nu \quad (3.3)$$

I - energija koju zrači jedinica površine crnog tijela u jedinici vremena

T - apsolutna temperatura tijela

σ - Stefan-Boltzmannova konstanta:

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$$

λ_m - valna dužina za koju je energija zračenja maksimalna pri temperaturi T

$W_\nu d\nu$ - energija zračenja crnog tijela po jedinici volumena u jedinici vremena u intervalu frekvencije od ν do $\nu + d\nu$

c - brzina svjetlosti u vakuumu

k - Boltzmannova konstanta

Planckova kvantna hipoteza

$$E_n = n h \nu$$

E_n - moguće energije harmonijskog oscilatora koji titra frekvencijom ν

h - Planckova konstanta;

$$h = 6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ J s} =$$

$$= 4,1356 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Planckov zakon zračenja crnog tijela

$$W_\nu d\nu = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} \frac{h \nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (3.5)$$

Energija i količina gibanja fotona frekvencije ν

$$E = h \nu \quad (3.6)$$

$$p = \frac{h \nu}{c} \quad (3.7)$$

Einsteinova relacija za fotoelektrični efekt

$$h\nu = W + (E_k)_m \quad (3.8)$$

ν - frekvencija upadnog fotona

W - izlazni rad elektrona;

$$W = h \nu_g \quad (3.9)$$

ν_g - granična frekvencija za fotoelektrični efekt

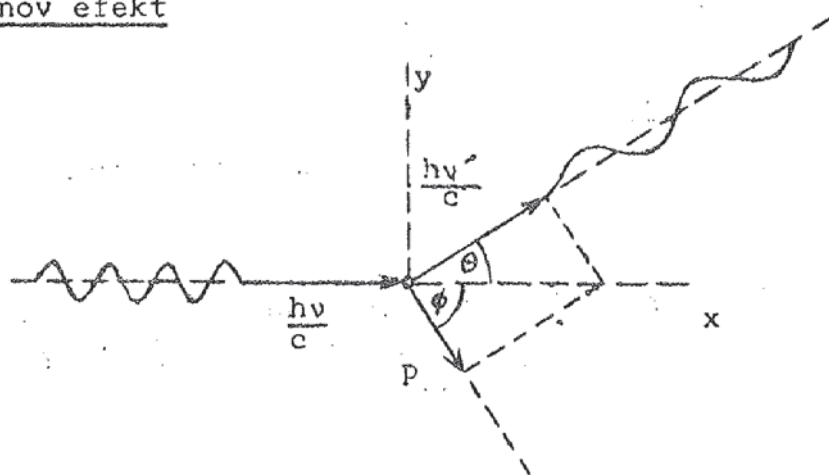
$(E_k)_m$ - maksimalna kinetička energija fotoelektrona;

$$(E_k)_m = e V_0 \quad (3.10)$$

e - naboj elektrona

V_0 - napon zaustavljanja

Comptonov efekt



Crt. 3.1.

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$\Delta\lambda$ - promjena valne dužine upadnog fotona

m_0 - masa mirovanja elektrona

θ - kut raspršenja fotona

λ_c - Comptonova valna dužina;

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 0,024 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

ZADACI

3.1. Procijeniti temperaturu površine Sunca pretpostavljajući da ono zrači kao crno tijelo i uzimajući za njegov polumjer vrijednost $7 \cdot 10^8$ m a za solarnu konstantu 1350 W m^{-2} .

3.2. Koliku energiju izrači 1 cm^2 volframa pri taljenju u 1 minuti? Uzeti da je zračenje volframa 40% od zračenja crnog tijela. Temperatura taljenja volframa je 4153 K.

3.3. Kad je peć otvorena, temperatura njezine unutarnje površine iznosi 800°C , a peć troši snagu od 0,6 kW. Koliki dio ove snage odlazi kroz zidove? Promjer otvora peći je 4 cm.

3.4. Koliku količinu energije zrači 1 cm^2 površine crnog tijela u 1 s, ako maksimum zračenja otpada na valnu dužinu $5200 \text{ \AA}$?

3.5. Maksimum zračenja u spektru Sunca je za valnu dužinu od $5000 \text{ \AA}$. Kolika je temperatura njegove površine? Pretpostaviti da Sunce zrači kao crno tijelo.

3.6. Koliku količinu energije zrači 1 cm^2 površine bakra emitivnosti 0,3 u 1 sekundi pri temperaturi od 500 K?

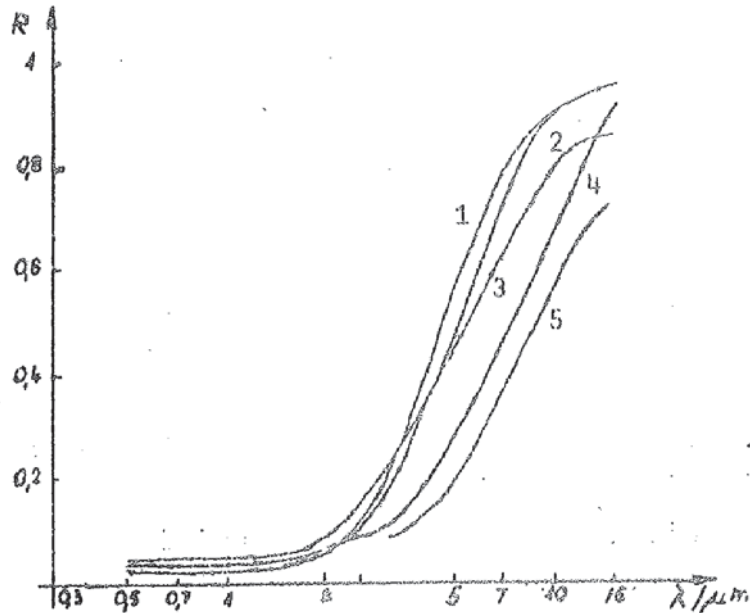
3.7. Izraziti gustoću energije zračenja crnog tijela (relacija 3.5.) u izrazu valne dužine.

3.8. Kolika je valna dužina koja odgovara maksimumu spektra zračenja crnog tijela kod temperature od 400 K? Odrediti gustoću energije za ovu valnu dužinu.

3.9. Pokazati da Planckov zakon zračenja sadrži u sebi Wienov zakon i Rayleigh-Jeansov zakon.

3.10. Izračunati gustoću energije zračenja crnog tijela iz Planckova zakona (Stefan-Boltzmannov zakon).

3.11. Na crtežu prikazani su rezultati mjerenja koeficijenta refleksije u zavisnosti o valnoj dužini zračenja kojim su obasjani uzorci sa selektivno-apsorpcijskim slojem (crni krom). Koji od uzoraka bi bio najpogodniji za sunčeve kolektore (obrazložiti)?



Crt. 3.2.

Nacrtati $R=f(\lambda)$ za slučaj idealnog apsorbera. Koliki je koeficijent apsorpcije uzorka „1“ (procijeniti iz grafa) ako je obasjan zračenjem valne dužine $10 \mu\text{m}$?

3.12. Primijeniti Planckov kvantni uvjet na titranje tijela mase 20 g obješeno na kraj elastične opruge konstante 2 N m^{-1} te izračunati dozvoljene amplitude titranja. Da li se može uočiti diskretnost?

3.13. Metar je definiran kao $1650763,73$ valnih dužina zračenja u vakuumu koje odgovara prijelazu između nivoa $2p_{10}$ i $5d_5$ atoma ^{86}Kr . Kolika je energija fotona ovog zračenja?

3.14. Koliko bi kvanta valne dužine od $4840 \text{ \AA}$ trebala apsorbirati 3 g žive da bi se njena temperatura povisila za 2 K ?

3.15. Najveća valna dužina svjetlosti koja još izaziva fotoelektrični efekt kod zinka je $2930 \text{ \AA}$. Kolikom će najvećom brzinom izlaziti fotoelektroni ako se cink obasja svjetlošću valne dužine $2000 \text{ \AA}$?

3.16. Osvijetli li se površina platine svjetlošću valne dužine $2040 \text{ \AA}$, fotoelektroni će biti zadržani razlikom potencijala od $0,8 \text{ V}$. Izračunati maksimalnu dužinu vala pri kojoj je još moguć fotoelektrični efekt.

3.17. Prag fotoemisije za volfram je $2750 \text{ \AA}$. Izračunati a) rad izlaza elektrona iz volframa i b) maksimalnu brzinu fotoelektrona ako se volfram obasja svjetlošću valne dužine $2000 \text{ \AA}$.

3.18. Svjetlo valne dužine od $2400 \text{ \AA}$ pada na aluminiј. Kolika je kinetička energija najbržih fotoelektrona? Izračunati graničnu valnu dužinu za aluminiј. Rad izlaza za aluminiј iznosi $4,2 \text{ eV}$.

3.19. Potencijal zaustavljanja za fotoelektrone emitirane iz kalija žutom svjetlošću valne dužine $5890 \text{ \AA}$ je $0,36 \text{ V}$, a on iznosi $3,14 \text{ V}$ za fotoelektrone izbačene ultraljubičastom svjetlošću valne dužine $2537 \text{ \AA}$. Izračunati iz navedenih podataka Planckovu konstantu h .

3.20. Na volfram pada ultraljubičasta svjetlost koja izbacuje elektrone maksimalne kinetičke energije od 8 eV . Izračunati masu upadnih fotona. Kolika je najmanja energija koja može osloboditi elektrone iz volframa? Izlazni rad za volfram je $4,5 \text{ eV}$.

3.21. Pokazati da slobodni elektron ne može apsorbirati foton.

3.22. Izvesti relaciju za proračun promjene valne dužine pri Comptonovu raspršenju koristeći a) klasične izraze za

kinetičku energiju i količinu gibanja elektrona, b) relativističke izraze. Objasniti dobivene rezultate.

3.23. Kolika je energija fotona raspršenog u olovu Comptonovim efektom ako je energija upadnih fotona 2 MeV a kut raspršenja 90° ?

3.24. Snop rendgenskih zraka valne dužine $1 \text{ \AA}$ pada na raspršivač. Izračunati promjenu valne dužine rendgenskih zraka za kut raspršenja 90° te kinetičku energiju koju je dobio udareni elektron. Zanimariti energiju veze elektrona u raspršivaču.

3.25. Foton koji ima energiju 10 keV sudara se sa slobodnim elektronom koji je u stanju mirovanja i raspršava pod kutem od 60° . Naći: a) promjenu u energiji i valnoj dužini fotona b) kinetičku energiju, količinu gibanja i pravac udarenog elektrona.

3.26. Količina gibanja fotona energije 3 MeV-a poslije raspršenja iznosi 1,688 MeV/c. Izračunati kut pod kojim je elektron izbačen obzirom na pravac fotona.

3.27. Gama zrake iz uzorka ^{137}Cs valne dužine $1,88 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}$ raspršene su Comptonovim efektom u smjeru koji je suprotan upadnom. Kolika je promjena valne dužine fotona te kinetička energija elektrona? Koliko se posto od energije upadnog fotona izgubi raspršenjem?

3.28. Foton energije 0,62 MeV raspršen je na uzorku ugljika i pri tome se njegova valna dužina promijenila za 10%. Izračunati kut raspršenja fotona, kinetičku energiju i kut odboja elektrona. Zanimariti energiju veze elektrona u uzorku.

4. ELEKTRONI I IONI

ZADACI

4.1. Izračunati brzinu elektrona u katodnoj cijevi televizora ako se ubrzavaju potencijalnom razlikom od 80 kV. Uzeti da je njihova početna brzina bila jednaka nuli.

4.2. Kolika je brzina elektrona nakon ubrzanja potencijalnom razlikom od 10 kV ako je njihova početna brzina bila 10^6 m s^{-1} ?

4.3. Snop elektrona energije 2 MeV izlijeće iz Van de Graffovog akceleratora i upada okomito na silnice homogenog magnetskog polja indukcije 0,04 T. Izračunati polumjer zakrivljenosti putanje elektrona. Kakva bi bila putanja elektrona ako upadni snop elektrona zatvara kut od 60° s magnetskim poljem?

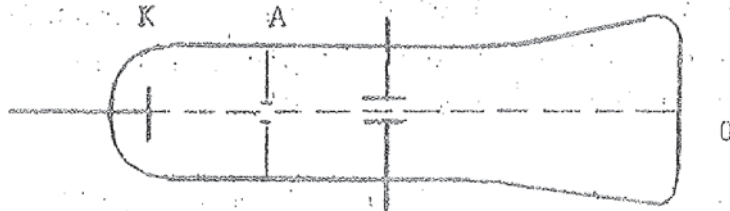
4.4. Elektron je ubrzan u prostoru između otklonskih ploča električnim poljem koje se linearno mijenja s vremenom: $E = k t$. Izračunati udaljenost x koju prijedje elektron za vrijeme t . Pretpostaviti da elektron u trenutku $t=0$ ima brzinu jednaku nuli.

Izračunati udaljenost x kao funkciju vremena t u slučaju da je na otklonske ploče primijenjeno sinusoidalno električno polje: $E = E_0 \sin \omega t$.

4.5. Elektroni ubrzani (iz mirovanja) potencijalnom razlikom od 600 V ulaze u prostor između dvije otklonske pločice osciloskopa okomito na električno polje. U trenutku ulaza snop elektrona udaljen je jednako od pločica. Otklonske pločice su kvadrati stranice 1 cm međusobne udaljenosti 5 mm. Izračunati a) minimalnu razliku potencijala koju bi trebalo primijeniti na otklonske pločice, da bi elektroni pali na pozitivno nabijenu pločicu, b) maksimalni napon koji bi trebalo

primijeniti na otklonske pločice, da bi elektroni pali na fluorescentni ekran promjera 15 cm koji je udaljen od bližeg kraja otklonskih ploča 25 cm. Pretpostaviti da je električno polje homogeno te da je zanemarivo izvan otklonskih pločica.

4.6. Katodne zrake nakon ubrzanja kroz primijenjenu razliku potencijala ulaze u električno polje između otklonskih ploča i udaraju o ekran cijevi 2 cm iznad položaja 0 na koje bi padali kada ne bi bilo električnog polja (crtež 4.1). Ako na katodne zrake uz električno polje djeluje magnetsko polje indukcije $B = 10^{-3}$ T koje je okomito na električno polje, snop udara ekran 1,2 cm ispod točke 0.



Crt. 4.1.

Duljina otklonskih pločica $L = 8$ mm, razmak među njima $d = 3,5$ mm primijenjena razlika potencijala na njih $V_d = 8,6$ V a udaljenost ekrana cijevi od sredine otklonskih ploča $D = 10$ cm. Pretpostaviti da su električno i magnetsko polje zanemarivi izvan dužine L te da su homogeni u tom dijelu prostora cijevi. Izračunati iz danih podataka omjer naboja i mase elektrona.

4.7. Vakuumska cijev od neferomagnetskog materijala smještena je u homogeno magnetsko polje magnetske indukcije $0,0012$ T. Tanki snop elektrona emitiran iz katode ulazi u pros-

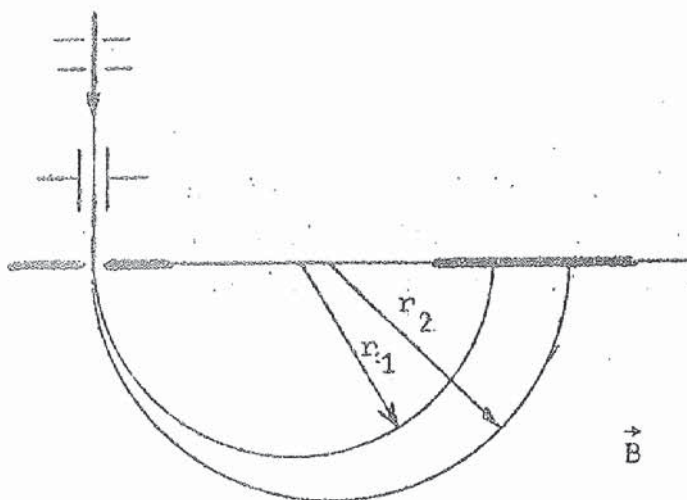
tor medju otklonske pločice nakon prolaza kroz potencijalnu razliku od 300 V. Razmak otklonskih pločica iznosi 0,015 m, a između njih je priključena potencijalna razlika od 184 V. Ova cijev (crt. 4.1) radi kao selektor brzina, jer samo elektroni određene brzine mogu proći kroz cijev i stići do izlaza 0, te biti registrirani. Izračunati iz gornjih podataka omjer e/m .

4.8. Kanalne zrake u cijevi s vodikom sadrže ione H^+ i H_2^+ . One ulijeću u prostor između dvije otklonske ploče okomito na silnice električnog polja. Na njih djeluje istovremeno i magnetsko polje indukcije 0,002 T koje je antiparalelno s električnim poljem. Na otklonske pločice primijenjena je razlika potencijala od 180 V, a one su udaljene jedna od druge 1,5 cm (crt. 4.1). Udaljenost ekrana cijevi do sredine otklonskih pločica iznosi 20 cm, a duljina otklonskih pločica 1 cm. Napisati jednadžbu parabole za ione H^+ i za ione H_2^+ .

4.9. Snop elektrona ubrzanih razlikom potencijala $V=300$ V ulijeće u homogeno magnetsko polje indukcije $2 \cdot 10^{-4}$ T (smjera iz crteža prema van) i udara o zastor u točku koja je udaljena 3 cm od mjesta udara elektrona u slučaju da nije uključeno magnetsko polje. Udaljenost zastora od kraja polova magneta je 12 cm. Za širinu magnetskog polja uzeti širinu magneta $L = 6$ cm. Izračunati iz navedenih podataka omjer e/m .

4.10. Kanalna zraka otklonjena je u horizontalnom pravcu s magnetskim poljem indukcije 0,2 T i istovremeno u vertikalnom pravcu s električnim polje jakosti $2,38 \cdot 10^5$ V m⁻¹. Obi polja djeluju preko jednake dužine $d = 8$ cm. Fotografska ploča je postavljena odmah iza otklonskih polja. Otklon iona u vertikalnom pravcu je 4 mm a u horizontalnom 3 mm. Izračunati iz navedenih podataka specifični naboj e/m i identificirati tip iona.

4.11. Kolika je udaljenost tragova protona i deuterona na fotografskoj ploči spektrografa mase u kojem vlada magnetsko polje indukcije 1 T (crtež 4.2)? Prije ulaza u spektrograf protoni i deuteroni se ubrzavaju potencijalnom razlikom od 10 kV.



Crt. 4.2.

4.12. Protoni iz izvora I (crt. 4.2) ubrzani su potencijalnom razlikom od 200 V i ulaze u magnetsko polje spektrometra indukcije 0,1 T. Trag koji ostavljaju protoni na fotografskoj ploči spektrometra udaljen je 40,8 mm od ulazne točke 0.

Izračunati iz navedenih podataka omjer e/m protona.

4.13. Naći udaljenost medju linijama koje ostavljaju izotopi magnezija ${}^{24}_{12}\text{Mg}$, ${}^{25}_{12}\text{Mg}$ i ${}^{26}_{12}\text{Mg}$ na fotografskoj ploči spektrografa mase ako je potencijalna razlika medju pločama (crtež 4.2) 150 V a indukcija primijenjenog magnetskog polja 0,5 T. Uzeti da su atomske mase izotopa jednake njihovim masenim brojevima a da su ioni jedanput ionizirani.

4.14. Kapljica ulja pada u zraku konstantnom brzinom i prevali 4 mm za vrijeme od 16 s. Kada bi kapljica bila u homogenom električnom polju jakosti $2 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1}$, trebalo bi joj

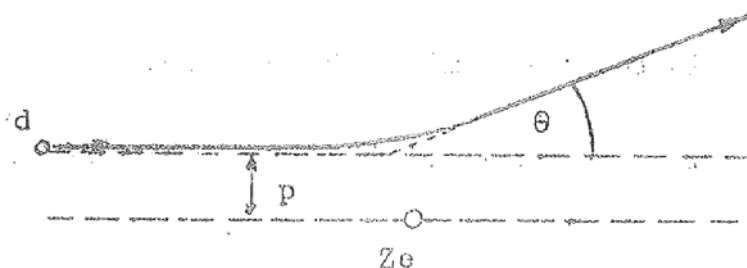
40,65 s da se popne na visinu od 4mm. Izračunati polumjer, masu i električni naboj kapljice.

Gustoća ulja iznosi 800 kg m^{-3} pri sobnoj temperaturi. Na toj temperaturi koeficijent viskoznosti zraka iznosi $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ a njegova gustoća $1,30 \text{ kg m}^{-3}$.

4.15. Kroz zrak pada kapljica ulja težine $3,65 \cdot 10^{-16} \text{ N}$ brzinom $v_g = 0,08 \text{ mm s}^{-1}$. Ista kapljica se giba uvis brzinom $v_x = 14 \text{ mm s}^{-1}$ ako se nalazi između horizontalnih metalnih ploča čiji je razmak 2 mm, a među kojima vlada napon od 800 V. Koliki je naboj kapljice? Uzgon zanemariti.

5. STRUKTURA ATOMA

Rutherfordovo raspršenje



Crt. 5.1.

Broj α čestica koje su se „sudarile“ s atomima mete na putu dx u jedinici vremena:

$$dI = \sigma I_0 n dx \quad (5.1)$$

Kut otklona θ alfa čestice:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{e^2 Z}{2\pi \epsilon_0 v^2 m} \frac{1}{p} \quad (5.2)$$

Diferencijalni udarni presjek za raspršene alfa čestice:

$$d\sigma = \frac{1}{(4\pi \epsilon_0)^2} \frac{Z^2 e^4}{m^2 v^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega \quad (5.3)$$

I_0 - intenzitet snopa alfa čestica koji pada na metu

n - broj atoma mete u jedinici volumena

σ - udarni presjek

p - parametar sudara

v - brzina alfa čestice

m - masa alfa čestice

e - naboj elektrona

Z - redni broj jezgre

Ω - prostorni kut

ϵ_0 - apsolutna dielektrična konstanta vakuuma

Linijski spektri vodika

Lymanova serija $\nu = c R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.4)$

Balmerova serija $\nu = c R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, \dots \quad (5.5)$

Pashenova serija $\nu = c R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 4, 5, \dots \quad (5.6)$

Brackettova serija $\nu = c R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 5, 6, \dots \quad (5.7)$

Pfundova serija $\nu = c R_H \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 6, 7, \dots \quad (5,8)$

Općenito $\nu = c R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n \geq m + 1 \quad (5.9)$

c - brzina elektromagnetskog vala
u vakuumu

R_H - Rydbergova konstanta za vodik;

$$R_H = (10967757,6 \pm 1,2) \text{ m}^{-1}$$

Bohrov model atoma

Polumjeri Bohrovih kružnica:

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e Z e^2} \quad (5.10)$$

Dozvoljeni momenti količine gibanja elektrona:

$$L_n = m_e v_n r_n = n \frac{h}{2\pi} = n \hbar \quad (5.11)$$

Frekvencija kvanta svjetlosti koji emitira atom pri prijelazu iz stacionarnog stanja energije E_n u stacionarno stanje energije E_m :

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} \quad (5.12)$$

Moguće energije elektrona:

$$E_n = - \frac{1}{n^2} \frac{m_e Z^2 e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \quad (5.13)$$

h - Planckova konstanta

m_e - masa elektrona

v - brzina elektrona

n - glavni kvantni broj;

$n = 1, 2, 3, \dots$

$\hbar$ - reducirana Planckova konstanta

$$\begin{aligned}\hbar &= \frac{h}{2\pi} = 1,0545 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = \\ &= 0,6582 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}\end{aligned}$$

Relacija (5.12) za vodikov atom:

$$\begin{aligned}\nu_{nm} &= \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \\ &= c R_\infty \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)\end{aligned}\quad (5.14)$$

gdje je R_∞ Rydbergova konstanta za jezgru beskonačne mase:

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} \quad (5.15)$$

Rydbergova konstanta za konačnu masu jezgre:

$$R_M = \frac{\mu e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} = \left(\frac{M}{m_e + M} \right) R_\infty \quad (5.16)$$

$$R = 10973700 \text{ m}^{-1}$$

μ - reducirana masa sistema;

$$\mu = \frac{m_e M}{m_e + M} \quad (5.17)$$

m_e - masa elektrona

M - masa jezgre

Eliptički model atoma

Velika poluos a i mala poluos b elipse:

$$a_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e Z e^2} \quad b_n = \frac{k}{n} a_n \quad (5.18)$$

Energija elektrona:

$$E_n = - \frac{1}{n^2} \frac{m_e Z^2 e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \quad (5.19)$$

Dozvoljeni prijelazi:

$$\Delta k = \pm 1 \quad (5.20)$$

n - glavni kvantni broj

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

k - azimutalni kvantni broj

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Zeemanov efekt

Frekvencija ν emitirane linije u vanjskom magnetskom polju:

$$\nu = \nu_0 + \Delta\nu \quad (5.21)$$

gdje je

$$\nu_0 = \frac{E_i - E_j}{h} = c R \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{i^2} \right) \quad (5.22)$$

$$\Delta\nu = \frac{U_i - U_j}{h} = \Delta m \mu_B \frac{B}{h} \quad (5.23)$$

Dozvoljeni prijelazi:

$$\Delta m = 0, \pm 1 \quad (5.24)$$

ν_0 - frekvencija emitirane linije
bez vanjskog magnetskog polja
pri prijelazu iz stanja energije E_i u stanje energije E_j

U - potencijalna energija

$$U = - \vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

$\vec{B}$ - magnetska indukcija primijenog magnetskog polja

$\vec{p}_m$ - magnetski dipolni moment atoma

$$\vec{p}_m = - \frac{e}{2 m_e} \vec{L}$$

L - moment količine gibanja elektrona

m - magnetski kvantni broj

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$$

l - orbitalni kvantni broj

$$l = k-1$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

μ_B - Bohrov magneton;

$$\mu_B = \frac{e h}{4 \pi m_e} \quad (5.25)$$

Spin elektrona

Sila na magnetski dipol u nehomogenom magnetskom polju:

$$F = p_m \frac{dB}{dz} \cos \theta \quad (5.26)$$

Projekcija spina elektrona:

$$S_z = m_s \hbar \quad (5.27)$$

θ - kut između $\vec{p}_m$ i $\vec{B}$

m_s - spinski magnetski kvantni broj

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

$\hbar$ - reducirana Planckova konstanta

Ukupni moment količine gibanja elektrona

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (5.28)$$

$\vec{L}$ - orbitalni moment količine gibanja elektrona

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (5.29)$$

$\vec{S}$ - spinski moment količine gibanja elektrona

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad (5.30)$$

Rendgenske zrake

Granična frekvencija ν_g kontinuiranog rendgenskog spektra:

$$h \nu_g = e \mathcal{U} \quad (5.31)$$

$\mathcal{U}$ - potencijalna razlika koju prijeđe elektron

e - naboj elektrona

h - Planckova konstanta

Frekvencije linijskog rendgenskog spektra:

$$\nu = c R (Z-b)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (5.32)$$

R - Rydbergova konstanta

Z - redni broj jezgre

b - konstanta, za K seriju $b \approx 1$

Braggov uvjet za konstruktivnu interferenciju rendgenskih zraka:

$$2 d \sin \theta = n \lambda \quad (5.33)$$

λ - valna dužina rendgenskih zraka

d - konstanta rešetke (razmak između susjednih ravnina kristalne rešetke)

θ - kut između upadne zrake i ravnina kristala

$n = 1, 2, 3, \dots$

ZADACI

5.1. U Rutherfordovu eksperimentu raspršenja alfa čestice energije 6 MeV padaju na zlatni listić. Izračunati parametar sudara koji odgovara odklonu od 10° .

5.2. Alfa čestice energije 4 MeV približavaju se jezgri srebra s parametrom sudara $2,4 \cdot 10^{-13}$ m. Izračunati kut raspršenja čestice.

5.3. Koliko se posto smanji intenzitet snopa alfa čestica pri prolazu kroz listić zlata debljine $5 \cdot 10^{-5}$ cm? Za udarni presjek raspršenja uzeti vrijednost $7 \cdot 10^{-4}$ barna.

5.4. U Rutherfordovu eksperimentu raspršeno je 30 alfa čestica u minuti za kut $\theta = 120^{\circ}$. Koliko će ih biti kod 20° ?

5.5. Izračunati najmanju udaljenost do koje se mogu približiti alfa čestice kinetičke energije 5,30 MeV jezgri olova ako je parametar sudara $p = 0$. Pretpostaviti da jezgra olova ostaje nepomična.

5.6. Izračunati najmanju i najveću dužinu vala spektralnih linija vodika Balmerove serije.

5.7. Izračunati energije fotona i valne dužine prvih dviju linija Lymanove serije za vodik.

5.8. Koje linije vodikova spektra spadaju u vidljivo područje?

5.9. Izračunati polumjere prve, druge i treće moguće kružnice elektrona u atomu vodika te momente količine gibanja u tim stazama.

5.10. Izračunati kinetičku i potencijalnu energiju elektrona vodikova atoma u kvantnim stanjima $n = 1, 2$ i ∞ .

5.11. Srednji život pobudjenog stanja vodikova atoma je oko 10^{-8} s. Koliko okreta izvrši elektron u stanju $n = 5$?

5.12. Izračunati valnu dužinu fotona emitirana pri prijelazu vodikova atoma iz stanja $n = 3$ u osnovno stanje.

5.13. Koliku bi najmanju brzinu trebali imati elektroni da bi pri pobudjenju atoma vodika izazvali emisiju svih linija svih serija vodikova spektra?
Kroz koliku bi minimalnu potencijalnu razliku trebali biti ubrzani elektroni iz mirovanja da bi postigli tu brzinu?

5.14. Izračunati energiju vezanja vodikova atoma.

5.15. Koliki je potencijal ionizacije atoma vodika?

5.16. Izračunati temperaturu kod koje će prosječna kinetička energija molekule plina biti dovoljna za pobudjivanje vodikovih atoma iz osnovnog u prvo pobudjeno stanje.

5.17. Izračunati najmanju energiju koja može pobuditi vodikov atom iz osnovnog stanja u stanje $n=5$. Koliko spektralnih linija može biti emitirano pri njegovu vraćanju u osnovno stanje? Nacrtati energijske nivoe i označiti moguće prijelaze. Izračunati maksimalnu emitiranu energiju.

5.18. Foton frekvencije $3,6 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ izbacuje elektron iz atoma vodika koji se nalazi u osnovnom stanju. Kolikom će se brzinom gibati elektron daleko od jezgre?

5.19. Elektron, koji daleko od protona ima brzinu od $1,6 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}$ uhvaćen je protonom. Izračunati valnu dužinu zračenja koje se pri tome emitira ako je nastali atom vodika u osnovnom stanju.

5.20. Slobodni vodikov atoma emitira foton (iz stanja mirovanja) koji odgovara drugoj liniji Balmerove serije. Izračunati količinu gibanja emitiranog fotona i brzinu odboja atoma vodika.

5.21. Izračunati brzinu odboja vodikova atoma (koji je početno bio u stanju mirovanja) ako se prijelaz iz stanja $n = 5$ u stanje $n=1$ izvrši u jednom kvantnom skoku.

5.22. Vodikov atom (u stanju mirovanja) apsorbira foton frekvencije $4,3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$. Izbačeni elektron giba se u pravcu upadnog fotona. Izračunati količinu gibanja fotoelektrona i atoma.

5.23. Izračunati Rydbergovu konstantu za vodik uzimajući u obzir gibanje jezgre.

5.24. Kolika je Rydbergova konstanta za deuterij?

5.25. Izračunati razliku između valnih dužina prvih linija Balmerove serije vodika i deuterija.

5.26. Izračunati valne dužine prvih dviju linija Balmerove serije za ionizirani helij ($^4\text{He}^+$).

Kolika je energija vezanja elektrona u ionu $^4\text{He}^+$?

5.27. Izračunati valnu dužinu emitiranog fotona pri prijelazu iona Li^{2+} iz drugog pobudjenog stanja u osnovno stanje.

5.28. Izračunati veličine malih poluosi elipsa koje može opisivati elektron u drugom energijskom nivou.

5.29. Izračunati magnetski moment elektrona u prvoj Bohrovoj kružnici vodikova atoma (Bohrov magneton).

5.30. Izračunati frekvencije emitiranih spektralnih linija pri prijelazu elektrona vodikova atoma iz drugog energijskog nivoa u stabilno stanje ako se atom nalazi u magnetskom polju jakosti $8 \cdot 10^5 \text{ A m}^{-1}$.

5.31. Nacrtati dijagram energijskih nivoa za stanja $3d$ i $2p$ vodikova atoma sa i bez primijenjenog magnetskog polja te moguće prijelaze. Izračunati frekvencije emitiranih spektralnih linija ako se atom nalazi u magnetskom polju indukcije 1 T .

5.32. Izračunati frekvencije emitiranih spektralnih linija elektrona vodikova atoma pri prijelazu iz $4f$ u $3d$ stanje ako se atom nalazi u magnetskom polju indukcije $0,5\text{ T}$.

Kod koje bi se vrijednosti magnetske indukcije još mogle razlučiti nastale linije sa spektrometrom čija je moć razlučivanja $0,1\text{ Å}$?

5.33. Razmotriti $4p - 3d$ prijelaze u vodik u magnetskom polju indukcije 1 T .

- Nacrtati energijske nivoe $4p$ i $3d$ stanja te izračunati razmak između susjednih nivoa.
- Označiti dozvoljene prijelaze te izračunati razlike u energijama linija rascjepa u odnosu na vrijednost energije kada nije bilo magnetskog polja.

5.34. Vodikovi atomi gibaju se 1 m u pravcu okomitom na magnetsko polje gradijenta $1,2 \cdot 10^8\text{ A m}^{-2}$ brzinom 10^5 m s^{-1} . Izračunati njihov vertikalni pomak.

5.35. U Stern-Gerlachovu eksperimentu atomi srebra magnetskog momenta $9,27 \cdot 10^{-24}\text{ A m}^2$, prosječne kinetičke energije $4 \cdot 10^{-20}\text{ J}$, prolaze kroz nehomogeno magnetsko polje gradijenta 2500 T m^{-1} . Izračunati maksimalnu udaljenost tragova na fotografskoj ploči postavljenoj uz kraj magnetskih polova duljine 2 cm .

5.36. U Stern-Gerlachovu eksperimentu atomi srebra emitirani su iz izvora temperature 1320 K sa prosječnom energijom od $1,8\text{ kT}$. Duljina magnetskih polova je 3 cm a gradijent magnetskog polja $1,8 \cdot 10^9\text{ A m}^{-2}$. Najveća udaljenost tragova na fotografskoj ploči postavljenoj uz kraj magnetskih polova iznosi je $576\text{ }\mu\text{m}$. Izračunati magnetski moment atoma srebra.

5.37. Pokazati da je maksimalni broj elektrona u ljuski kvantnog broja n jednak $2n^2$.

5.38. Upotrebljavajući spektroskopsku notaciju, dati osnovno stanje elektronske konfiguracije za germanij.

5.39. Napisati 4 kvantna broja za svaki od 3 elektrona ${}_3\text{Li}$ ako se atom nalazi u osnovnom stanju.

5.40. Izračunati energiju vezanja elektrona molibdena ($Z=42$) u K ljuski. Koliki je moment količine gibanja J za te elektrone?

5.41. Izračunati kratkovalnu granicu kontinuirana spektra rendgenskih zraka ako je na rendgensku cijev priključena razlika potencijala od 80 kV.

5.42. Koliki bi najmanji napon trebalo priključiti na rendgensku cijev da bi nastale sve linije K serije, ako je anoda od srebra ($Z=47$) ?

5.43. U rendgenskom spektru dobivenom iz cijevi s anodom od volframa uočene su, pored intenzivne K_α linije volframa, i dvije slabe K_α linije uvjetovane primjesama u anodi. Dužine vala K_α linija jednake su 0,222 Å za volfram a 2,285 Å i 1,537 Å za nepoznate elemente. Odrediti koji su to elementi.

5.44. Pri padu L elektrona u K ljusku atoma olova emitirana je rendgenska zraka valne dužine 164,94 Å. Energija vezanja ovog L elektrona iznosi 13,07 eV. Izračunati energiju vezanja K elektrona.

5.45. Kolika bi bila energija odboja slobodnog atoma bakra ${}^{29}\text{Cu}$ (početno u stanju mirovanja) pri emisiji K_α fotona? Za masu mirovanja atoma bakra uzeti vrijednost $105,48 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

5.46. Za analizu rendgenskih zraka iz molibdena ($Z=42$) upotrebljen je spektrometar s kristalom kvarca ($d = 4,255 \text{ Å}$).

Izračunati kut između upadnog snopa i ravnina kristala za refleksiju prvog reda K_α linije.

5.47. Pri kojem se najmanjem kutu odbijaju K_β zrake iz volframa ($Z=74$) od kristalne rešetke NaCl ?

Atomska masa Na iznosi $23 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$, Cl $35,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$ a gustoća NaCl $2,165 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$.

5.48. Izračunati promjenu valne dužine $\lambda' - \lambda$ upadne K_α zrake molibdena kod Comptonova raspršenja za kut $\theta = 135^\circ$. Koliki bi bio kut refleksije prvog reda pri upadu zrake valne dužine λ' na kristal kalcita konstante rešetke $3,03 \text{ \AA}$?

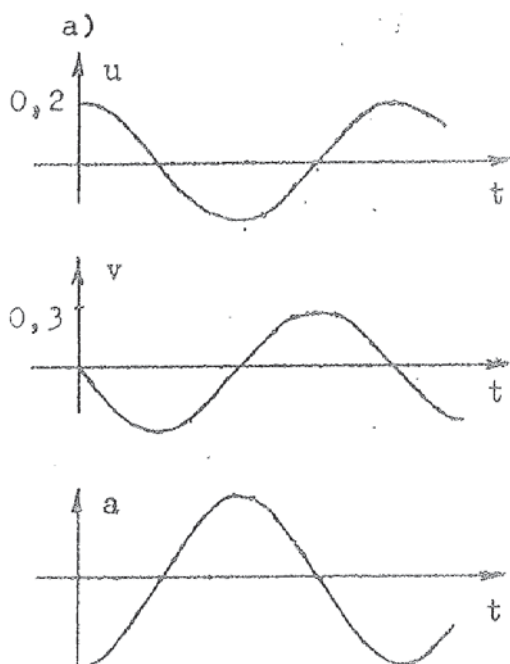
Redni broj molibdena je 42.

R J E Š E N J A Z A D A T A K A

1. TITRAJI I VALOVI

1.1. MEHANIČKI TITRAJI I VALOVI

1.1.1.



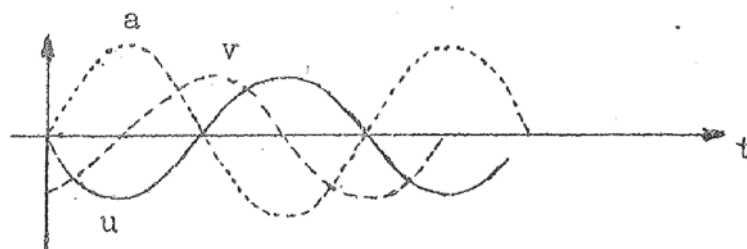
Prema relaciji (1.3):

$$u(t) = A \cos \omega t = 0,2 \cos \frac{\pi}{2} t$$

$$v(t) = -A \omega \sin \omega t$$

$$a(t) = -A \omega^2 \cos \omega t$$

b)



$$u(t) = A \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = 0,2 \cos \left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$v(t) = -A \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$a(t) = -A \omega^2 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

1.1.2. a) $\omega = 2 \pi \nu = \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{3} \pi \text{ s}^{-1}$, $A = 4 \text{ cm}$

Iz relacije (1.3): $u(t) = A \cos \omega t$

$$v(t) = -A \omega \sin \omega t$$

maksimalna brzina tijela: $v_m = A\omega = 8,38 \text{ cm s}^{-1}$

Akceleracija tijela u trenutku $t = 4 \text{ s}$:

$$a = -A \omega^2 \cos \omega t = -4 \cdot \frac{4}{9} \pi^2 \cos \frac{2}{3} \pi 4 = 8,77 \text{ cm s}^{-1}$$

b) Iz relacije (1.3): $u(t) = A \cos \omega t$ slijedi da tijelo stigne iz početnog položaja u točku udaljenu 3 cm:

$$1 = 4 \cos \frac{2}{3} \pi t \text{ za vrijeme } t = 0,6 \text{ s}$$

c) Na tijelo djeluje sila: $F = -k u$

$$u = A \cos \omega t, \quad k = (2\pi/T)^2 m \text{ te je } F = - (2\pi/T)^2 m A \cos \omega t$$

U trenutku $t = 2 \text{ s}$ sila poprima vrijednost $F = 17,5 \cdot 10^{-5} \text{ N}$.

1.1.3. $A = 0,2 \text{ m}$, $T = 1,5 \text{ s}$, $\emptyset = 0,4 \text{ rad}$, faza u $t = 4 \text{ s}$:
 $t + \emptyset = 17,2 \text{ rad}$, $v_m = A\omega = 0,84 \text{ m s}^{-1}$,
 $k = (2\pi/T)^2 m = 17,64 \text{ kg s}^{-2}$

Tijelo je udaljeno 1 cm od ravnotežnog položaja:

$$0,1 = 0,2 \cos(4,2 t + 0,4)$$

u trenutku t koji je određen relacijom:

$$\cos(4,2 t + 0,4) = \frac{1}{2} \text{ i iz koje slijedi:}$$

$t = 0,15 \text{ s}$. Tada je brzina tijela jednaka

$$v = -A\omega \sin(4,2 t + 0,4) = 0,72 \text{ m s}^{-1}.$$

U trenutku maksimalne akceleracije $\cos(4,2 t + 0,4) = 1$
te je položaj tijela $u = 0,2 \cos(4,2 t + 0,4) = \pm 0,2 \text{ m}$

1.1.4. a) Frekvencija titranja tijela (relacije 1.5 i 1.1):

$$v = 1/T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{F/um} \quad ; \quad \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/u} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{9,81 \text{ m s}^{-2}/0,183 \text{ m}}$$

$$v = 1,16 \text{ s}^{-1}$$

b) Iz relacija (1.2), (1.3) i (1.1) slijedi jednačba gibanja i rješenje jednačbe:

$$1,55 \frac{d^2 u}{dt^2} + 83,06 u = 0, \quad u = 0,12 \cos(7,3 t + 0,95)$$

Sve veličine su izražene u internacionalnom sustavu.

1.1.5. a) $v_m = 1,26 \text{ m s}^{-1}$, $a_m = 15,80 \text{ m s}^{-2}$

b) $v = 0,75 \text{ m s}^{-1}$, $a = 12,63 \text{ m s}^{-2}$

1.1.6. Iz relacija (1.1) i (1.2) slijedi:

$$0,05 \frac{d^2 u}{dt^2} + 10 u = 0$$

$$F = - 10 u$$

Brzina i akceleracija tijela kada je ono udaljeno od ravnotežnog položaja 5 cm iz relacije (1.2): $0,05 = 0,20 \cos \omega t$

$$v = A \omega \sin \omega t = - A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \omega t = 2,7 \text{ m s}^{-1}$$

$$a = - A \omega^2 \cos \omega t = 10 \text{ m s}^{-2}$$

1.1.7. a) prema relaciji (1.1) i (1.3):

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{\frac{1}{2} m v^2}{\frac{1}{2} k u^2} = \frac{\sin^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = \tan^2 \omega t = \frac{1}{3}$$

$$b) \frac{E_k}{E_p} = \frac{\frac{1}{2} k (A^2 - u^2)}{\frac{1}{2} k u^2} = 3$$

$$1.1.8. E_p = 27,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}, E_k = 0,22 \text{ J}, T = 0,6 \text{ s}$$

$$1.1.9. 3,8 \cdot 10^{-3} \frac{d^2 u}{dt^2} + 37,5 \cdot 10^{-3} u = 0 \quad [m]$$

$$v = - 0,4\pi \sin \pi \left(t + \frac{1}{6} \right) = 1,2 \text{ m s}^{-1}$$

$$1.1.10. E_p = \frac{1}{2} k u^2$$

$$u = A \cos (\omega t + \emptyset)$$

$$k = F/u = 10 \text{ N}/0,05 \text{ m} = 200 \text{ N m}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{k/m} = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$u = 0,05 \cos 10 \pi/15 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$E_p = \frac{1}{2} 200 \cdot 25^2 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 0,06 \text{ J}$$

1.1.11. Podaci iz grafičkog prikaza $u=u(t)$:

$$T = 12 \text{ s}, \quad A = 0,02 \text{ m}$$

u trenutku $t=0$ elongacija $u=0,01 \text{ m}$, $0,02 \cos$ te je

$$\varphi = \pi/3 \text{ rad}$$

$$k = (2\pi/T)^2 m = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}, \quad \omega = 2\pi/T = \pi/6 \text{ s}^{-1}$$

Jednadžba gibanja u jedinicama internacionalnog sustava:

$$0,012 \frac{d^2 u}{dt^2} + 0,003 u = 0$$

a rješenje jednadžbe: $u = 0,02 \cos(\frac{\pi}{6} t + \frac{\pi}{3})$.

$$\begin{aligned} \text{Brzina čestice u } t = 6 \text{ s: } v &= -0,01 \frac{\pi}{3} \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = \\ &= 9 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{sila } F = 3,3 \cdot 10^{-5} \text{ N, potencijalna energija } E_p = 1,65 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

1.1.13. Jednadžba gibanja za male kutove otklona θ :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

$$l = 1 \text{ m}, \quad g = 9,81 \text{ m s}^{-2}, \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 9,81 \theta = 0$$

Rješenje jednadžbe $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Kutna brzina $\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$

$$\theta_0 = \pi/40, \quad \varphi = 0, \quad \omega = 2\pi v = 2\pi/T = 3,08 \text{ s}^{-1}$$

Za kut $\theta = \frac{\pi}{80} \text{ rad}$ iz jednadžbe $\theta = \frac{\pi}{40} \cos 3,08 t$ slijedi

$$\frac{\pi}{80} = \frac{\pi}{40} \cos 3,08 t \quad \text{odnosno} \quad 3,08 t = \frac{\pi}{3} \quad \text{te je}$$

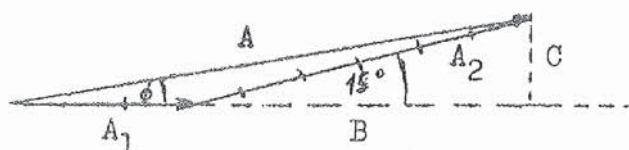
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\pi}{40} 3,08 \sin \frac{\pi}{3} = -0,21 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\text{Kutna akceleracija: } \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{\pi}{40} 3,08^2 \cos \frac{\pi}{3} = -0,37 \text{ rad s}^{-2}$$

Iz relacije $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ dobiva se za akceleraciju sile teže $g = 9,5 \text{ m s}^{-2}$.

$$1.1.14. T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{3} \frac{mL^2}{mgL}}{mgL}} = 4\pi\sqrt{\frac{L}{3g}} = 2,3 \text{ s}$$

1.1.15.



$$u_1 = 3 \sin(10t + \frac{\pi}{4})$$

$$u_2 = 6 \sin(10t + \frac{\pi}{3})$$

Rezultantna amplituda:

$$A^2 = (A_1 + B)^2 + C^2$$

$$A_1 = 3 \text{ cm},$$

$$B = A_2 \cos 15^\circ = 5,80 \text{ cm},$$

$$C = A_2 \sin 15^\circ = 1,55 \text{ cm}, \quad A^2 = (3 + 5,80)^2 + 1,55^2 = 79,24 \text{ cm}^2, \\ A = 8,93 \text{ cm}$$

$$\text{Fazni kut : } \tan \phi = \frac{C}{A_1 + B} = \frac{1,55}{(3 + 5,80)} = 0,176$$

$$\phi = 10^\circ = 0,17 \text{ rad}$$

Rezultantno gibanje: $u = 8,93 \sin(10t + 0,17) \text{ cm}$

1.1.16. Titranje je kvaziperiodički prigušeno: $\gamma^2 < 4k/m$

$$u(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(\omega t + \phi)$$

Proračun γ i ω :

$$F_{tr} = r v = m \gamma v$$

$$\gamma = r/m = 4 \cdot 10^{-2} \text{ kg s}^{-1} / 0,01 \text{ kg} = \\ = 4 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2} = \sqrt{k/m - (\gamma/2)^2} =$$
$$= 0,2 \text{ N m}^{-1}/10^{-2} \text{ kg} - 4 \text{ s}^{-2} = 4 \text{ s}^{-1}$$

Proračun ϕ iz elongacije i brzine

$$u \text{ t} = 0:$$

$$u_0 = A \cos \phi = 4 \text{ cm}$$

$$v_0 = -\frac{\gamma}{2} A \cos \phi - A \omega \sin \phi =$$
$$= 20 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\phi = -60^\circ 20' = -1,05 \text{ rad}$$

$$\text{Amplituda } A = 4 \text{ cm} / \cos 60^\circ 20' =$$
$$= 8,1 \text{ cm}$$

$$u(t) = 8,1 e^{-2t} \cos(4t - 1,05)$$

1.1.17. Kružna frekvencija ω_0 ako je prigušenje zanemarivo:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{20 \text{ N m}^{-1}/0,3 \text{ kg}} = 8,16 \text{ s}^{-1}$$

Gibanje će biti:

a) kvaziperiodički prigušeno za $\gamma < 2 \sqrt{k/m}$

$$\gamma < 2 \sqrt{20 \text{ N m}^{-1}/0,3 \text{ kg}} = 16,32 \text{ s}^{-1}$$

b) kritički prigušeno za $\gamma = 2 \sqrt{k/m} = 16,32 \text{ s}^{-1}$

c) aperiodično za $\gamma > 2 \sqrt{k/m} = 16,32 \text{ s}^{-1}$

$$\text{Početna energija: } E_0 = \frac{1}{2} k A^2$$

Energija kada se amplituda smanji na trećinu od svoje početne vrijednosti: $E = \frac{1}{2} k (A/3)^2$

$$E/E_0 = 1/9$$

1.1.18. $A = 0,1 \text{ m}$

1.1.19. $A = 2 \text{ cm}$, $T = 2,1 \text{ s}$, $v = 0,47 \text{ s}^{-1}$

Pravac širenja vala: $+x$

$\lambda = 2\pi/k = 15,7 \text{ cm}$, $v = \lambda v = 7,4 \text{ cm s}^{-1}$

1.1.20. $u = 20 \sin \frac{2\pi}{100} (x - 80 t) \text{ [cm]}$

1.1.21. a)

x	0	0,1	0,2	0,3.....	m
u	0	0,020	0,039	0,056....	m

b)

t	0	0,1	0,2	0,3.....	s
u	0,091	0,100	0,093	0,072....	m

c) Brzina titranja čestice žice: $\dot{u} = 0,4 \cos (2x-4t)$
Brzina širenja vala: $v = \lambda v = \omega/k = 2 \text{ m s}^{-1}$

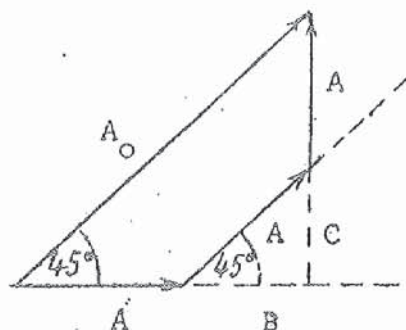
1.1.22. $v = 19,8 \text{ m s}^{-1}$, $v = 3/2\pi \text{ s}^{-1}$, $\lambda = 41,4 \text{ m}$

$u = 0,2 \sin (3t - 0,15 x)$

1.1.23. $u_1 = A \sin \omega t$, $u_2 = A \sin (\omega t + \frac{\pi}{4})$,

$u_3 = A \sin (\omega t + \frac{\pi}{2})$

Jednadžba rezultantnog vala: $u = A_0 \sin (\omega t + \emptyset)$



$A_0^2 = (A + B)^2 + (A + C)^2$

$B = A \cos 45^\circ = A \sqrt{2}/2$

$C = A \sin 45^\circ = A \sqrt{2}/2$

$A_0^2 = (A + A \sqrt{2}/2)^2 + (A + A \sqrt{2}/2)^2 = 5,8 A^2$

$$A_0 = 2,4 \text{ A}, \quad \varphi = \pi/4$$

$$u = 2,4 \text{ A} \sin (\omega t + \pi/4)$$

$$1.1.24. \quad v = \sqrt{E/\rho} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \quad \rho = \frac{m}{S l}$$

$$v = \sqrt{\frac{F l^2}{\Delta l m}} = 15,9 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

$$1.1.25. \quad P = 3,48 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

$$1.1.26. \quad A_r = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} A_u \quad A_t = \frac{2 v_2}{v_1 + v_2} A_u$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{m/L}} = \sqrt{\frac{F}{S \rho}}$$

v_1 - brzina vala u bakru

v_2 - brzina vala u željezu

$$A_r = - 0,06 \text{ cm}$$

$$\rho_1 = 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\rho_2 = 7,87 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

$$A_t = 2,06 \text{ cm}$$

$$u_u = 0,02 \sin 1,90 (x - 33,1 t)$$

$$u_r = 6 \cdot 10^{-4} \sin 1,90 (x + 33,1 t)$$

$$u_t = 2,06 \cdot 10^{-2} \sin 1,78 (x - 35,3 t)$$

veliĉine su u SI jedinicama

1.1.27. JednadŹbe komponentnih valova:

$$u_1 = 5 \cdot 10^{-3} \sin \left(\frac{\pi}{4} x - 30 \pi t \right)$$

$$u_2 = 5 \cdot 10^{-3} \sin \left(\frac{\pi}{4} x + 30 \pi t \right)$$

$$\text{JednadŹba stojnog vala: } u = 10^{-2} \sin \frac{\pi}{4} x \cos 30 \pi t$$

Veliĉine su dane u jedinicama internacionalnog sustava.

$$1.1.28. \quad a) \quad L = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



$$b) L = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



$$c) L = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



$$1.1.29. \quad v_n = \frac{n v}{2 L} = \frac{n}{2 L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho}} = \frac{n}{2 L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

$$v_1 = 114 \text{ s}^{-1}, \quad v_2 = 2 v_1, \quad v_3 = 3 v_1$$

$$1.1.30. \quad \lambda_0 = 4,40 \text{ m}, \quad \lambda_1 = 1,46 \text{ m}$$

$$1.1.31. \quad v' = \frac{v}{v+v_i} v = 614 \text{ s}^{-1}$$

$$1.1.32. \quad \Delta v' = v'_B - v'_A = \frac{v+v_d}{v+v_i} v - \frac{v-v_d}{v} v = 7 \text{ Hz}$$

$$1.1.33. \quad a) \text{ ispred vlaka: } v' = 702 \text{ s}^{-1} \\ \text{iza vlaka: } v' = 524 \text{ s}^{-1}$$

$$b) \text{ prije prolaza: } v' = 676 \text{ s}^{-1}, \text{ nakon prolaza: } v' = 498 \text{ s}^{-1}$$

$$c) \text{ ispred vlaka: } v' = 754 \text{ s}^{-1}, \text{ iza vlaka: } v' = 498 \text{ s}^{-1}$$

$$1.1.34. \quad v_1 = 170 \text{ m s}^{-1}$$

$$1.1.35. \quad n = v_A - v_B', \quad v_B' = \frac{v}{v+v_B} v_B = 972 \text{ s}^{-1}$$

$$n = 1000 - 972 = 28$$

1.1.36. Frekvencija zvuka koji registrira podmornica:

$$v' = \frac{v-v_p}{v} v$$

Frekvencija zvuka koji detektira detektor: $v'' = \frac{v}{v+v_p} v'$

$$\Delta v = v - v'' = \frac{2 v_p}{v+v_p} v$$

Brzina udaljavanja podmornice:

$$v_p = \frac{v}{2v/\Delta v - 1} = \frac{1450 \text{ m s}^{-1}}{1000/400 - 1} = 5,8 \text{ m s}^{-1}$$

1.2. ELEKTRIČNI TITRAJI I ELEKTROMAGNETSKI VALOVI

1.2.1. Ako je u trenutku $t=0$ naboj kondenzatora $q=Q_m$ tada je naboj u trenutku t :

$$q = Q_m \cos \sqrt{1/LC} t$$

$$q = 2,5 \cdot 10^{-6} \cos \sqrt{1/(5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,025 \cdot 10^{-6})} 30 \text{ As}$$

$$q = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

a jakost struje u krugu:

$$i = dq/dt = -Q_m \sqrt{1/LC} \sin \sqrt{1/LC} t$$

$$i = 0,13 \text{ A}$$

$$1.2.2. \omega = 43,6 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_0 = 44,7 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega/\omega_0 = 0,97, \quad R/2L = 10^4 \text{ s}^{-1}$$

$$1.2.4. q = Q_m \sin(\omega t + \phi)$$

Prema relacijama (1.43) i (1.44):

$$Q_m = 100 \sqrt{(560 \cdot 120\pi)^2 + (3 \cdot 120^2 \pi^2 10^{-3} - \frac{10^8}{11})^2}$$

$$Q_m = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ As}$$

$$\text{tg } \phi = \frac{360 \cdot 10^{-3} - \frac{10^8}{132\pi}}{560}$$

$$\phi = -89^\circ 52'$$

$$q = 1,09 \cdot 10^{-6} \text{ As}$$

1.2.6. Električna indukcija D iz Maxwellove jednačbe (1.52)

$$D = \int \text{rot } H \, dt + C = \int \sqrt{(\text{rot}_x H)^2 + (\text{rot}_y H)^2 + (\text{rot}_z H)^2} \, dt + C$$

$$D = 5,7 \text{ t } [A \text{ s m}^{-2}], \quad C = 0 \text{ prema početnim uvjetima}$$

Kosinusi smjera vektora D:

$$\cos \alpha = \text{rot}_x H / \text{rot } H = 0,56140$$

$$\cos \beta = \text{rot}_y H / \text{rot } H = 0,75439$$

$$\cos \gamma = \text{rot}_z H / \text{rot } H = 0,35088$$

1.2.7. Iz Maxwelllove jednačbe (1.51):

$$\text{rot } \vec{E} = - \partial \vec{B} / \partial t$$

$$B = \frac{\mu N}{l} i, \quad i = i_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right),$$

$$L = \frac{\mu N^2 \pi r^2}{l}$$

$$\text{rot } E = - \frac{\mu N V}{R l} \frac{d}{dt} (1 - e^{-a t})$$

$$a = \frac{R l}{N^2 \mu \pi r^2}$$

$$\text{rot } E = \frac{V}{N \pi r^2} e^{-a t}$$

1.2.8. $\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0,14 \text{ A}$

1.2.9. Iz Maxwelllove jednačbe (1.52) slijedi:

$$\text{rot } H = \frac{dD}{dt}$$

$$D = \frac{Q}{2r \pi l} = \frac{V C}{2r \pi l}$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$D = \frac{\epsilon_0 V}{r \ln(r_2/r_1)}$$

$$\text{rot } H = \frac{\epsilon_0}{r \ln(r_2/r_1)} \frac{dV}{dt} = \frac{\epsilon_0}{r \ln(r_2/r_1)} 10^4 \cdot 20\pi \cos 20\pi t$$

$$\text{rot } H = \frac{8,854 \cdot 10^{-12}}{0,08 \ln(12/3)} 10^4 20\pi \cos 20\pi \frac{1}{100} \quad [\text{A m}^{-2}]$$

$$\text{rot } H = 40,58 \cdot 10^{-6} \text{ A m}^{-2}$$

1.2.10. Iz Maxwellove jednačbe (1.47) slijedi:

$$\begin{aligned} \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} &= - \frac{d}{dt} \iint_A B_0 \frac{\sin 20\pi t}{e^r} dA = \\ &= B_0 20\pi \sin 20\pi t \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r} r dr = \\ &= 40\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} 0,0017 \text{ V} = 0,67 \text{ V} \end{aligned}$$

$$1.2.11. \Delta \vec{E} - 373,84 \cdot 10^{-19} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Veličine su izražene u internacionalnom sustavu}$$

$$n = 1,83$$

1.2.13. Iz relacije (1.54) slijedi:

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu} = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r} = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$\lambda = v/\nu = 0,03 \text{ m}$$

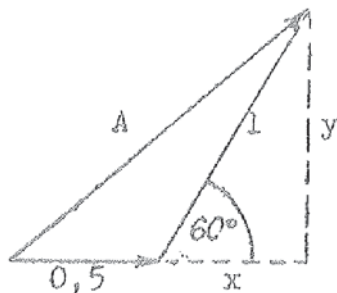
$$1.2.14. \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10^{14}}{2\pi} \text{ s}^{-1} = 0,5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}, T = \frac{1}{\nu} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3} \cdot 10^6} \text{ m} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ m}, H_{0y} = 300 \text{ A m}^{-1}$$

$$\text{Val se širi uzduž z osi, } v = \lambda\nu = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$1.2.15. n = \frac{c}{v} = 7,5 \quad \lambda_0 = n\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

1.2.16.



$$A^2 = (0,5 + x)^2 + y^2$$

$$x = 1 \cos 60^\circ$$

$$y = 1 \sin 60^\circ$$

$$A^2 = (1 + 3/4) \text{ V}^2 \text{ m}^{-2}$$

$$A = 1,32 \text{ V m}^{-1}$$

1.2.17. $E_2 = 3,6 \sin (\omega t + 2,16)$

1.2.18. Iz relacije (1.56) slijedi:

$$B = \sqrt{\mu \epsilon} E = 66,7 \cdot 10^{-14} \text{ T.}$$

1.2.19. $B_y = 10^{-6} \sin \pi (2 \cdot 10^7 z - 5 \cdot 10^{14} t)$, $B_x = 0$, $B_z = 0$

1.2.20. $E_y = E_z = 22,6 \sin 12 \pi \cdot 10^{14} (t - \frac{x}{3} 10^{-8})$, $E_x = 0$

$$B_z = -B_y = 7,5 \cdot 10^{-8} \sin 12 \pi \cdot 10^{14} (t - \frac{x}{3} 10^{-8})$$
, $B_x = 0$

1.2.21. Iz relacija (1.58) i (1.56) slijedi:

$$E^2 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} P = \sqrt{\frac{4 \pi \cdot 10^{-7}}{8,854 \cdot 10^{-12}}} 1,35 \cdot 10^3 \text{ V}^2 \text{ m}^{-2}$$

$$E = 0,71 \cdot 10^3 \text{ V m}^{-1}$$

prosječna vrijednost

$$B = \mu_0 H = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} E = 2,37 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

1.2.22. Ako radio-stanica odašilje snagu jednoliko u svim smjerovima jakost električnog poljana udaljenosti 30 km od stanice bit će:

$$E = 0,05 \text{ V m}^{-1}$$

prosječna vrijednost

1.2.23. Snaga koju prima jedinica površine detektora:

$$P_d = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_d^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{E_{od}^2}{2}$$

E_{od} - maksimalna jakost električnog polja na mjestu detektora

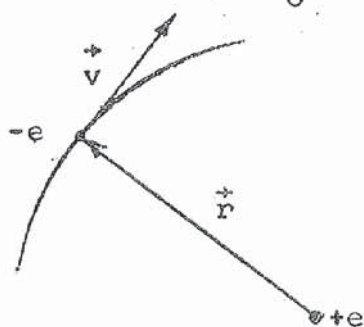
$$P_d = 3,32 \cdot 10^{-6} \text{ W m}^{-2}$$

Maksimalna jakost električnog polja na mjestu nastale emisije:

$$E_o = 600 \text{ V m}^{-1}$$

1.2.24. Ukupna energija koju izrači električni dipol u jedinici vremena:

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{1}{6 \pi \epsilon_0 c^3} \ddot{p}^2$$



Električni dipolni moment:

$$\vec{p} = -e \vec{r} \quad \text{te je}$$

$$\ddot{\vec{p}} = -e \ddot{\vec{v}}$$

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{e^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3} |\ddot{\vec{v}}|^2$$

1.2.25. $\frac{dW}{dt} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ W}$

1.2.26. $n = 1,58$

1.2.27. $\lambda = 4220,8 \text{ Å}$

1.2.28. $t = 17,8 \cdot 10^{-8} \text{ s}$

1.2.29. $R = 0,02$

1.2.30. Koeficijent refleksije i transmisije svjetlosti (relacije 1.64 i 1.65):

$$R = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2(u-l)}{\sin^2(u+l)} + \frac{\operatorname{tg}^2(u-l)}{\operatorname{tg}^2(u+l)} \right]$$

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{4 \sin^2 l \cos^2 u}{\sin^2(u+l)} + \frac{4 \sin^2 l \cos^2 u}{\sin^2(u+l) \cos^2(u-l)} \right]$$

Iz zakona loma (1.60) slijedi:

$$l = 29^{\circ}23'$$

$$R = 2,2\%$$

$$T = 65,6\%$$

1.2.31. a) Vektor električnog polja izvodi linearno titranje i nastaje linearno polariziran val.

b) Vektor električnog polja izvodi kružno titranje i nastali val je kružno polariziran.

1.2.32. Brewsterov zakon (1.66): $\operatorname{tg} u = n$

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{\sin l_g} = \frac{1}{\sin 48^{\circ}40'}$$

$$n = \frac{1}{\sin l_g}$$

$$u = 53^{\circ}6'$$

1.2.33. $R = 8,3\%$

1.2.34. Valne dužine redovne i izvanredne zrake iz zakona loma (1.60):

$$n_r = \frac{c}{v_r} = \frac{\lambda}{\lambda_r}; \lambda_r = \frac{5890}{1,66} \text{ Å} = 3548 \text{ Å}$$

$$n_i = \frac{c}{v_i} = \frac{\lambda}{\lambda_i}; \lambda_i = \frac{5890}{1,49} \text{ Å} = 3953 \text{ Å}$$

1.2.35. Prema Malusovu zakonu (1.67) intenzitet transmitiranog svjetla I iza analizatora:

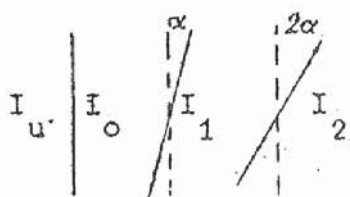
$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

Intenzitet svjetla nakon prolaza
kroz polarizator: $I_0 = 0,5 I_u$
 I_u je intenzitet upadne svjetlosti

$$I = \frac{1}{4} I_u = \frac{1}{2} I_u \cos^2 \alpha$$

$$\alpha = 45^\circ$$

1.2.36.



$$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha = 0,5 I_u \cos^2 \alpha$$

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = 0,5 I_u \cos^4 \alpha$$

$$I_2 = 0,5 I_u \cos^4 20^\circ$$

$$I_2/I_u = 0,39$$

1.2.37. $I_B/I_u = 0$

bez polarizatora C

$$I_B/I_u = 0,09$$

uz polarizator C

1.2.38.

- a) Kružna polarizacija u smjeru suprotnom od kazaljke na satu (lijeva) kada se promatra prema upadnom valu
- b) Linearna polarizacija uzduž pravca $y = -x$
- c) Eliptička polarizacija u smjeru kazaljke na satu (desna) kada se promatra prema upadnom valu. Glavna os elipse koincidira sa pravcem $y = x$

1.2.40. Iz relacije (1.69) za frekvencije $\nu \ll \nu_0$:

$$n \approx 1 + \frac{N e^2}{2 \epsilon_0 m \omega_0^2}$$

$$N = \rho \frac{N_0}{M} \quad ; \quad \omega_0 = 2 \pi \nu_0$$

$$n \approx 1 + \frac{\rho N_0 e^2}{8 \epsilon_0 \pi^2 M m \nu_0^2}$$

$$n \approx 1 + \frac{1,3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{8,854 \cdot 10^{-12} \pi^2 28,8 \cdot 10^{-3} 9,1 \cdot 10^{-31} (1,6 \cdot 10^{15})^2}$$

$$n \approx 1,0004$$

$$1.2.41. \quad n \approx 1 - 0,1 \cdot 10^{-13} \approx 1$$

1.2.42. Brzina širenja harmonijskog elektromagnetskog vala u homogenom sloju ionosfere iz relacija (1.61) i (1.68):

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{N e^2}{\epsilon_0 m \omega^2}}}$$

$$v = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{1 - \frac{10^{12} (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} (8 \cdot 10^7)^2}}} \text{ m s}^{-1}$$

$$v = 4,2 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{fazna brzina})$$

$$1.2.43. \quad x = \frac{1}{2} (L - n \lambda) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

1.2.44. Relacija (1.70') za male kuteve θ (crtež 1.4):

$$d \operatorname{tg} \theta = m \lambda$$

$$\text{Valna dužina } \lambda = \frac{1}{m} d \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{m} d \frac{b}{a}$$

$$\lambda = \frac{1}{4} 0,15 \frac{1,1}{75} \text{ mm} = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ mm} = 5500 \text{ \AA}$$

$$1.2.45. d = 0,11 \text{ mm}$$

$$1.2.46. b_1 = 0,124 \text{ cm} \quad b_2 = 0,248 \text{ cm}$$

1.2.47. Iz relacije (1.70'):

$$d = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{c}{v \sin \theta} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^9 \cdot \sin 45^\circ} \text{ cm} = 0,14 \text{ cm}$$

1.2.48. Prema relaciji (1.70'):

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} = m \cdot 0,3 \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\theta = 0, \quad 17^\circ 17', \quad 36^\circ 52', \quad 64^\circ 9', \dots$$

$$1.2.49. I = I_0 \frac{\sin^2 (3\phi/2)}{\sin^2 (\phi/2)}$$

1.2.50. Iz relacije (1.77) širina pukotine a :

$$a = \frac{\lambda}{\sin \theta} = 8720 \text{ \AA}$$

$$1.2.51. \theta_2 = 40^\circ \quad I/I_0 = 0,045$$

1.2.52. Iz relacije (1.79) slijedi: $\sin \theta = \lambda/d = 0,5460$

$$\theta = 33^{\circ}6'$$

1.2.53. $n = 2554$

1.2.54. Iz relacije (1.79) slijedi:

a) za $m = 1$ $\sin \theta = \lambda/d$

$$\text{za } \lambda_1 = 4358 \text{ \AA} \quad \theta_1 = 10^{\circ}2'$$

$$\text{za } \lambda_2 = 5461 \text{ \AA} \quad \theta_2 = 12^{\circ}37'$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 2^{\circ}35'$$

b) za $m = 2$

$$\Delta\theta = 5^{\circ}30'$$

1.2.55. $I_1/I_2 = 2$

1.2.56. Prvi ogibni (relacija 1.77):

$$\sin \theta_1 = \lambda/a$$

Deseta svijetla pruga interferencije (relacija 1.70):

$$\sin \theta_{10} = 10 \lambda/d$$

Da bi prvi ogibni minimum bio dalji od desete svijetle pruge interferencije:

$$\sin \theta_1 > \sin \theta_{10}$$

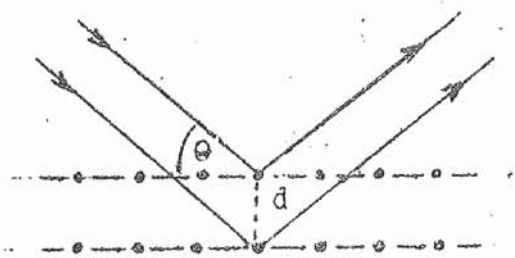
$$\frac{1}{a} > \frac{10}{d} \quad \text{ili} \quad a < d/10$$

$$a < 0,2 \text{ mm}$$

1.2.57. $\sin \theta = m \cdot 0,1$; $m = 1, 2, 3, \dots$

$\theta = 5^{\circ}44', 11^{\circ}32', 17^{\circ}27', \dots$

1.2.58. Iz relacije (1.70): $\delta = 2d \sin \theta = m\lambda$ slijedi za najmanji kut θ : $\sin \theta = \lambda/2d$



Razmak izmedju dviju susjednih ravnina kristala d :

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{2\rho N_0}}$$

ρ - gustoća kristala

M - molarna masa

N_0 - Avogadrov broj

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2} \sqrt[3]{\frac{2\rho N_0}{M}}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} 0,28 \cdot 10^{-10} \text{ m} \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1,98 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{74,55 \cdot 10^{-3}} \text{ m}^{-3}}$$

$\theta = 2^{\circ} 33'$

1.2.59. $N_0 = 6,14 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

2. TOPLINA

2.1. TOPLINA I TEMPERATURA

2.1.1. Iz relacije (2.1) za $t = 357^{\circ}\text{C}$ slijedi:

$$t^{\circ}\text{F} = 1,80 t^{\circ}\text{C} + 32 = 674,6^{\circ}\text{F}$$

$$T \text{ K} = t^{\circ}\text{C} + 273,15 = 630,15 \text{ K}$$

2.1.2. $l_0 = 19,995 \text{ m}$

2.1.3. Ako se pretpostavi da njihalica izvodi harmonijsko titranje, vrijeme jednog titraja pri temperaturi od 0°C iznosi:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}$$

l - duljina njihalice

g - akceleracija sile teže

a pri temperaturi od 30°C prema relaciji (2.2):

$$T_{30} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{30}}{g}} = T_0 \sqrt{1 + \beta \Delta t}$$

Razlika vremena titraja:

$$\Delta T = T_{30} - T_0 = T_0 (\sqrt{1 + \beta \Delta t} - 1)$$

Korekcija za 30 dana:

$$\Delta t = 30 \cdot 86400 \text{ s} \quad \Delta T = 259,2 \cdot 10^4 (\sqrt{1 + 19 \cdot 10^{-6} \cdot 30} - 1) \text{ s}$$

$$\Delta t = 738,5 \text{ s} = 12,3 \text{ min}$$

2.1.4. $S_{60} = 78,8 \text{ cm}^2$

2.1.5. Volumen benzina koji će isteći iz spremišta ako temperatura poraste do 300 K (relacija 2.2):

$$\Delta V = V_b - V_z = V \cdot \Delta T (\alpha_b - \alpha_z)$$

$$\Delta V = 352,27 \text{ K} (950 - 36) 10^{-6} \text{ K}^{-1} = 0,86 \text{ l}$$

2.1.6. $\Delta \rho = -78 \text{ kg m}^{-3}$

2.1.7. a) Tlak plina iz Boyle-Mariotteova zakona (relacija 2.5):

$$p_t = p_o V_o / V_t = 10^5 \frac{1}{2} \text{ Pa} = 5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

b) Promjena volumena plina iz Gay-Lussacova zakona (2.3):

$$\Delta V = V_t - V_o = V_o \alpha (T - T_o) = 2 \cdot \frac{1}{273} 127 \text{ m}^3 = 0,93 \text{ m}^3$$

c) Promjena tlaka plina iz (2.4):

$$\Delta p = p_t - p_o = p_o \alpha (T - T_o) = -10^5 \frac{1}{273} 73 \text{ Pa} = -0,267 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Procesi b i c primjenjeni su na početno stanje plina.

2.1.8. Iz jednadžbe plina (2.6) slijedi:

$$m = \frac{M p V}{R T} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} \cdot 20 \text{ N m}^{-2} \cdot 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{8,3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 288 \text{ K}} = 1,67 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

2.1.9. Uz pretpostavku da je moguće primijeniti jednadžbu stanja idealnog plina (2.6) na ovaj slučaj, dobiva se:

$$\text{za početno stanje } p_1 V = \frac{m_1}{M} R T_1 \quad (1)$$

$$\text{za konačno stanje } p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2 \quad (2)$$

Dijeljenjem jednadžbi (1) i (2) dobiva se za masu kisika m_2 :

$$m_2 = m_1 \frac{T_1}{T_2} \frac{p_2}{p_1}$$

$$\text{a za isteklu masu: } \Delta m = m_1 - m_2 = m_1 \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{p_2}{p_1} \right)$$

$$\Delta m = 1 \text{ g} \cdot \left(1 - \frac{47+273}{27+273} \cdot \frac{5}{8} \right) = \frac{1}{3} \text{ g}$$

$$2.1.10. \quad p = 514,74 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

$$2.1.11. \quad T_2 = 732,5 \text{ K}$$

$$2.1.12. \quad p = 18,7 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$$

$$2.1.13. \quad N_{\text{Ne}} = 3,2 \cdot 10^{20}$$

2.1.14. Volumen dušika prije širenja:

$$V_1 = \frac{m}{M} \frac{R}{p} T_1 = \frac{10^{-2} \text{ kg} \cdot 8,3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 283 \text{ K}}{28 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}}$$

$$V_1 = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Temperatura poslije širenja plina:

$$T_2 = \frac{M}{m} \frac{p}{R} V_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = \frac{10}{2,8} \cdot 283 \text{ K} = 1010,7 \text{ K}$$

Omjer gustoća plina prije i poslije širenja:

$$\rho_1 / \rho_2 = (m/V_1) / (m/V_2) = T_2 / T_1 = 1010,7 / 283 = 3,6$$

2.1.15. Tražena količina topline (relacija 2.7):

$$\begin{aligned} Q &= m c (t_2 - t_1) = 8 \text{ kg} \cdot 473,11 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 1515 \text{ K} = \\ &= 573,4 \cdot 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

2.1.16. Odnos toplinskih kapaciteta jednakih masa bakra i aluminijske:

$$C_{\text{Cu}} / C_{\text{Al}} = c_{\text{Cu}} / c_{\text{Al}} = 389,37 / 908,54 = 0,428$$

Odnos toplinskih kapaciteta jednakih volumena bakra i aluminijske:

$$C_{\text{Cu}} / C_{\text{Al}} = (\rho_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}}) / (\rho_{\text{Al}} c_{\text{Al}}) = \frac{8,96}{2,70} \cdot 0,428 = 1,420$$

2.1.17. Molarna specifična toplina za magnezij (relacija 2.8):

$$\begin{aligned} C = M c &= 24,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} \cdot 1046,7 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = \\ &= 25,4 \text{ J mol}^{-1} \end{aligned}$$

2.1.18. Porast temperature Δt vode mase m_v prema relaciji (2.7):

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{Q}{m_v \bar{c}_v}$$

Ako se gubici topline na okolinu mogu zanemariti, nastala količina topline Q bit će jednaka potencijalnoj energiji tijela mase m na visini h :

$$\Delta t = \frac{m g h}{m_v \bar{c}_v} = \frac{7 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 40 \text{ m}}{0,6 \text{ kg} \cdot 4186 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}} = 1,1 \text{ K}$$

$$2.1.19. c = 1,9 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

2.1.20. Uz pretpostavku da se toplina ne gubi na okolinu količina topline koju izgubi platina jednaka je količini topline koju dobije voda i posuda od aluminijske:

$$m_p c_p (t_2 - t) = (m_a c_a + m_v c_v) (t - t_1)$$

$$t_2 = t + \frac{m_a c_a + m_v c_v}{m_p c_p} (t - t_1)$$

$t_1 = 20^\circ \text{C}$	$m_p = 0,1 \text{ kg}$	$c_p = 133,98 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$t = 25^\circ \text{C}$	$m_a = 0,5 \text{ kg}$	$c_a = 908,54 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
	$m_v = 0,6 \text{ kg}$	$c_v = 4186,80 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

$$t_2 = 1132^\circ \text{C}$$

$$2.1.21. m_1 = 56,6 \text{ g}$$

2.1.22. $c = 395,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

2.1.23. Tražena količina topline Q je jednaka:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

Q_1 -količina topline utrošena za zagrijavanje leda od -20°C do leđišta

Q_2 -količina topline utrošena na taljenje leda

Q_3 -količina topline utrošena za zagrijavanje vode od 0°C do 100°C

Q_4 -količina topline utrošena za isparavanje vode

L_t -toplina taljenja leda

L_i -toplina isparavanja vode

$$Q_1 = m_l c_l \Delta t = 0,2 \cdot 2093,4 \cdot 20 \text{ J} = 8,37 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$Q_2 = m_l L_t = 0,2 \cdot 33,37 \cdot 10^4 \text{ J} = 66,74 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$Q_3 = m_v c_v \Delta t = 0,2 \cdot 4186,8 \cdot 100 \text{ J} = 83,74 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$Q_4 = m_v L_i = 0,2 \cdot 22,57 \cdot 10^5 \text{ J} = 451,40 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$Q = 610,25 \cdot 10^3 \text{ J}$$

2.1.24. $t = 289 \text{ K}$

2.1.25. Ako nema gubitaka topline, oslobođena količina topline Q_1 pri kondenzaciji vodene pare mase m_p i hlađenju nastale vode (mase m_p) jednaka je količini topline Q_2 utrošene na zagrijavanje vode mase m_v i kalorimetra mase m_k te za taljenje leda mase m_l i zagrijavanje nastale vode (mase m_l):

$$Q_1 = Q_2$$

$$m_p L_i + m_p c_v (t_p - t) = m_\ell L_t + (m_v c_v + m_b c_b + m_\ell c_v) (t - t_\ell)$$

$$m_v = 0,2 - m_\ell$$

t_t - temperatura vodene pare

t_ℓ - temperatura smjese vode i leda

t - ravnotežna temperatura

$$m_\ell = \frac{1}{L_t} [m_p L_i + m_p c_v (t_p - t) - (0,2 c_v + m_b c_b) (t - t_\ell)]$$

$$m_\ell = \frac{1}{33,37 \cdot 10^4} [0,03 \cdot 22,58 \cdot 10^5 + 0,03 \cdot 4186,8 \cdot 50 - (0,2 \cdot 4186,8 + 0,15 \cdot 389,37) 50] \text{ kg}$$

$$m_\ell = 87,6 \text{ g}$$

$$2.1.26. \quad m = 14,6 \text{ g}$$

2.1.28. Temperaturni gradijent duž šipke:

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{100^\circ \text{C}}{10 \text{ cm}} = 10 \text{ (}^\circ \text{C)} \text{ cm}^{-1}$$

Temperatura u točki štapa udaljenoj 2 cm od kraja uronjenog u vodu i led je 20°C .

Količina leda koja se rastali može se izračunati iz relacije:

$$k S \frac{T_2 - T_1}{\ell} \Delta t = m L_t$$

ℓ - duljina štapa

m - masa leda

L_t - toplina taljenja leda

$$m = \frac{k S \Delta t}{L_t} \frac{\Delta T}{\ell}$$

$$m = \frac{58,62 \text{ J m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 2400 \text{ s}}{33,37 \cdot 10^4 \text{ J kg}^{-1}} \cdot 10^3 \text{ K m}^{-1}$$

$$m = 42,16 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

U zadatku je pretpostavljeno da je temperaturni gradijent duž štapa konstantan.

$$2.1.29. T = 329,8 \text{ K}$$

$$2.1.30. \Delta Q / \Delta t = 5028 \text{ J s}^{-1}$$

2.1.31. Kroz kuglastu ljusku debljine dr prolazi za vrijeme Δt količina topline ΔQ prema relaciji (2.9):

$$\Delta Q = k \cdot 4 \pi r^2 \frac{dT}{dr} \Delta t$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = 4 \pi k \int_1^2 dT$$

Količina topline ΔQ koja prodje kroz kuglastu ljusku debljine 1 cm bit će:

$$\Delta Q = 4 \pi k \Delta t \frac{(T_2 - T_1)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

$$k = 0,08 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\Delta t = 2 \text{ h} = 7200 \text{ s}$$

$$r_1 = 10 \text{ cm}, \quad r_2 = 11 \text{ cm}$$

$$T_1 = -10^\circ \text{C}, \quad T_2 = 20^\circ \text{C}$$

$$\Delta Q = 238,7 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$2.1.32. \Delta Q / \Delta t = 56,8 \text{ J s}^{-1}$$

2.1.33. Prema relaciji (2.10):

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = h S \Delta T = 4,187 \left(\frac{\Delta T}{2r} \right)^{1/4} 2 r \pi \Delta T$$

$$\Delta Q = 4,187 \left(\frac{76}{0,14} \right)^{1/4} 0,14 \pi \cdot 3,8 \cdot 76 \cdot 7200 \text{ J} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ J}$$

2.2. KINETIČKO MOLEKULARNA TEORIJA TOPLINE

2.2.1. Broj molekula u jedinici volumena plina iz jednačbe plina (2.6.):

$$\frac{N}{V} = \frac{P}{R T} N_0 = \frac{P}{k T} = \frac{10^{-10} \cdot 133,3 \text{ N m}^{-2}}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}$$

$$\frac{N}{V} = 3 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$$

2.2.2. Srednja vrijednost kinetičke energije translacije molekule idealnog plina:

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} k T = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \cdot 300 \text{ K} = 621 \cdot 10^{-23} \text{ J}$$

Ukupna kinetička energija translacijskog gibanja jednog mola plina:

$$(\bar{E}_k)_t = N_0 \frac{3}{2} k T = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 621 \cdot 10^{-23} \text{ J} = 3,7 \text{ kJ}$$

$$2.2.3. \bar{E}_k = 2,5 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$2.2.4. T = 78,84 \cdot 10^3 \text{ K}$$

2.2.5. Iz relacije (2.13) slijedi:

$$U = \frac{5}{2} n R T = \frac{5}{2} \cdot 1 \text{ mol} \cdot 8,3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 298 \text{ K} = 6183,5 \text{ J}$$

2.2.6. Prosječna brzina molekule plina:

$$\bar{v} = \left(\frac{8 k T}{\pi m} \right)^{1/2}$$

Najvjerojatnija brzina:

$$v_m = \sqrt{2kT/m}$$

Srednja kvadratična brzina molekule:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3kT/m}$$

2.2.7. Koristeći relacije iz zadatka 2.2.6. dobiva se:

$$\begin{aligned}\sqrt{\overline{v^2}} &= 1,91 \text{ km s}^{-1}, \quad \tilde{v} = 1,76 \text{ km s}^{-1}, \\ v_m &= 1,56 \text{ km s}^{-1}\end{aligned}$$

$$2.2.8. E_k = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m \frac{2kT}{m} = kT = 414 \cdot 10^{-23} \text{ J}$$

$$2.2.9. \Delta N/N = 0,02\%$$

2.2.10. Primjenjujući Maxwellovu raspodjelu molekula po brzinama (2.14), dobiva se:

$$\frac{\Delta N}{\Delta v} = 4 N \pi^{1/2} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

odnosno:

$$\Delta N_1/\Delta N_2 = (v_1/v_2)^2 e^{M(v_2^2 - v_1^2)/2RT}$$

$$\Delta N_1/\Delta N_2 = (300/800)^2 e^{32 \cdot 10^{-3} (800^2 - 300^2)/2 \cdot 8,3 \cdot 300}$$

$$\Delta N_1/\Delta N_2 = 4,8$$

$$2.2.11. (dN/dE)_1/(dN/dE)_2 = 0,097$$

$$2.2.12. a) n_2/n_1 = e^{-\frac{mg}{RT} N_O (h_2 - h_1)}$$

$$b) n_2/n_1 = e^{-\frac{mg(\rho - \rho')}{\rho RT} N_O (h_2 - h_1)}$$

2.2.13. Iz relacije (b) zadatka 2.2.12. slijedi:

$$N_O = \frac{\rho RT \ln(n_1/n_2)}{mg(\rho - \rho')(h_2 - h_1)}$$

$$N_O = \frac{1,194 \cdot 10^3 \cdot 8,3 \cdot 293 \cdot \ln(49/14)}{1,194 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} (0,212 \cdot 10^{-6})^3 \pi \cdot 9,81 \cdot 0,194 \cdot 10^3 \cdot 6,10^{-5}} \text{ mol}^{-1}$$

$$N_O = 6,68 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

2.2.14.

$$P_2/P_1 = e^{-mg N_O (h_2 - h_1)/RT}$$

jedi:

$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{P_O}{P_h}$$

$$h = \frac{8,3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}} \ln \frac{100}{80} = 1788,5 \text{ m}$$

$$2.2.16. V_h = 0,047 \text{ m}^3$$

2.2.17. Normalni su uvjeti:

$$p = 760 \text{ mm Hg} = 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$$

$$t = 0^\circ\text{C} \text{ odnosno } T = 273 \text{ K}$$

Srednji slobodni put molekule plina (relacija 2.16):

$$\bar{s} = \frac{1}{\sqrt{2} (2r)^2 \pi n}$$

t.

Broj molekula plina u jedinici volumena:

$$n = N/V = p/kT$$

$$\bar{s} = \frac{k T}{\sqrt{2} (2r)^2 \pi p} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{\sqrt{2} (3 \cdot 10^{-10})^2 \pi \cdot 1,013 \cdot 10^5} \text{ m} = 9,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

$$2.2.18. \bar{n} = 4 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

$$2.2.19. p \leq 0,49 \text{ N m}^{-2}$$

2.2.20. Iz van der Waalsove jednačbe stanja plina (2.17) slijedi:

$$T = \frac{1}{n R} \left(p + a \frac{n^2}{V^2} \right) (V - n b)$$

Uvrštavanjem podataka danih u zadatku dobiva se za temperaturu plina vrijednost:

$$T = 1174,3 \text{ K}$$

Kad bi plin bio idealan, za temperaturu bi se dobila vrijednost (iz jednačbe stanja plina 2.6):

$$T = \frac{p V}{n R} = 1204,8 \text{ K}$$

2.2.21. Vrijednost konstanti a i b iz relacija (2.18):

$$b = \frac{V_c}{3} = \frac{T_c R}{8 p_c} = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$$

$$a = 3V_c^2 p_c = 27 b^2 p_c = 0,14 \text{ J m}^3 \text{ mol}^{-1}$$

2.2.22. $\delta = 0,12\%$

2.3. TERMODINAMIKA

2.3.1. Promjena unutarnje energije plina (relacija 2.19):

$$\Delta U = \Delta Q - p \Delta V.$$

Količina topline (relacija 2.7):

$$\Delta Q = m c_p \Delta T.$$

Iz jednačbe stanja plina (2.6):

$$m \Delta T = M p \Delta V / R$$

Specifična toplina uz konstantni tlak za dvoatomni plin (2.8):

$$c_p = C_p / M = 7R / 2M$$

$$\Delta Q = \frac{7}{2} p \Delta V$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} p \Delta V = \frac{5}{2} 10^5 \text{ N m}^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 750 \text{ J}$$

2.3.2. $\boxed{P_1 \quad V_1 \quad T_1} \xrightarrow{\text{izov.}} \boxed{P_2 \quad V_1 \quad T_2} \xrightarrow{\text{izob.}} \boxed{P_2 \quad V_2 \quad T_3}$

$$m c_v (T_2 - T_1) = m c_p (T_3 - T_2) \text{ ili uz } c = C/M$$

$$C_v (T_2 - T_1) = C_p (T_3 - T_2) \text{ a odatle } T_3 = \frac{C_v}{C_p} (T_2 - T_1) + T_2$$

$$T_3 = \frac{3}{5} 100 \text{ K} + 400 \text{ K} = 460 \text{ K}$$

2.3.3. Iz relacija (2.20) i (2.22) slijedi:
za jednoatomne plinove $\gamma = 5/3$ a za dvoatomne $\gamma = 7/5$.

2.3.4. Iz relacija (2.8), (2.20) i (2.22) slijedi:

$$c_v = 5R/2M = 648,4 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$c_p = 7R/2M = 907,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

2.3.5. $\rho = 1,26 \text{ kg m}^{-3}$

2.3.6. $Q = 16,6 \cdot 10^3 \text{ J}$

2.3.7. $Q = 3,1 \cdot 10^4 \text{ J}$

2.3.8.

$\boxed{P_1 \quad V_1 \quad T_1} \xrightarrow{\text{adij.}} \boxed{P_2 \quad V_2 \quad T_2} \xrightarrow{\text{izot.}} \boxed{P_3 \quad V_3 \quad T_2}$

$$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} = \Delta U_{12} = \Delta Q_{12} - \Delta W_{12} = -n \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_2)$$

$$\Delta U = -n \frac{R}{\gamma-1} T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

Iz jednađbi: $p_1 V_1 = n R T_1$

$$p_2 V_2 = n R T_2$$

slijedi: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{V_2}{V_1} \quad (1)$

a iz $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \longrightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma \quad (2)$

Relacija (1) uz (2) daje za omjer temperatura:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Delta U = - n \frac{R}{\gamma-1} T_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$$

$$\Delta U = - 5 \text{ mol} \frac{8,3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}}{0,4} 300 \text{ K} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{0,4}\right] = -13,26 \cdot 10^3 \text{ J}$$

2.3.9. Promjena unutarnje energije za adijabatski proces:

$$\Delta U = - \Delta W$$

Rad za adijabatski proces (2.25):

$$W = \frac{n}{\gamma-1} \frac{R}{M} T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

Primjena jednađbe (2.6) na stanje plina 1 i 2 daje:

$$T_2/T_1 = p_2 V_2 / p_1 V_1$$

a jednađbe $p V^\gamma = \text{konst}$:

$$V_2/V_1 = (p_1/p_2)^{1/\gamma}$$

te je:

$$T_2/T_1 = (p_2/p_1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\Delta U = - \frac{m}{M} \frac{R}{\gamma-1} T_1 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

$$\Delta U = - \frac{6}{34 \cdot 10^{-3}} \frac{8,3}{0,3} 300 (1 - 2^{0,23}) \text{ J} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Odnos broja molekula plina (relacija 2.14):

$$N_1/N_2 = (T_2/T_1)^{3/2} e^{-x}$$

$$x = \frac{Mv^2}{2RT_1} \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right)$$

$$x = \frac{34 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4}{2 \cdot 8,3 \cdot 300} (1 - 2^{-0,23}) = 0,01$$

$$N_1/N_2 = (352/300)^{3/2} e^{-0,01} = 1,26$$

$$2.3.10. T_2 = 350 \text{ K}$$

$$2.3.11. a) W_{abc} = 50,2 \text{ J},$$

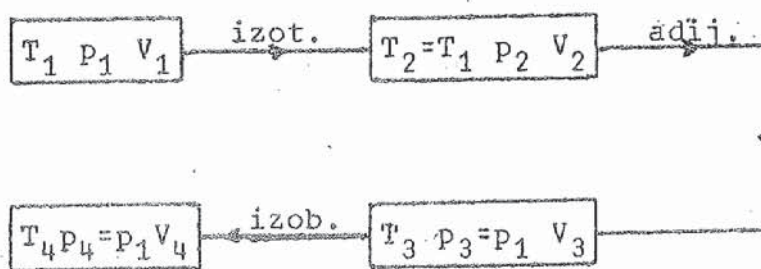
$$b) Q_{ca} = -188,4 \text{ J}$$

$$c) U_c = 343,3 \text{ J},$$

$$d) Q_{bc} = 259,6 \text{ J},$$

$$Q_{ab} = -83,7 \text{ J}$$

2.3.12.



$$m = 1 \text{ kg}$$

$$P_1 = 10^4 \text{ N m}^{-2}$$

$$M = 28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$$

$$P_1/P_2 = 3$$

$$T_1 = 500 \text{ K}$$

$$\gamma = 1,4$$

$$V_4 = 14,4 \text{ m}^3$$

Izvršeni rad u ovom procesu:

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{34}$$

Izotermni proces:

$$W_{12} = n R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (1.23)$$

Iz jednađbe plina (2.6) primijene na stanja 1 i 2:

$$V_2/V_1 = p_1/p_2$$

$$W_{12} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$W_{12} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 8,3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 500 \text{ K} \ln 3}{28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} = 1,6 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Adijabatski proces:

$$W_{23} = \frac{n R}{\gamma - 1} (T_2 - T_3) \quad (2.25)$$

$$W_{23} = \frac{n R}{\gamma - 1} T_1 \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right)$$

Temperatura T_3 iz jednađbe (2.6):

$$T_3 = p_3 V_3 / nR = p_1 V_3 / nR \quad (1)$$

Volumen V_3 iz relacije: $p \cdot V^\gamma = \text{konst}$ primijenjene na stanja 2 i 3:

$$V_3 = V_2 (p_2/p_3)^{1/\gamma} = V_2 (p_2/p_1)^{1/\gamma} \quad (2)$$

Volumen V_2 iz relacije (2.6):

$$V_2 = nRT_2/p_2 = nRT_1/p_2 \quad (3)$$

Iz relacija (1), (2) i (3) slijedi:

$$\frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$W_{23} = \frac{m R T_1}{M(\gamma-1)} \left[1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

$$W_{23} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 8,3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 500 \text{ K}}{28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} \cdot 0,4} (1 - 3^{2/7})$$

$$W_{23} = - 1,33 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Izobarni proces:

$$W_{34} = P_3 (V_4 - V_3) \quad (2.23)$$

$$W_{34} = P_1 (V_4 - V_3)$$

Volumen V_3 iz jednadžbi (2) i (3):

$$V_3 = \frac{nRT_1}{P_2} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} = 3 \frac{m}{M} \frac{RT_1}{P_1} \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-1/\gamma}$$

$$W_{34} = P_1 V_4 - 3 \frac{m}{M} RT_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-1/\gamma}$$

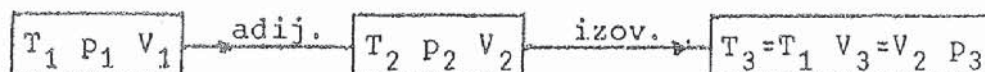
$$W_{34} = 10^4 \cdot 14,4 \text{ J} - 3 \frac{1 \cdot 8,3 \cdot 500}{28,8 \cdot 10^{-3}} (3)^{-1/1,4} \text{ J}$$

$$W_{34} = - 5,6 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\text{Ukupni rad } W = - 29 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$2.3.13. \quad V_3 = 1,06 \text{ m}^3, \quad P_3 = 2,3 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}, \quad T_3 = 328,6 \text{ K}$$

2.3.14.



Tlak p_2 iz relacije $p V^\gamma = \text{konst.}$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma$$

$$V_2 = V_3 = n R T_3 / p_3 = n R T_1 / p_3$$

$$T_1 = p_1 V_1 / n R$$

$$\gamma = 1,4 \text{ za dvoatomni plin}$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^\gamma$$

$$p_2 = 1 \text{ atm} \cdot 20^{1,4} = 66,29 \text{ atm}$$

Rad utrošen pri adijabatskoj kompresiji (2.25):

$$W_{12} = \frac{n R T_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2 V_2}{p_3 V_3} = \frac{p_2}{p_3}$$

$$n R T_1 = p_1 V_1$$

$$W_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{p_2}{p_3} \right)$$

$$W_{12} = \frac{76 \cdot 133,3 \text{ N m}^{-2} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{0,4} \left(1 - \frac{66,29}{20} \right) = -5862 \text{ J}$$

Količina topline predana okolini za vrijeme hlađenja (relacije 2.7, 2.8, 2.22, 2.25 i 2.26):

$$Q_{23} = m c_V \Delta T = m \frac{C_V}{M} (T_3 - T_2) = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = W_{12}$$

$$Q_{23} = -5862 \text{ J}$$

$$2.3.15. \quad W = 16,25 \text{ kJ}, \quad T_2 = 303 \text{ K}$$

2.3.16. Tlak p_3 iz jednadžbe (2.6):

$$p_3 = p_1 \frac{T_3}{T_1} = 10^5 \text{ Pa} \frac{400}{300} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Izobarni proces (relacije 2.13, 2.19 i 2.23):

$$U_{12} = \frac{3}{2} n R (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \cdot 1,8,3 \cdot (580 - 300) \text{ J} = 3486 \text{ J}$$

$$W_{12} = p_1 (V_2 - V_1) = n R (T_2 - T_1) = 1,8,3 (580 - 300) \text{ J} = 2324 \text{ J}$$

$$Q_{12} = U_{12} + W_{12} = 5810 \text{ J}$$

Adijabatski proces (relacije 2.13 i 2.19):

$$Q_{23} = 0$$

$$U_{23} = \frac{3}{2} n R (T_3 - T_2) = \frac{3}{2} \cdot 1,8,3 \cdot (400 - 580) \text{ J} = -2241 \text{ J}$$

$$W_{23} = -U_{23} = 2241 \text{ J}$$

Izovolumni proces (relacije 2.13 i 2.19):

$$W_{31} = 0$$

$$U_{31} = \frac{3}{2} n R (T_1 - T_3) = \frac{3}{2} \cdot 1,8,3 \cdot (300 - 400) \text{ J} = -1245 \text{ J}$$

$$Q_{31} = U_{31} = -1245 \text{ J}$$

Promjena unutarnje energije, topline i izvršeni rad za cijeli ciklus:

$$\Delta U = 0, \quad \Delta Q = 4565 \text{ J}, \quad \Delta W = 4565 \text{ J}$$

2.3.17. a) B(2,7 at, 52), C(1,45 at, 82), D(3,6 at, 3,22)

$$b) W_{AB} = 1258,4 \text{ J}, W_{BC} = -W_{DA} = 588,6 \text{ J}, W_{CD} = -1042,7 \text{ J}$$

$$c) W = 215,7 \text{ J}, \eta = 17,1\%$$

2.3.18. Prema relaciji (2.27) koeficijent iskorištenja Carnotova stroja: $\eta = 1 - T_2/T_1 = 0,6$

a toplina predana spremištu niže temperature:

$$Q_2 = Q_1 T_2/T_1 = 1,6 \cdot 10^3 \text{ J}$$

2.3.19. Efikasnost u slučaju Carnotova stroja (relacija 2.27)

$$\eta = 1 - T_2/T_1 = 1 - 333/543 = 0,387 = 38,7\%$$

2.3.20. Količina topline predana hladnijem rezervoaru:

$$Q_2 = 3070,3 \text{ J}$$

Dobiveni rad u kružnom procesu: $W = 1116,5 \text{ J}$

Koeficijent iskorištenja stroja: $\eta = 27\%$

Rad utrošen za apsorpciju topline iz hladnijeg rezervoara:

$$W = -3045 \text{ J}$$

2.3.21. $Q = 4,2 \cdot 10^9 \text{ J}$, II. zakon termodinamike

2.3.22. Tražena promjena entropije:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 + \Delta S_5$$

ΔS_1 - promjena entropije pri zagrijavanju leda (relacije 2.28 i 2.7):

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m c_l dT}{T} = m c_l \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S_1 = 1 \text{ kg} \cdot 2302,74 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \ln \frac{273}{248} = 221,16 \text{ J K}^{-1}$$

ΔS_2 - promjena entropije pri taljenju leda:

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T_2} = \frac{m L_t}{T_2} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 33,37 \cdot 10^4 \text{ J kg}^{-1}}{273 \text{ K}} = 1222,34 \text{ JK}^{-1}$$

ΔS_3 - promjena entropije pri zagrijavanju nastale vode:

$$\begin{aligned} \Delta S_3 &= m c \ln \frac{T_3}{T_2} = 1 \text{ kg} \cdot 4186,90 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \ln \frac{373}{273} = \\ &= 1306,73 \text{ J K}^{-1} \end{aligned}$$

ΔS_4 - promjena entropije pri isparavanju vode:

$$\Delta S_4 = \frac{m L_i}{T_3} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 22,58 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1}}{373 \text{ K}} = 6053,62 \text{ J K}^{-1}$$

ΔS_5 - promjena entropije pri zagrijavanju nastale pare:

$$\begin{aligned}\Delta S_5 &= m c_p \ln \frac{T_4}{T_3} = 1 \text{ kg} \cdot 2009,66 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \ln \frac{393}{373} = \\ &= 104,97 \text{ J K}^{-1}\end{aligned}$$

$$\Delta S = 8908,82 \text{ J K}^{-1}$$

$$2.3.23. \quad W = - 7,4 \text{ kJ}, \quad \Delta S = 0$$

$$2.3.24. \quad \Delta S = 50,7 \text{ J K}^{-1}$$

$$2.3.25. \quad \Delta S = \Delta S_{\text{izob}} + \Delta S_{\text{adij}}$$

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{izob}} &= \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 m c_p \frac{dT}{T} = n C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = n \frac{7}{2} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= 63,83 \text{ J K}^{-1}\end{aligned}$$

$$\Delta S_{\text{adij}} = 0, \quad \Delta S = 63,83 \text{ J K}^{-1}$$

$$2.3.26. \quad \text{Promjena entropije } \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

ΔS_1 - promjena entropije pri zagrijavanju vode mase m_1 od temperature T_1 do T (relacije 2.28 i 2.7):

$$\Delta S_1 = m_1 c \ln \frac{T}{T_1}$$

ΔS_2 - promjena entropije pri hladjenju vode mase m_2 od temperature T_2 do T :

$$\Delta S_2 = m_2 c \ln \frac{T}{T_2}$$

Ako nema gubitaka topline temperatura smjese je dana relacijom:

$$T = \frac{m_2 T_2 + m_1 T_1}{m_1 + m_2}$$

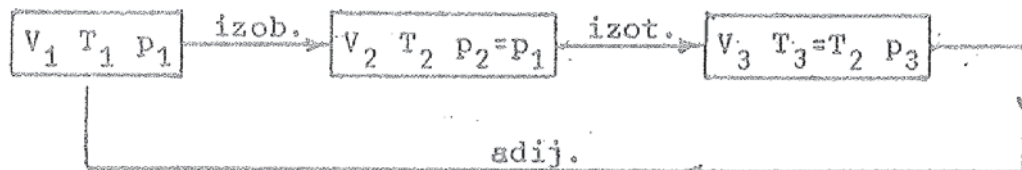
$$T = \frac{0,05 \cdot 323 + 0,1 \cdot 273}{0,15} = 289,67 \text{ K}$$

$$\Delta S = 4186,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} (0,1 \cdot \ln \frac{289,67}{273} + 0,05 \cdot \ln \frac{289,67}{323}) \text{ kg}$$

$$\Delta S = 2,02 \text{ J K}^{-1}$$

$$2.3.27. \Delta S = 3,4 \text{ J K}^{-1}$$

2.3.28.



$$\text{Rad } W = W_{12} + W_{23} + W_{31}$$

W_{12} - rad pri izobarnom hlađenju (relacija 2.23):

$$W_{12} = P_1 (V_2 - V_1)$$

$$V_2 = \frac{n R T_2}{P_2} = V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

$$W_{12} = P_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

$$W_{12} = 2 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} \cdot 3 \text{ m}^3 \left(\frac{100}{300} - 1 \right) = -4,0 \cdot 10^5 \text{ J}$$

W_{23} - rad pri izotermnom širenju (relacija 2.24):

$$W_{23} = n R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = P_2 V_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = P_1 V_2 \ln \frac{V_3}{V_2}$$

$$W_{23} = P_1 V_1 \frac{T_2}{T_1} \ln \frac{V_3}{V_2}$$

$$V_3/V_2 = P_2/P_3 = P_1/P_3$$

$$P_1/P_3 = (V_3/V_1)^\gamma$$

$$V_1 = V_2 T_1/T_2$$

$$V_3/V_2 = (V_3/V_2)^\gamma (T_2/T_1)^\gamma$$

$$V_3/V_2 = (T_1/T_2)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$W_{23} = p_1 V_1 \frac{T_2}{T_1} \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$W_{23} = 2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot \frac{100}{300} \ln \left(\frac{300}{100} \right)^{3,5} \text{ J} = 7,7 \cdot 10^5 \text{ J}$$

W_{31} - rad pri adijabatskoj kompresiji (relacija 2.25):

$$W_{31} = n \frac{R}{\gamma-1} (T_3 - T_1) = \frac{p_1 V_1}{T_1 (\gamma-1)} (T_2 - T_1)$$

$$W_{31} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3}{300 \cdot 0,4} (100 - 300) = 10^6 \text{ J}$$

Ukupni rad: $W = -6,3 \cdot 10^5 \text{ J}$

Promjena entropije $\Delta S = 0$

$$2.3.29. \quad \Delta S = 1,46 \text{ J K}^{-1}$$

$$2.3.30. \quad \Delta S = k \ln \frac{p_2}{p_1} = k \ln 2^N$$

$$N = \frac{p V N_0}{R T} = 2 \cdot 10^{23}$$

$$\Delta S = 2 \text{ J K}^{-1}$$

3. KVANTI SVJETLOSTI

3.1. Temperatura crnog tijela iz Stefan-Boltzmannova zakona:

$$T^4 = \frac{I}{\sigma} = \frac{P}{A \sigma} = \frac{d^2 S}{\sigma r^2}$$

P - energija koju zrači Sunce u jedinici vremena; $P = 4 d^2 \pi S$

d - udaljenost Zemlja-Sunce

S - solarna konstanta

A - površina Sunca; $A = 4 r^2 \pi$

$$T^4 = \frac{(1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot 1350 \text{ W m}^{-2}}{(7 \cdot 10^8 \text{ m})^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}} = 5750 \text{ K}$$

3.2. $E = 40,48 \text{ kJ}$

3.3. 84%

3.4. Tražena energija zračenja (iz relacija 3.1. i 3.2.):

$$I = \sigma \left(\frac{0,0029}{\lambda_m} \right)^4$$

$$I = 5,67 \cdot 10^{-12} \text{ J cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4} \left(\frac{0,0029 \text{ m K}}{5200 \cdot 10^{-10} \text{ m}} \right)^4$$

$$I = 5,48 \text{ kJ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

3.5. $T = 5800 \text{ K}$

3.6. Energija koju u jedinici vremena emitira jedinična površina tijela emitivnosti ϵ pri apsolutnoj temperaturi T :

$$I = \epsilon \sigma T^4$$

te je $I = 0,3 \cdot 5,67 \cdot 10^{-12} \text{ J cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4} 500^4 \text{ K}^4$

$$I = 0,1 \text{ J cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

3.7. Gustoća energije zračenja crnog tijela:

$$W_\lambda = \frac{8 \pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

3.8. $\lambda_m = 7,250 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $W_\lambda = 1,78 \text{ J m}^{-4}$

3.12. Primjena Planckova kvantnog uvjeta na titranje tijela energije E:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = n h \nu$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Amplituda titranja:

$$A^2 = \frac{n h}{\pi \sqrt{k m}} = n \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{\pi \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}} \text{ m}^2$$

$$A = 3,24 \sqrt{n} 10^{-17} \text{ m}$$

Razlika amplituda za promjenu kvantnog broja od n do n+1:

$$\Delta A = 3,24 (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) 10^{-17} \text{ m}$$

$$3.13. h\nu = 2,05 \text{ eV}$$

$$3.14. n = 2 \cdot 10^{18}$$

3.15. Najveća brzina fotoelektrona (iz relacija 5.8. i 5.9):

$$v_m = \sqrt{\frac{2 h}{m} (\nu - \nu_g)} = \sqrt{\frac{2 h c}{m} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_g} \right)}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{293} \right) 10^9 \text{ m}^{-1}}$$

$$v_m = 8,3 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

$$3.16. \lambda_g = 2350 \text{ Å}$$

$$3.17. \text{ a) } W = 4,5 \text{ eV}, \quad \text{ b) } v_m = 7,7 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

3.18. Kinetička energija najbržih fotoelektrona (relacija 3.8):

$$(E_k)_m = hv - W = h \frac{c}{\lambda} - W$$

$$(E_k)_m = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV s} \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{24 \cdot 10^{-8} \text{ m}} - 4,2 \text{ eV} =$$

$$= 0,97 \text{ eV}$$

Potencijal zaustavljanja:

$$eV_0 = (E_k)_m; \quad V_0 = 0,97 \text{ V}$$

Granična valna dužina (relacija 3.9): $\lambda_g = hc/W = 2954,3 \text{ \AA}$

$$3.19. \quad h = 6,61 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

3.20. Masa upadnih fotona:

$$m = hv/c^2$$

$$hv = W + (E_k)_m = 12,5 \text{ eV} = 20 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$m = \frac{20 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} = 2,2 \cdot 10^{-35} \text{ kg}$$

Granična energija za fotoelektrični efekt iz volframa:

$$hv_g = W = 4,5 \text{ eV}$$

3.23. Energija raspršenog fotona:

$$hv' = h \frac{c}{\lambda'} = h \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c}{v} = \frac{hc}{hv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{2,16 \cdot 10^{-13} \text{ J}}$$

$$= 6,2 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cdot 0,024 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot \frac{2}{4} = 24 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

$$h\nu' = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV s} \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{(6,2 + 24) 10^{-13} \text{ m}} = 0,41 \text{ MeV}$$

$$3,24. \Delta\lambda = 0,024 \text{ \AA}, \\ E_k = 290,8 \text{ eV}$$

3.25. a) Promjena u valnoj dužini i energiji fotona:

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0,012 \text{ \AA}$$

$$\Delta E = h\nu - h\nu'$$

$$h\nu' = h \frac{c}{\lambda}, = h \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = 1,241 \text{ \AA}$$

$$h\nu' = \frac{4,136 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^8}{(0,012 + 1,241) 10^{-10}} \text{ eV} = 9,90 \text{ keV}$$

$$\Delta E = (10 - 9,90) \text{ keV} = 0,10 \text{ keV}$$

b) Kinetička energija, količina gibanja i pravac udarenog elektrona (crtež 3.1) iz zakona sačuvanja energije i količine gibanja:

$$E_k = h\nu - h\nu' = 0,10 \text{ keV} \quad (1)$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p \cos \phi \quad (2)$$

$$\frac{h\nu'}{c} \sin \theta = p \sin \phi$$

$$\text{tg } \phi = \frac{h\nu' \sin \theta}{h\nu - h\nu' \cos \theta} = \frac{9,90 \cdot \sin 60^\circ}{10 - 9,90 \cdot \cos 60^\circ}$$

$$\phi = 59^\circ 30'$$

$$p = \frac{h\nu'}{c} \frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{9,90 \cdot 1,6 \cdot 10^{-16}}{3 \cdot 10^8} 1,00511 \text{ kg m s}^{-1}$$

$$p = 5,3 \cdot 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}$$

3.26. Proračun kuta ϕ (crtež 3.1) iz zakona sačuvanja količine gibanja:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p \cos \phi$$

$$\frac{h\nu'}{c} \sin \theta = p \sin \phi$$

$$\text{tg } \phi = \frac{\frac{h\nu'}{c} \sin \theta}{\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} \cos \theta}$$

$$\text{tg } \phi = \frac{1,688 \frac{\text{MeV}}{c} \sin 30^\circ}{3 \frac{\text{MeV}}{c} - 1,688 \frac{\text{MeV}}{c} \cos 30^\circ}$$

$$\phi = 28^\circ 45'$$

3.27. $\Delta\lambda = 4,8 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}$, $E_k = 0,47 \text{ MeV}$, $\delta = 71\%$

3.28. $\theta = 23^\circ 34'$, $E_k = 56,4 \text{ keV}$, $\phi = 66^\circ 21'$

4. ELEKTRONI I IONI

4.1. a) klasično:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = eU \text{ te je } v = \sqrt{\frac{2 e U}{m}}$$

$$v = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 80 \cdot 10^3 \text{ V}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 1,68 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

b) relativistički:

$$E_k = e \mathcal{U} = m c^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

te je

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{e \mathcal{U} + m_0 c^2} \right)^2}$$

$$v = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{0,511 \cdot 10^6 \text{ eV}}{80 \cdot 10^3 \text{ eV} + 0,511 \cdot 10^6 \text{ eV}} \right)^2}$$

$$v = 1,51 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

4.2. klasično: $v = 59,2 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$

relativistički: $v = 59,5 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$

4.3. polumjer zakrivljenosti $r = p/eB$

a) klasično:

$$p = \sqrt{2 m E_k} \text{ te je } r = \frac{\sqrt{2 m E_k}}{e B}$$

$$r = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 0,04 \text{ T}} = 0,12 \text{ m}$$

b) relativistički:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{1}{c} \sqrt{(E_k + E_0)^2 - E_0^2}$$

$$r = \frac{\sqrt{E_k^2 + 2 E_k E_0}}{c e B} = \frac{\sqrt{(4 + 2 \cdot 2 \cdot 0,511)(1,6 \cdot 10^{-13})^2 \text{ J}^2}}{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 0,04 \text{ T}}$$

$$r = 0,20 \text{ m}$$

4.4. a) $E = kt$

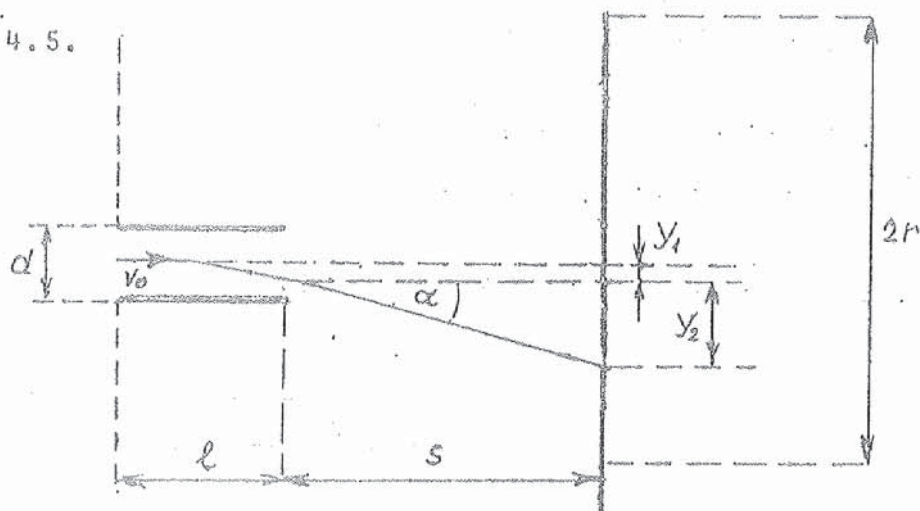
$$F = ket = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$x = \frac{ke}{6m} t^3$$

b) $E = E_0 \sin \omega t$

$$x = \frac{e E_0}{m \omega^2} (\omega t - \sin \omega t)$$

4.5.



a) Putanja elektrona je dana jednačbom:

$$y = \frac{a}{2 v_0^2} x^2$$

$$a = \frac{e E}{m} = \frac{e U}{m d}, \quad v_0^2 = \frac{2 e U_0}{m}$$

$$y = \frac{U}{4 d U_0} x^2 \quad (1)$$

Za $y = d/2$ i $x \leq l$ iz relacije (1) slijedi:

$$U \geq 2 \left(\frac{d}{l}\right)^2 U_0$$

Minimalna razlika potencijala za $x \leq l$:

$$V_m = 2 \left(\frac{d}{l}\right)^2 V_0 = 2 \left(\frac{5}{10}\right)^2 600 \text{ V} = 300 \text{ V}$$

b) Iz crteža slijedi:

$$y_2 = y_1 + s \operatorname{tg} \alpha$$

Iz jednadžbe (1):

$$y_1 = \frac{V}{4 d V_0} l^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{V}{2 d V_0} l$$

$$y_2 = \frac{V}{4 d V_0} l^2 + \frac{V}{2 d V_0} l s \quad (2)$$

Za $y_2 \leq r$ iz relacije (2) slijedi:

$$V \leq \frac{4 r d V_0}{l(l + 2s)}$$

Maksimalna razlika potencijala za $y_2 \leq r$:

$$V_M = 4 \frac{r d}{l(l + 2s)} V_0 = 4 \frac{7,5 \cdot 0,5}{1(1 + 2 \cdot 25)} 600 \text{ V} = 176,5 \text{ V}$$

$$4.6. \quad e/m = 1,7 \cdot 10^{11} \text{ As kg}^{-1}$$

4.7. Brzina elektrona nakon prolaza kroz potencijalnu razliku V_0 :

$$v = \sqrt{2 e V_0 / m} \quad (1)$$

Do izlaza cijevi (crtež 4.1) mogu stići samo elektroni za koje vrijedi relacija:

$$e E = e v B$$

odnosno čija je brzina jednaka:

$$v = \frac{E}{B} = \frac{U}{d B} \quad (2)$$

Iz relacija (1) i (2) slijedi:

$$\frac{e}{m} = \frac{U^2}{2 d^2 U_0 B^2}$$

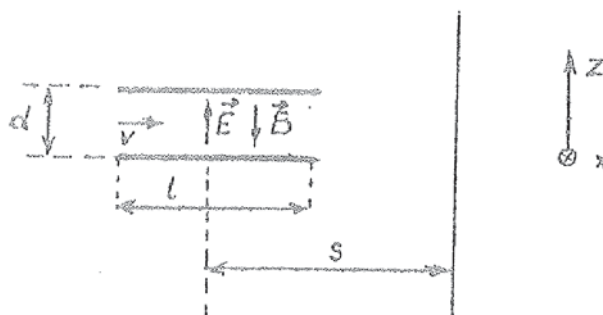
$$\begin{aligned} \frac{e}{m} &= \frac{184^2}{2 (15 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 300 (12 \cdot 10^{-4})^2} \frac{\text{m}^2}{\text{V s}^2} = \\ &= 1,74 \cdot 10^{11} \frac{\text{m}^2}{\text{V s}^2} \end{aligned}$$

4.8. Otklon iona naboja q , mase m , brzine v u homogenom električnom polju jakosti E (u smjeru osi z):

$$z_E = \frac{q}{m} \frac{E \ell s}{v^2} \quad (1)$$

Magnetsko polje otklanja ione u smjeru osi x :

$$x_M = \frac{q}{m} \frac{B \ell s}{v} \quad (2)$$



Jednadžba parabole iz relacije (1) i (2):

$$z = \frac{m E}{q B^2 \ell s} x^2 \quad (3)$$

a) za ione H^+ :

$$z = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg } (180 \text{ V} / 0,015 \text{ m})}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As } (0,002 \text{ T})^2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 20 \cdot 10^{-2} \text{ m}} x^2$$

$$z = 15,6 \cdot 10^3 x^2$$

b) za ione H_2^+

$$z = \frac{3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg } (180 \text{ V} / 0,015 \text{ m})}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As } (0,002 \text{ T})^2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 20 \cdot 10^{-2} \text{ m}} x^2$$

$$z = 31,3 \cdot 10^3 x^2$$

$$4.9. e/m = 1,67 \cdot 10^{11} \text{ As kg}^{-1}$$

$$4.10. q/m = 4,18 \cdot 10^6 \text{ A s kg}^{-1}, \text{ Na}^+$$

4.11. Udaljenost protona i deuterona (crtež 4.2):

$$d = 2(r_d - r_p)$$

Polumjeri r_d i r_p mogu se izračunati iz relacija:

$$e v = \frac{m v^2}{2}, \quad \frac{m v^2}{r} = B e v$$

$$r_d = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m_d v}{e}}$$

$$r_p = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m_p v}{e}}$$

$$d = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2 v}{e}} (\sqrt{m_d} - \sqrt{m_p})$$

$$d = 2 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 10^{-19}}} (\sqrt{3,34 \cdot 10^{-27}} - \sqrt{1,67 \cdot 10^{-27}}) \text{ m} = 1,2 \text{ cm}$$

$$4.12. e/m = 9,6 \cdot 10^7 \text{ As kg}^{-1}$$

4.13. Udaljenost između linija koje ostavljaju izotopi ^{24}Mg i ^{25}Mg : $d_1 = 71,28 \cdot 10^{-5} \text{ m}$
 Udaljenost između linija ^{25}Mg i ^{26}Mg : $d_2 = 69,87 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

4.14. a) Kapljica pada u zraku konstantnom brzinom te je:

$$m g = 6 \pi \eta r v + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_z g \quad (1)$$

b) Ako je primijenjeno homogeno električno polje:

$$m g + 6 \pi \eta r v_E = q E + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_z g \quad (2)$$

Polumjer, masa i naboj kapljice iz relacija (1) i (2):

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta v}{2 g (\rho_u - \rho_z)}}$$

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_u$$

$$q = \frac{18 \pi \eta (v + v_E)}{E} \sqrt{\frac{\eta v}{2 g (\rho_u - \rho_z)}}$$

$$v = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{16} \text{ m s}^{-1}$$

$$\rho_u = 800 \text{ kg m}^{-3}$$

$$v_E = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{40,65} \text{ m s}^{-1}$$

$$\rho_z = 1,30 \text{ kg m}^{-3}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1}$$

$$g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

$$\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$r = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$m = 1,37 \cdot 10^{-14} \text{ kg}$$

$$q = 9,5 \cdot 10^{-19} \text{ As} = 6 e$$

$$4.15. q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

5. STRUKTURA ATOMA

5.1. Parametar sudara (relacija 5.2):

$$p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{E_k} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$$

$$p = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N}^{-1} \text{m}^{-2}}{\text{A}^2 \text{s}^2} \frac{79(1,6 \cdot 10^{-19} \text{As})^2}{6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{Nm}} \operatorname{ctg} 5^\circ$$

$$p = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ Å}$$

5.2. $\theta = 8^\circ$

5.3. $2 \cdot 10^{-7}$

5.4 Odnos raspršenih alfa čestica (relacija 5.3):

$$\frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} = \frac{\sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$\Delta n_2 = \frac{\sin^4 60^\circ}{\sin^4 10^\circ} 30 \text{ min}^{-1} = 18,6 \cdot 10^3 \text{ min}^{-1}$$

5.5. $d = 4,46 \cdot 10^{-4} \text{ Å}$

5.6. Najmanja dužina vala spektralne linije vodika Balmerove serija (relacija 5.5):

$$n \rightarrow \infty \quad \lambda_m = \frac{c}{\nu} = \frac{4}{R_H} = \frac{4}{1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}} = 3646,3 \text{ Å}$$

Najveća valna dužina:

$$n = 3 \quad \lambda_M = \frac{1}{R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right)} = 6563,4 \text{ Å}$$

$$5.7. \quad n = 2 \quad h\nu = 10,18 \text{ eV}, \quad \lambda = 1215,4 \text{ \AA}$$

$$n = 3 \quad h\nu = 12,07 \text{ eV}, \quad \lambda = 1025,5 \text{ \AA}$$

5.9. Polumjeri Bohrovih kružnica (relacija 5.10):

$$r_1 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e Z e^2}$$

$$r_1 = \frac{(6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s})^2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \text{ s}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}}{\pi 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As})^2}$$

$$r_1 = 0,53 \text{ \AA}$$

$$r_2 = 4 r_1, \quad r_3 = 9 r_1$$

Momenti količine gibanja elektrona (relacija 5.11):

$$L_1 = \hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

$$L_2 = 2 L_1, \quad L_3 = 3 L_1$$

5.10. Kinetička i potencijalna energija elektrona vodikova atoma:

$$E_k = \frac{1}{n^2} \frac{m_e Z^2 e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \quad U = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e Z^2 e^4}{4 \epsilon_0^2 h^2}$$

a) za kvantno stanje $n = 1$

$$E_k = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} (1,6 \cdot 10^{-19})^4}{8 (8,854 \cdot 10^{-12})^2 (6,6 \cdot 10^{-34})^2} = 1,54 \text{ eV}$$

$$U = - 3,08 \text{ eV}$$

b) $n = 2$

$$E_K = \frac{1}{4} 1,54 \text{ eV} = 0,385 \text{ eV}$$

$$U = -\frac{1}{4} 3,08 \text{ eV} = -0,770 \text{ eV}$$

$$c) n = \infty \quad E_K = 0 \quad U = 0$$

$$5.11. N = 5 \cdot 10^5$$

$$5.12. \lambda = 1025,5 \text{ \AA}$$

5.13. Najmanja brzina elektrona može se izračunati iz relacije:

$$\frac{m v^2}{2} = h \nu = h c R_H$$

$$v = \sqrt{2 h c R_H / m} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$$

Minimalna potencijalna razlika za ubrzanje elektrona:

$$\mathcal{U} = \frac{U}{e} = \frac{h c R_H}{e} = 13,6 \text{ V}$$

$$5.14. E = -13,6 \text{ eV}$$

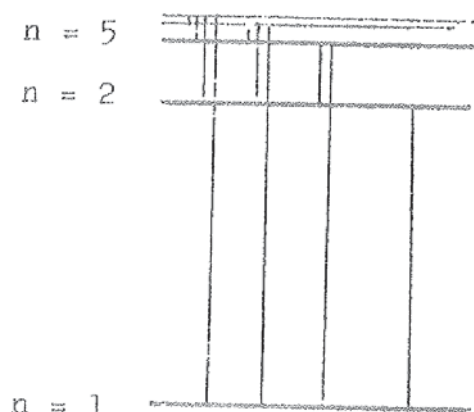
$$5.15. e \mathcal{U}_1 = h c R_H = 13,6 \text{ eV}, \quad \mathcal{U}_1 = 13,6 \text{ V}$$

$$5.16. T = 7,9 \cdot 10^4 \text{ K}$$

5.17. Najmanja energija koja može pobuditi vodikov atom iz osnovnog stanja u stanje $n = 5$:

$$E_m = h c R_H \left(1 - \frac{1}{5^2}\right)$$

$$E_m = 4,136 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,097 \cdot 10^7 \frac{24}{25} \text{ eV} = 13,07 \text{ eV}$$



Energija emitirana fotona iz stanja $n = 5$ u stanje $n = 4$:

$$E_{54} = h c R_H \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{25} \right) = 0,30 \text{ eV}$$

Analogno se izračunava za ostale prijelaze:

$$5.18. v = 7,5 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$$

5.19. Elektron daleko od protona ima kinetičku energiju:

$$E_k = \frac{m v^2}{2} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} (1,875 \cdot 10^6)^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 10 \text{ eV}$$

Energija emitirana kvanta pri zahvatu elektrona protonom u osnovno stanje vodika:

$$h\nu = E_k - E_1 = 10 \text{ eV} + 13,6 \text{ eV} = 23,6 \text{ eV}$$

Valna dužina emitirana kvanta:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{4,136 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^8}{23,6} \text{ m} = 526,8 \text{ \AA}$$

5.20. Količina gibanja emitirana fotona:

$$\frac{h\nu}{c} = h R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = \frac{3}{16} \cdot 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 1,097 \cdot 10^7 \text{ kg m s}^{-1}$$

$$\frac{h\nu}{c} = 1,32 \cdot 10^{-27} \text{ kg m s}^{-1}$$

Iz zakona sačuvanja količine gibanja $\frac{h\nu}{c} = mv$ dobiva se za brzinu odboja atoma:

$$v = \frac{h\nu}{cm} = \frac{1,32 \cdot 10^{-27} \text{ kg m s}^{-1}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 0,8 \text{ m s}^{-1}$$

$$5.21. v = 4,16 \text{ m s}^{-1}$$

$$5.22. p_e = 10,97 \cdot 10^{-25} \text{ kg m s}^{-1},$$

$$p_a = 10,87 \cdot 10^{-25} \text{ kg m s}^{-1}$$

5.23 Rydbergova konstanta za vodik (relacija 5.16):

$$R_H = \left(\frac{M}{m_e + M} \right) R_\infty = \frac{1,6735 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 1,097370 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}}{(9,1 \cdot 10^{-31} + 1,6735 \cdot 10^{-27}) \text{ kg}}$$

$$R_H = 1,09677 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$5.24. R_D = 1,09707 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$5.25. \Delta\lambda = 1,79 \text{ Å}$$

5.26. Valne dužine Balmerove serije za $^4\text{He}^+$:

$$\lambda = \frac{1}{R_{\text{He}} Z^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)}$$

Rydbergova konstanta za $^4\text{He}^+$:

$$R_{\text{He}} = \left(\frac{M}{m_e + M} \right) R_\infty$$

$$R_{\text{He}} = \frac{6,6443 \cdot 10^{-27} \cdot 1,09737 \cdot 10^7}{9,1 \cdot 10^{-31} + 6,6443 \cdot 10^{-27}} \text{ m}^{-1}$$

$$R_{\text{He}} = 1,09722 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda_{32} = \frac{1}{R_{\text{He}} Z^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right)} = 1640,5 \text{ \AA}$$

$$\lambda_{42} = \frac{1}{R_{\text{He}} Z^3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right)} = 1215,2 \text{ \AA}$$

Energija vezanja elektrona u ionu $^4\text{He}^+$ je prema relaciji (5.13) jednaka:

$$E = - \frac{m_e Z^2 e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} = h c Z^2 R_{\text{He}} = - 54,45 \text{ eV}$$

5.27. $\lambda = 135 \text{ \AA}$

5.28. Male poluosi elipsa u kvantnom stanju $n = 2$:

a) $k = 1 \quad b_2 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 a_1 = 2 \cdot 0,53 \text{ \AA} = 1,06 \text{ \AA}$

b) $k = 2 \quad b_2 = a_2 = 4 a_1 = 2,12 \text{ \AA}$

5.29. Bohrov magneton:

$$\mu_B = \frac{e h}{4 \pi m_e} = 9,273 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$$

5.30. Iz relacija (5.21), (5.22), (5.23) slijedi:

$$v = v_0 + \Delta v$$

$$v_0 = \frac{E_2 - E_1}{h} = c R \left(1 - \frac{1}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} v_0 &= 3 \cdot 10^8 \cdot 1,097 \cdot 10^7 \cdot \frac{3}{4} \text{ s}^{-1} = \\ &= 2,47 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\Delta v = \frac{U_2 - U_1}{h} = \Delta m \mu_0 \mu_B \frac{H}{h}$$

$$\Delta \nu \approx \Delta m \cdot 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 9,273 \cdot 10^{-24} \frac{8 \cdot 10^5}{6,6 \cdot 10^{-34}} \text{ s}^{-1}$$

$$\Delta \nu \approx \Delta m \cdot 1,41 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

$$\Delta m = +1, 0, -1$$

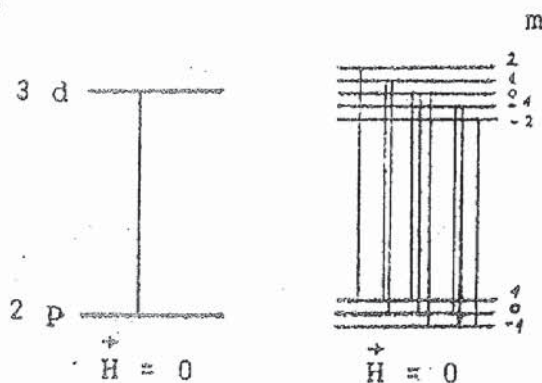
Frekvencije emitiranih spektralnih linija:

$$(2,47 \cdot 10^5 + 1,41) 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

$$2,47 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

$$(2,47 \cdot 10^5 - 1,41) 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

5.31.



Frekvencija emitiranih spektralnih linija (relacije 5.21, 5.22. 5.23:

$$\nu = \nu_0 + \Delta \nu$$

$$\nu_0 \approx c R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = \frac{5}{36} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,097 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} =$$

$$= 4,6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

$$\Delta \nu \approx \Delta m \mu_B \frac{B}{\hbar} = \frac{9,273 \cdot 10^{-24}}{6,6 \cdot 10^{-34}} \text{ s}^{-1}$$

$$v_1 = (4,6 \cdot 10^4 + 1,4) 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

$$v_0 = 4,6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

$$v_{-1} = (4,6 \cdot 10^4 - 1,4) 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

$$5.32. v_1 = (1,6 \cdot 10^{14} + 0,7 \cdot 10^{10}) \text{ s}^{-1}$$

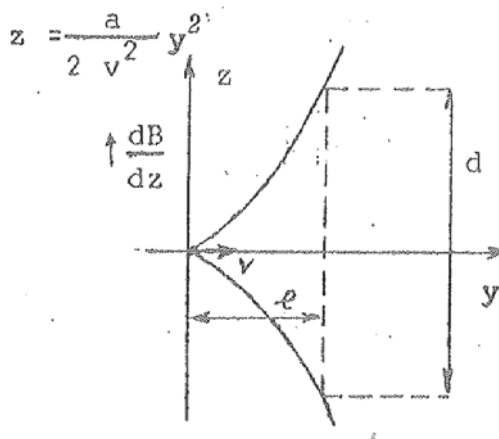
$$v_2 = 1,6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

$$v_3 = (1,6 \cdot 10^{14} - 0,7 \cdot 10^{10}) \text{ s}^{-1}, \quad B = 0,06 \text{ T}$$

$$5.33. a) \Delta E = 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}, \quad b) \Delta E = 0, \pm 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

$$5.34. z = 42 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

5.35. Jednadžba putanje atoma srebra:



$$z = \frac{a}{2 v^2} y^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \bar{E}_k}{m}}$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$F = p_m \frac{dB}{dz}$$

$$d = \frac{a}{v^2} \ell^2$$

Maksimalna udaljenost tragova na fotografskoj ploči:

$$d = \frac{p_m}{2 \bar{E}_k} \frac{dB}{dz} \ell^2$$

$$d = \frac{9,27 \cdot 10^{-24} \cdot 2,5 \cdot 10^3 (2 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-20}} \text{ m} = 0,116 \text{ mm}$$

$$5.36. p_m = 9,28 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^{-2}$$

$$5.38. 1 s^2, 2 s^2, 2 p^6, 3 s^2, 3 p^6, 3 d^{10}, 4 s^2, 4 p^2$$

$$5.39. (1,0,0,-\frac{1}{2}), (1,0,0,\frac{1}{2}), (2,0,0,-\frac{1}{2})$$

$$5.40. E = 3,3 \cdot 10^{-15} \text{ J}, \quad \hbar = 0,9 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

$$5.41. \lambda_g = 0,155 \text{ \AA}$$

$$5.42. V = 28,9 \text{ kV}$$

$$5.43. \text{Frekvencija } K_{\alpha} \text{ zrake (relacija 5.32):}$$

$$\nu_{\alpha} = c R (Z-1)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

Valne dužine K_{α} linija volframa i nepoznatih elemenata:

$$\lambda_w = 0,222 \text{ \AA} = \frac{4}{3 \cdot R \cdot 73^2}$$

$$\lambda_x = 2,285 \text{ \AA} = \frac{4}{3 \cdot R (Z_x - 1)^2}$$

$$\lambda_y = 1,537 \text{ \AA} = \frac{4}{3 \cdot R (Z_y - 1)^2}$$

$$\frac{\lambda_w}{\lambda_x} = \left(\frac{Z_x - 1}{73}\right)^2 = \frac{0,222}{2,285}$$

$$Z_x = 24 \quad \text{krom}$$

$$\frac{\lambda_w}{\lambda_y} = \left(\frac{Z_y - 1}{73}\right)^2 = \frac{0,222}{1,537}$$

$$Z_y = 29 \quad \text{bakar}$$

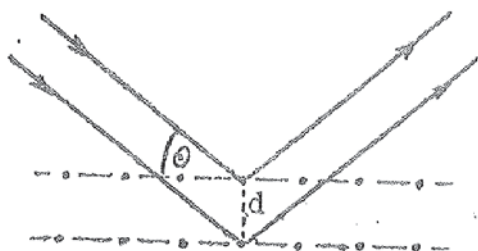
$$5.44. E_{\nu} = -88,3 \text{ eV}$$

5.45. $E_k = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$

5.46. $\theta = 4^\circ 52'$

5.47.

Iz relacija (5.33) i (5.32):



$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2d}$$

$$\lambda = \frac{1}{(Z-1)^2 R (1 - \frac{1}{9})}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{2 \rho N_0}}$$

$$\sin \theta = \frac{9 \sqrt[3]{2 \rho N_0 / M}}{16 R (Z-1)^2}$$

$$\sin \theta = \frac{9 \sqrt[3]{2,2,165 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} / 58,5 \cdot 10^{-3}}}{16 \cdot 73^2 \cdot 1,097 \cdot 10^7}$$

$$\theta = 0,02^\circ$$

5.48. $\theta = 7^\circ 14'$

$$\lambda' - \lambda = 0,04 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

FIZIKALNE KONSTANTE I PODACI

Avogadrov broj	$N_A = 6,0225 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmannova konstanta	$k = 1,3805 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = 8,6178 \cdot 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
Plinska konstanta	$R = 8,3143 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 1,9860 \text{ kcal kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Planckova konstanta	$h = 6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 4,1356 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$
Reducirana Planckova konstanta	$\hbar = 1,0545 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 0,6582 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$
Štefan-Boltzmannova konstanta	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Rydbergova konstanta.....	$R_\infty = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
Brzina elektromagnetskog vala u vakuumu.....	$c = 2,99793 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Apsolutna dielektrična konstanta	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
Apsolutna permeabilnost vakuumu	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$
Električni naboj elektrona ...	$e = 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
Odnos naboja i mase elektrona..	$e/m = 1,7588 \cdot 10^{11} \text{ As kg}^{-1}$

Bohrov polumjer $r_O = 0,5292 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

Comptonova valna dužina $\frac{h}{m_O c} = 0,024 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

Bohrov magneton $\mu_B = 9,273 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$

Mase mirovanja:

elektrona m_e $9,1091 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

protona m_p $1,6725 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

neutrona m_n $1,6748 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

deuteronu m_d $3,3448 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

α čestice m_α $6,6464 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$$

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ at} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 1,033 \text{ at} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ mm Hg} = 1 \text{ tor} = 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ at} = 133,3 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}$$

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

Tvar	Linearni koeficijent širenja $\beta \cdot 10^6 [K^{-1}]$	volumni koeficijent širenja $\alpha \cdot 10^6 [K^{-1}]$
aluminij	24	
bakar	14	
benzin		950
čelik	12	
mjed	19	
olovo	29	
platina	9	
staklo	3-9	
živa		182

Tvar	koeficijent termičke vodljivosti $[J m^{-1} s^{-1} K^{-1}]$
aluminij	205,15
bakar	385,18
led	167,47
pluto	4,19
srebro	418,08
staklo	1,05
željezo	58,62
živa	837,36

Tvar	gustoća (20°C) [kg m ⁻³]	specifična toplina [$\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$]	talište [K]	vrelište [K]	toplina taljenja [J kg ⁻¹]	toplina isparavanja [J kg ⁻¹]
aluminij	$2,699 \cdot 10^3$	908,54	933	2333	$38,94 \cdot 10^4$	$83,74 \cdot 10^5$
bakar	$8,36 \cdot 10^3$	389,37	1356	2873	$18,13 \cdot 10^4$	$73,27 \cdot 10^5$
led		2093,4	273		$33,37 \cdot 10^4$	
magnezij	$1,74 \cdot 10^3$	1046,70	923	1373	$20,93 \cdot 10^4$	
olovo	$11,34 \cdot 10^3$	129,79	600	2013	$2,47 \cdot 10^4$	$9,29 \cdot 10^5$
platina	$21,45 \cdot 10^3$	133,98	2042	4683	$11,39 \cdot 10^4$	$26,80 \cdot 10^5$
voda	$998 \cdot 10^3$	4186,70		373		$22,58 \cdot 10^5$
vodena para		2009,66				
željezo	$7,87 \cdot 10^3$	473,11	1808	3013	$2,30 \cdot 10^4$	$67,83 \cdot 10^5$
živa	$13,55 \cdot 10^3$	138,16	234	630	$1,17 \cdot 10^4$	$2,72 \cdot 10^5$

L I T E R A T U R A

- M.Alonso, E.J.Finn - "Fundamental University Physics", Addison-Wesley Publ.Co., Reading, 1969.
- A.Beiser - "Concepts of Modern Physics", Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1967.
- D.Brini et al. - "Quida alla risoluzione dei problemi di fisica", Casa editrice R.Patron, Bologna, 1957.
- F.Baeche - "Introduction to Physics for Scientists and Engineers", Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1969.
- F.Bueche - "A Workbook in Physics for Science and Engineering Students", Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1969.
- N.Cindro - "Fizika 1", Školska knjiga, Zagreb 1975.
- G.L.Dimić - "Zbirka zadataka iz fizike", Građevinska knjiga, Beograd, 1962.
- T.Feynman - "The Feynman Lectures on Physics-Exercises", Addison-Wesley Publ, Co., Reading, 1965.
- S.E.Friš, A.V.Timorjeva - "Kurs obščeje fiziki", Gosud. izdateljstvo fiz.-mat. literaturi, Moskva, 1962.
- L.G.Gurjev i dr. - "Sbornik zadač po obščemu kursu fiziki", Izdateljstvo "Visšaja škola", Moskva, 1972.
- D.Halliday, R.Resnick - "Fundamentals of Physics", John Wiley Inc., New York, 1970.

- I.E.Irodov - "Problems in General Physics"
Mir Publishers, Moskva, 1981.
- P.Kulišić - "Predavanja iz fizike", Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje - Split, 1973.
- S.G.Mac Donald - "Problems and Solutions in General Physics", Addison-Wesley Publ.Co., Reading, 1967.
- D. Mušicki - "Uvod u teorijsku fiziku", Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1964.
- O.Oldenberg - "Modern Physics for Engineers",
Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1966.
- N.C.Rasmussen
- R.Resnick - "Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory", John Wiley Inc., New York, 1972.
- F.K.Richtmyer, E.H.Kennard - "Introduction to Modern Physics",
Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1969.
- D.I.Saharov, I.S.Kosminkov - "Sbornik zadač po fizike, Gosud. učebno pedag.izdateljstvo, Moskva, 1956.
- F.W.Sears - "Mechanics, Wave Motion and Heat",
Addison-Wesley Publ.Co., Reading, 1959.
- F.W.Sears - "Electricity and Magnetism",
Addison-Wesley Publ.Co., Reading, 1958.

W.W.Seto

- "Acousics", McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.

S.P.Strelkov i dr.

- "Sbornik zadač po obščemu kursu fiziki", Izdateljstvo "Nauka", Moskva 1964.

I.Supek

- "Teorija fizika i struktura materije", Školska knjiga, Zagreb, 1964.

M.Varićak, B.Marković

- "Zbirka primjera iz fizike", Sveučilište u Zagrebu, 1952.

V.S.Voljkenštein

- "Sbornik zadač po obščemu kursu fiziki", Gosud. Izdateljstvo fiz.-mat. literaturi, Moskva, 1958.

M.R.Wehr, J.A.Richards

- "Physics of the Atom", Addison-Wesley Publ.Co., Reading, 1960.

R.T.Weidner, R.L.Sells

- "Elementary Classical Physics", Allyn and Bacon, Boston, 1971.

R.T.Weidner, R.L.Sells

- "Elementary Modern Physics", Allyn and Bacon, Boston, 1967.

H.D.Young

- "Fundamentals of Optics and Modern Physics", Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1968.

