

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE - SPLIT  
SVEUČILIŠTE U SPLITU

Dr. Jadranka Vuletin

PREDAVANJA IZ FIZIKE III

III izdanje

Split, 1991.

Odobreno rješenjem Odbora za izdavačku djelatnost  
Sveučilišta u Splitu broj: 013-338/1-87. od 29.06.1987.

PREDGOVOR

Skripta "Predavanja iz Fizike III" obuhvaćaju veći dio gradiva kolegija -Fizika III- koji slušaju studenti II godine elektrotehnike Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu. Preko osnovnih ideja Specijalne teorije relativnosti, Valne i Statističke mehanike studenti se ovim predavanjima uvode u Fiziku XX stoljeća. Korištena literatura dana je na kraju skripta. ....

Jadranka Vuletin



S A D R Ž A J

	str.
1. SPECIJALNA TEORIJA RELATIVNOSTI.....	1
- Klasični princip relativnosti, Galilejeve transformacije. Eter.....	1
- Michelson-Morlyevi eksperimenti.....	4
- Pokušaji sačuvanja koncepcije preferiranog sustava "etera". Lorentzove transformacije .....	7
- Postulati specijalne teorije relativnosti .....	8
- Izvodjenje Lorentzovih transformacija na osnovi Einsteinovih postulata specijalne teorije relativnosti .....	10
- Dužine i vremenski intervali u relativističkoj fizici	14
- Slaganje brzina.....	16
- Lorentzove transformacije u svijetu Minkowskog .....	18
- Jednadžba elektrodinamike u četvorodimenzionalnom prostoru.....	25
- Jednadžba gibanja elektrona u elektromagnetskom polju.....	28
Osnovne ideje Opće teorije relativnosti .....	34
2. UVOD U VALNU MEHANIKU.....	38
- De Broglieovi valovi materije .....	39
- Davisson-Germerov eksperiment .....	40
- Čestice i valni paketi .....	41
- Heisenbergove relacije neodređenosti .....	44
- Schrödingerova jednadžba .....	47
- Valna funkcija i gustoća vjerojatnosti .....	50
- Potencijalni bedem .....	52
- Tunel efekt.....	56
- Potencijalna jama .....	59
- Harmonički oscilator.....	66
- Vodikov atom.....	70

3. KLASIČNA I KVANTNA STATISTIKA .....	79
Maxwell-Boltzmannova statistika .....	79
- Primjena Maxwell-Boltzmannove statistike na idealni plin.....	85
Bose-Einsteinova statistika .....	89
- Primjena Bose-Einsteinove statistike na fotonski plin. Zračenje crnog tijela .....	92
- Primjena Bose-Einsteinove statistike na fononski plin. Molarna specifična toplina čvrstog tijela ..	93
Fermi - Diracova statistika .....	95
4. PRIMJENA FERMI-DIRACOVE STATISTIKE. ČVRSTA TIJELA...	99
- Kristali .....	99
- Energijske vrpce .....	101
- Model elektronskog plina. Proračun Fermieve ener- gije .....	105
- Termionska emisija .....	107
- Krönig - Penneyev model .....	110
- Izolatori, vodiči i poluvodiči .....	118
- Poluvodiči.....	119
Čisti poluvodiči.....	119
Poluvodiči s primjesama .....	121
Koncentracija elektrona i šupljina .....	123
Fermieva razina .....	127
LITERATURA.....	131

Negativni rezultati Michelson-Morlyevih eksperimenata, neuspješni pokušaji Rayleigh-Jeansovog objašnjenja zračenja crnog tijela poljuljali su temelje Newtonove klasične mehanike i klasične Maxwelllove elektrodinamike. Einsteinove postulati i Planckova pretpostavka o kvantiziranosti energije otklonili su tamu nastale „katastrofe“ i omogućili prodor u zbivanja makro i mikro svijeta.



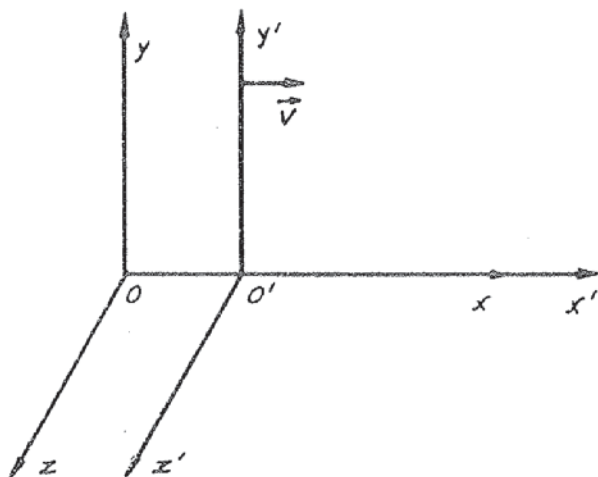
## 1. SPECIJALNA TEORIJA RELATIVNOSTI

### Klasični princip relativnosti. Galilejeve transformacije. Eter

U osnovi klasične Newtonove mehanike nalaze se pojmovi apsolutnog prostora i vremena. Apsolutni prostor uključuje postojanje (jednog preferiranog) sustava koji apsolutno miruje. Vrijeme teče jednako za sve sustave. Ono je nezavisno od sustava iz kojeg se vrši promatranje.

Newtonovi zakoni vrijede u tom apsolutno mirnom sustavu kao i u sustavima koji se prema tom apsolutno mirnom sustavu gibaju konstantnom brzinom - u tzv. inercijalnim sustavima.

Promotrimo dva sustava  $S(x, y, z)$  i  $S'(x', y', z')$  koji se jedan prema drugom gibaju konstantnom brzinom u smjeru osi  $x$  (crtež 1.1).



Crt. 1.1. Inercijalni sustavi

U početnom trenutku  $t = 0$  neka se ishodišta sustava podudara-  
ju  $0 \equiv 0'$ .

Sustav  $S'$  giba se u odnosu na  $S$  sustav konstantnom brzinom  $v$ .  
Veza između koordinata sustava  $S$  i  $S'$  dana je relacijama (1.1)  
tzv. Galileievim transformacijama:

$$\begin{aligned}x &= x' + vt \\y &= y' \\z &= z' \\t &= t'\end{aligned} \tag{1.1}$$

One prikazuju transformiranje prostornih koordinata pri prijelazu  
iz jednog inercijalnog sustava u drugi. Vrijeme je nezavisno o  
sustavu motrenja. Ono teče jednako u svim inercijalnim sustavima.

Iz Galileievih transformacija može se dobiti veza između brzi-  
nama čestice u sustavima  $S$  i  $S'$ :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v \quad \text{ili} \quad \dot{x} = \dot{x}' + v \tag{1.2}$$

gdje je  $\dot{x}$  brzina čestice  $T$  u sustavu  $S$  (mjerena od promatrača  
koji miruje u odnosu na sustav  $S$ ), a  $\dot{x}'$  brzina čestice u sustavu  
 $S'$  (mjerena od mirnog promatrača u sustavu  $S'$ ).

Ako promatrač iz sustava  $S$  opaža da se čestica giba konstantnom  
brzinom tj. ako je  $\dot{x} = \text{konst}$ , i promatrač iz  $S'$  sustava opa-  
žat će da se čestica giba konstantnom brzinom. Svi inercijalni  
sustavi ekvivalentni su za I Newtonov zakon.

Deriviranjem po vremenu dobiva se iz relacije (1.2):

$$\ddot{x} = \ddot{x}'$$

Akceleracija čestice ista je u oba sustava. Odatle slijedi:

$$m \ddot{x} = m \ddot{x}' = F$$

Newtonov zakon gibanja isti je u svim inercijalnim sustavima. On je, dakle, invarijantan prema Galileievim transformacijama.

III Newtonov zakon:

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = - \vec{F}_{B \rightarrow A}$$

ne mijenja oblik pri Galileievim transformacijama jer ako je  $F = F'$ , tada je:

$$\vec{F}'_{A \rightarrow B} = - \vec{F}'_{B \rightarrow A}$$

Dakle, svi Newtonovi zakoni invarijantni su prema Galileievim transformacijama. Analogno bi se moglo pokazati i za zakone sačuvanja energije, količine gibanja i momenta količine gibanja. Zakoni mehanike isti su u svim inercijalnim sustavima. Ovo je klasični princip relativnosti.

Da li su zakoni elektromagnetizma invarijantni prema Galileievim transformacijama?

Maxwellove jednadžbe sadrže konstantu  $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2,99793 \cdot 10^8$  m s<sup>-1</sup> koja je identificirana kao brzina kojom se šire elektromagnetski valovi u vakuumu.

Po Galileievim transformacijama brzina svjetlosti zavisila bi o relativnom gibanju sustava. Protezala bi se od  $c + v$  do  $c - v$  zavisno o pravcu međusobnog gibanja. Samo u jednom sustavu bila bi jednaka  $c$ . Pretpostavljalo se je da bi taj preferirani sustav mogao biti „eter“.

Počevši od Descartesa i Huygensa (17. stoljeće), fizičari su željeli sve pojave svesti na mehaniku. U 19. stoljeću počelo se pretpostavljati da između tijela postoji nevidljiva tvar „eter“. Fizikalne pojave (gravitacija, električne i magnetske sile ...) pokušavalo se tumačiti deformacijama i titrajima „etera“. Smatralo se da je i za širenje elektromagnetskih valova potrebno neko sredstvo, kao i za širenje zvuka. „Eter“ je trebao imati svojstva idealne tekućine koja ne bi ometala gibanje uronjenih tijela, a trebao je imati i elastična svojstva čvrstih tijela (elektromagnetski valovi su transverzalni) ... Teorija etera nailazila je na mnoge poteškoće.

#### Michelson-Morlyevi eksperimenti

Većini pojava išla je u prilog pretpostavka da „eter“ apsolutno miruje u prostoru. Tada bi „eter“ i apsolutni prostor postali identični, te bi gibanje u odnosu na „eter“ bilo apsolutno gibanje tijela.

Ako je u apsolutnom sustavu brzina svjetlosti jednaka brzini koja je predviđena elektromagnetskom teorijom, onda bi se mjerenjem brzine svjetlosti u nekom drugom sustavu mogla odrediti brzina toga sustava (npr. Zemlje) u odnosu na apsolutni sustav vezan za „eter“.

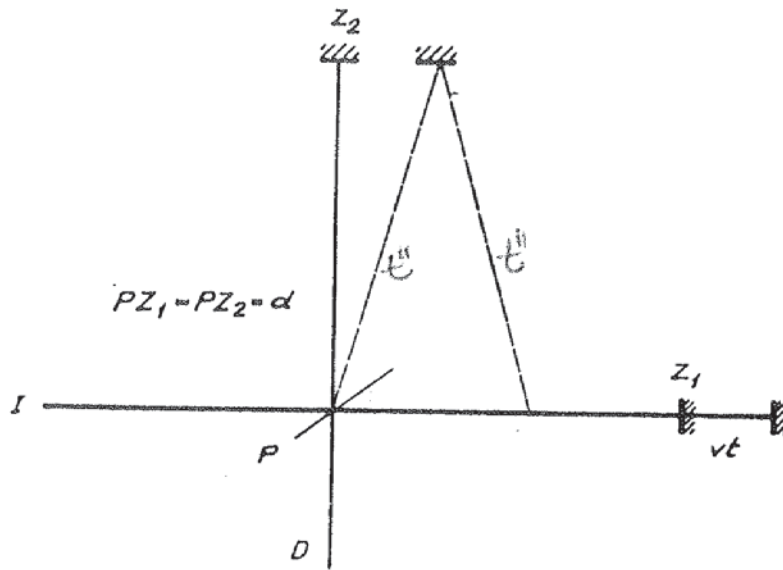
Michelson 1881. godine te ponovno 1887. godine u suradnji s Morlyem izveo je eksperimente kojima se pokušalo ustanoviti gibanje Zemlje prema apsolutnom sustavu - „eteru“.

Mjerenja su izvodjena vrlo preciznim interferometrom. Iz izvora I svjetlost je padala na polupropusnu ploču P (crtež 1.2) gdje se jedan dio reflektirao, a drugi prolazio u početnom smjeru. Nakon odbijanja na zrcalima  $Z_1$  i  $Z_2$  zrake su se vraćale do polupropusne ploče P a od nje u interferometar D.

Os uređajaja  $IZ_1$  bila je postavljena u smjeru gibanja Zemlje kroz „eter“. Kad svjetlosni signal podje od P prema zrcalu  $Z_1$ , zrcalo se od njega odmiče brzinom  $v$  i za vrijeme  $t$  prevali

put  $vt$ . Dakle, od  $P$  do  $Z_1$  svjetlo prevali put  $d + vt$  za vrijeme  $t$ , te je:

$$ct = d + vt$$



Crt. 1,2. Michelsonov eksperiment

Kada se svjetlo vraća od  $Z_1$  do  $P$ , tada mu se ploča približava, pa prevali manji put od  $d$ :

$$ct' = d - vt'$$

Vrijeme koje je potrebno svjetlosnom signalu da prevali put od  $P$  do  $Z_1$  i natrag paralelno s gibanjem Zemlje je:

$$t_1 = t + t' = \frac{d}{c-v} + \frac{d}{c+v} = d \frac{2c}{c^2 - v^2} = \frac{2d}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

a da stigne od P do  $Z_2$  i natrag;

$$t_2 = 2t'' = 2 \frac{d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Svjetlosne zrake ulaze u interferometar s vremenskom razlikom

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2d}{c} \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Ako se uređaj zakrene za  $90^\circ$  oko svoje osi, vremena potrebna svjetlosti za prevaljivanje putova  $P - Z_1 - P$  i  $P - Z_2 - P$  su:

$$t_1' = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t_2' = \frac{2d}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

te je vremenska razlika  $\Delta t'$  jednaka:

$$\Delta t' = t_1' - t_2' = \frac{2d}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

Razlika u vremenima  $\Delta t$  i  $\Delta t'$  iznosi:

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{4d}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

Razvojem u binomni red i zanemarivanjem viših članova od drugog dobiva se da je vremenska razlika  $\Delta t' - \Delta t$  približno jednaka:

$$\Delta t' - \Delta t = - \frac{2d}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

Zbog promjene vremenske razlike  $\Delta t$  za očekivanje je da će se izmijeniti interferencijska slika u interferometru. Eksperiment je ponavljan više puta, ali se nije uočavala razlika u interferencijskoj slici. Nije se, dakle, mogao ustanoviti utjecaj gibanja Zemlje kroz eter na brzinu svjetlosti.

Pokušaji sačuvanja koncepcije preferiranog sustava "etera". Lorentzove transformacije

Fitz-Gerald je 1892. godine postavio neobičnu hipotezu da bi rastumačio Michelson-Morlyeve eksperimente i zadržao „eter“. Po toj hipotezi sva tijela se skraćuju u pravcu gibanja u odnosu na stacionarni „eter“ za faktor

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Ovu hipotezu prihvatio je i razradio Lorentz, pa se naziva Lorentz-Fitz-Geraldova hipoteza.

Lorentz je pokušao razviti teoriju koja bi tumačila navedenu kontrakciju. Izvodeći elektromagnetske izraze za masu, impuls i energiju elektrona, pretpostavio je da se elektron skraćuje u smjeru gibanja. U radu „Elektromagnetske pojave u sustavu koji se giblje brzinom manjom od brzine svjetlosti“, koji je bio objavljen u Proceedings of the Academy of Sciences of Amsterdam,

6,1904., Lorentz je formulirao teoriju prema kojoj bi se Maxwell-ove jednađbe transformirale od jednog niza varijabli na drugi bez promjene oblika. Dobivene transformacije nazvane su Lorentz-ove transformacije. One glase:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \quad z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$x'$   $y'$   $z'$  su koordinate  $S'$  sustava koji se giba prema apsolutno mirnom sustavu - „eteru“  $S(x,y,z)$  konstantnom brzinom  $v$  u smjeru osi  $x$  (crtež 1.1), a  $c$  je brzina svjetlosti.

U Lorentzovim transformacijama vremena se razlikuju u sustavima  $S$  i  $S'$ . Lorentz je želio zadržati apsolutni sustav u kojem „eter“ miruje i prema kojem se može mjeriti „univerzalno vrijeme“  $t$ . Vrijeme u pokretnom sustavu  $t' \neq t$  nastojao je shvatiti kao pomoćnu matematičku veličinu nazivajući ga „lokalno vrijeme“.

#### Postulati specijalne teorije relativnosti

Oslanjajući se na negativni rezultat Michelson-Morlyevih eksperimenata, Einstein je 1905. godine potpuno prekinuo s koncepcijom „etera“. U radu „Ka elektrodinamici tijela u gibanju“ objavljenom u *Annalen der Physik*, 17 (1905) 891 Einstein piše:

„Primjeri ove vrste\* skupa s neuspješnim pokušajima ustanovljavanja gibanja Zemlje u odnosu na 'svjetlosni medij' sugeriraju da pojave elektrodinamike kao i mehanike ne posjeduju svojstva koja bi odgovarala ideji apsolutnog mirovanja. Oni sugeriraju da će isti zakoni elektrodinamike i optike vrijediti za sve koordinatne sustave za koje vrijede jednadžbe mehanike. Mi ćemo podići ovo naslućivanje (čiji sadržaj ćemo zvati „Princip relativnosti“) do statusa postulata i također uvesti drugi postulat koji je samo prividno u suprotnosti s prvim, naime, da se svjetlost uvijek širi u praznom prostoru odredjenom brzinom  $c$  koja je nezavisna od stanja gibanja emitirajućeg tijela.

Ova dva postulata dovoljna su za postizavanje jednostavne i konzistentne teorije elektrodinamike gibajućih tijela osnovane na Maxwelllovoj teoriji za stacionarna tijela“.

Einstein uvodi dva postulata. Prvi postulat je princip relativnosti: zakoni fizike isti su u svim inercijalnim sustavima - a drugi postulat je princip konstantne brzine svjetlosti: brzina svjetlosti ista je u svim inercijalnim sustavima.

Svi inercijalni sustavi ekvivalentni su. Ne postoji preferirani inercijalni sustav. Ne postoji apsolutni prostor. Prihvatanje konstantnosti brzine svjetlosti uključuje po Einsteinu odbacivanje apsolutne istodobnosti. Svaki sustav ima svoje vlastito vrijeme. Odbacujući pojmove apsolutnog prostora i vremena, Einstein je izvršio korjenitu reformu osnova fizike.

Einstein je na osnovi ovih postulata došao do istih transformacijskih jednadžbi do kojih je ranije došao Lorentz (Lorentzove transformacije). Napomenimo da je Lorentz do ovih transformacija došao sa idejom da spasi apsolutni prostor i vrijeme dok Einstein do njih dolazi na osnovi postulata specijalne teorije relativnosti koji odbacuju apsolutni prostor i vremensku istodobnost.

---

\* Odnosi se to na recipročno elektrodinamičko djelovanje vodiča i magneta. Opažena pojava zavisi samo o relativnom gibanju vodiča i magneta.

Izvodjenje Lorentzovih transformacija na osnovi  
Einsteinovih postulata specijalne teorije relativnosti

Promotrimo određeni događaj iz inercijalnog sustava  $S$ . Neka je on karakteriziran prostorno-vremenskim koordinatama  $x, y, z, t$ . U sustavu  $S'$  ovaj isti događaj bit će opisan koordinatama  $x', y', z', t'$ .

Tražit ćemo vezu medju koordinatama sustava  $S$  i  $S'$ :

$$x' = x'(x, y, z, t)$$

$$y' = y'(x, y, z, t)$$

$$z' = z'(x, y, z, t)$$

$$t' = t'(x, y, z, t)$$

Pretpostavka o homogenosti prostora i vremena zahtijeva da jednadžbe transformacije budu linearne:

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t\end{aligned}\tag{1.3}$$

Elementi  $a_{jk}$  matrice transformacije zavise o relativnoj brzini sustava  $v$ .

Kada jednadžbe ne bi bile linearne npr. ako je  $x' = a_{11}x^2$ , tada bi udaljenost izmedju dviju točaka u sustavu  $S'$  bila  $x'_2 - x'_1 = a_{11}(x_2^2 - x_1^2)$ . Ako je štap u sustavu  $S$  npr. izmedju  $x_2 = 3$  i  $x_1 = 2$ , tada je  $x'_2 - x'_1 = 5 a_{11}$ , a ako je izmedju

$x_2 = 2$  i  $x_1 = 1$ , tada je  $x_2' - x_1' = 3 a_{11}$ .

Mjerenje duljine štapa zavisilo bi o tome gdje se štap nalazi u prostoru. Analogno bi bilo i za vrijeme. Dakle, homogenost prostora i vremena znači da rezultati mjerenja dužine ili vremena između dva događaja ne zavise gdje ili kada su se dogodili.

Ako nema relativnog gibanja sustava  $S$  i  $S'$  u  $y$  i  $z$  pravcu, može se očekivati da će biti:

$$y' = y \quad \text{i} \quad z' = z$$

te da  $x'$  i  $t'$  neće zavisiti o njima, odnosno da su koeficijenti  $a_{22} = a_{33} = 1$ ,  $a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0$ ,  $a_{12} = a_{13} = a_{42} = a_{43} = 0$

Ako se ishodište sustava  $S'$  ( $x' = 0$ ) giba u pravcu  $x$  osi brzinom  $v$ , tada bi tvrdnja  $x' = 0$  bila identična tvrdnji  $x = vt$  pa bi ispravna jednačba transformacije bila:

$$x' = a_{11}(x - vt)$$

( $x = vt$  uvijek daje  $x' = 0$  u ovoj jednačbi)

Na osnovi gore navedenog, jednačbe transformacije (1.3) poprimile bi oblik:

$$x' = a_{11}(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = a_{41}x + a_{44}t$$

(1.4)

Koeficijenti  $a_{11}$ ,  $a_{41}$  i  $a_{44}$  mogu se odrediti korištenjem postulata konstantne brzine svjetlosti. Pretpostavit ćemo da u  $t = 0$  sferni elektromagnetski val napušta ishodište sustava  $S$  koje u tom trenutku koincidira sa ishodištem  $S'$ . Val se širi brzinom  $c$  u svim pravcima u svim inercijalnim sustavima. Njegovo širenje opisano je jednadžbom kugle čiji se polumjer širi brzinom  $c$  u sustavu  $S$  i  $S'$  tj.

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1.5)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (1.5')$$

Iz jednadžbi (1.5') i (1.4) slijedi:

$$a_{11}^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (a_{41}x + a_{44}t)^2$$

pregrupiranje daje:

$$\begin{aligned} (a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2) x^2 + y^2 + z^2 - 2(v a_{11}^2 + \\ + c^2 a_{41} a_{44}) xt = (c^2 a_{44}^2 - v^2 a_{11}^2) t^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Iz usporedbe jednadžbe (1.6) sa (1.5) dobiva se:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 &= 1 \\ v a_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44} &= 0 \\ c^2 a_{44}^2 - v^2 a_{11}^2 &= c^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Rješenje sistema jednažbi (1.7) je:

$$a_{44} = 1 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$a_{11} = 1 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.8)$$

$$a_{41} = -v / c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Iz jednažbi (1.8) i (1.4) slijede Lorentzove transformacije:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \quad z' = z \quad (1.9)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ako je brzina  $v$  neznatna u odnosu prema brzini svjetlosti  $c$  tada se omjer  $v/c$  može zanemariti u odnosu prema jedinici te Lorentzove transformacije poprimaju oblik Galileievih transformacija.

Klasična shvaćanja istodobnosti temelje se na pretpostavci kontrole mjerenja vremena beskonačno brzim signalima. Ako se pret-

postavi da brzina svjetlosti ima beskonačno veliku vrijednost Lorentzove transformacije prelaze u Galilejeve.

### Dužine i vremenski intervali u relativističkoj fizici

U klasičnoj fizici duljina predmeta ista je za sve opažače bez obzira da li se oni gibaju ili miruju u odnosu na taj predmet. To izgleda točno kada su brzine gibanja zanemarive prema brzini svjetlosti. Što se događa kod većih brzina?

Ako promatrači u sustavima  $S$  i  $S'$  miruju jedan prema drugome i prema predmetu čiju duljinu žele izmjeriti, onda će mjerenjem dobiti istu vrijednost za duljinu toga predmeta. Ako se sustav  $S'$  giba u smjeru osi  $x$  (crtež 1.1) brzinom  $v$  u odnosu na sustav  $S$ , a ako promatrač u  $S'$  miruje u odnosu na predmet naći će istu duljinu kao i prije. Koliku će duljinu izmjeriti promatrač iz sustava  $S$  (pretpostaviti da on miruje u sustavu  $S$ )?

Neka štapa koji se giba sa sustavom  $S'$  (odnosno koji miruje u  $S'$ ) ima u tom sustavu duljinu:  $d' = x_2' - x_1'$ . U mirnom sustavu  $S$  leži taj štapa u danom trenutku  $t$  između koordinata  $x_1$  i  $x_2$  i ima duljinu:  $d = x_2 - x_1$ .

Prema Lorentzovim transformacijama

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{ili} \quad x_1' + d' = \frac{x_1 + d - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Odbijanjem ovih dviju jednačbi dobiva se da je  $d' = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

odnosno za duljinu štapa  $d$  mjerenu iz mirnog sustava  $S$ :

$$d = d' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.9)$$

$d'$  je duljina štapa mjerena u sustavu  $S'$  koji se giba prema sustavu  $S$  brzinom  $v$  u smjeru osi  $x$  (štap miruje u odnosu na sustav  $S'$ ).

Promatrač iz sustava  $S$  nalazi da je štap skraćen za faktor  $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$  uzduž osi relativnog gibanja. Pojava je poznata pod imenom kontrakcija dužine.

Pri mjerenju promatrači uzimaju za prednju i krajnu točku štapa svoju istodobnost. Promatrač u gibanju smatra da je promatrač u mirovanju uzeo prednju točku štapa nešto ranije pa mu štap "izgleda" skraćen. Duljina predmeta, dakle, nije apsolutna nego zavisi o relativnom gibanju prema promatraču. Pojava skraćivanja odnosi se samo na dužine u smjeru gibanja. Dužine okomite na smjer gibanja ostaju nepromijenjene.

Kontrakcija dužine nije izazvana nekim silama niti fizikalnim promjenama (hladjenje, kompresija i sl.), nego se ona (prema objašnjenju teorije relativnosti) prirodno javlja promatraču koji promatra tijelo u gibanju.

Iz Einsteinovih postulata slijedi da vrijeme (kao i duljina) nije apsolutno nego da zavisi o relativnom gibanju promatrača. Koliko dugo traje za mirnog promatrača proces koji se zbiva u nekoj točki  $x'$  sustava  $S'$  ako se sustav  $S'$  giblje prema mirnom promatraču (sustav  $S$ ) brzinom  $v$  (crtež 1.1)?

Vremenskom intervalu u sustavu  $S'$   $\Delta t' = t'_2 - t'_1$  odgovaralo bi u mirnom sustavu  $S$  vrijeme  $\Delta t = t_2 - t_1$  koje bi prema Lorentzovim transformacijama bilo jednako:

$$\Delta t = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.10)$$

Vremenski interval u sustavu koji se giba izgleda mirnom promatraču dulji. U sustavu koji se giba, vrijeme se usporuje. Pojava se naziva dilatacija vremena.

Eksperimenti pokazuju ispravnost relacije (1.10). Život nestabilne čestice ubrzanе u akceleratoru produlji se prema životu iste čestice u stanju mirovanja. I raspadanje mezona potvrđuje Einsteinovu dilataciju vremena.

Kontrakcija dužine i dilatacija vremena ne mogu se opaziti kada je brzina gibanja mnogo manja od brzine svjetlosti. Razlike postaju znatne tek kada se brzina tijela  $v$  približava brzini svjetlosti.

Sustav u kojem tijelo miruje (odnosno koji se giba zajedno sa tijelom) često se u relativističkoj mehanici naziva vlastiti sustav. Duljina tijela mjerena u tom sustavu zove se vlastita duljina tijela, a vrijeme - vlastito vrijeme.

### Slaganje brzina

U klasičnoj mehanici resultantna brzina jednaka je vektorskom zbroju komponentnih brzina. Ako se tijelo giba u sustavu  $S'$  brzinom  $u'$ , a sustav  $S'$  se giba prema sustavu  $S$  brzinom  $v$ , brzina tijela u sustavu  $S$  je jednaka:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$$

Da li to vrijedi u relativističkoj fizici?

Veza između koordinata sustava  $S$  i  $S'$  može se izraziti Lorentzovim transformacijama:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a pomoću njih izračunati brzinu tijela u mirnom sustavu:

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}$$

ili

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v u'}{c^2}} \quad (1.11)$$

$u$  je brzina tijela u sustavu  $S$ , a  $u'$  je brzina tijela u sustavu  $S'$  koji se giba prema sustavu  $S$  konstantnom brzinom  $v$  u pozitivnom smjeru osi  $x$ .

Iz relacije (1.11) može se uočiti da je rezultantna brzina uvijek manja od zbroja brzine čestice u sustavu  $S'$  i brzine translacije sustava i da ne može biti veća od brzine svjetlosti. Ako bi brzina  $u'$  postala jednaka brzini svjetlosti  $c$ , tada bi i brzina  $u$  bila jednaka  $c$ . Brzina svjetlosti ista je za oba motritelja.

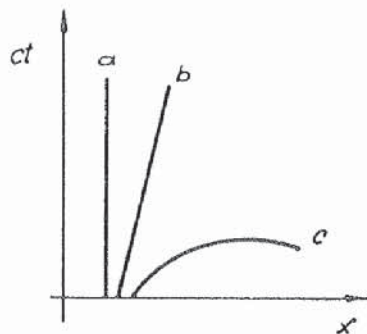
Relativistički izraz (1.11) prelazi u klasični ako su brzine  $u'$  i  $v$  zanemarljive u odnosu na brzinu svjetlosti.

### Lorentzove transformacije u svijetu Minkowskog

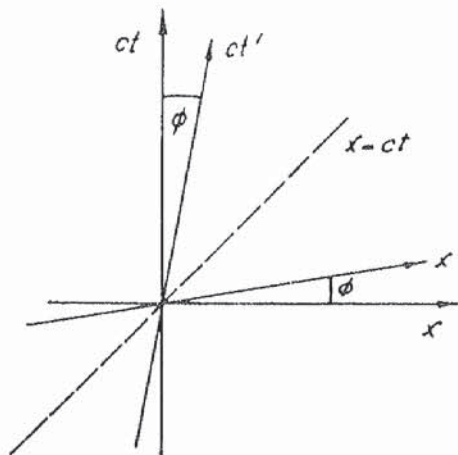
Geometrijsku interpretaciju Lorentzovih transformacija dao je Minkowski. Uveo je vrijeme kao četvrtu koordinatu te je dogadjaje prikazao u četvero-dimenzionalnom prostorno-vremenskom svijetu poznatom danas po imenu svijet ili prostor Minkowskog. U govoru upućenom Skupu njemačkih prirodoslovaca i liječnika, Cologne, 1908. godine pod naslovom „Prostor i vrijeme“ Minkowski je izložio: „Pokušat ćemo dati zorni prikaz problema grafičkom metodom. Neka je  $x, y, z$  pravokutni koordinatni sustav za prostor a neka  $t$  označava vrijeme. Predmeti našeg zapažanja neizbježno uključuju prostor i vrijeme u kombinaciji“ ... „Točku prostora u vremenskom trenutku tj. skup vrijednosti  $x, y, z, t$  nazvat ćemo svjetska točka. Mnoštvo od svih vrijednosti  $x, y, z, t$  nazvat ćemo svijet ... Neka promjene  $dx, dy, dz$  prostornih koordinata materijalne točke odgovaraju elementu vremena  $dt$ . Tada dobivamo, kao predodžbu toka života materijalne točke, krivulju u svijetu, svjetsku liniju“ ... „moje je mišljenje da se fizikalni zakoni mogu najbolje izraziti kao uzajamni odnosi između ovih svjetskih linija“ ...

Zbog jednostavnosti može se ograničiti promatranje na jedno-dimenzionalno gibanje čestice duž osi  $x$  u koordinatnom sustavu  $x t$ . Da bi koordinatne osi imale iste dimenzije može se umjesto koordinate  $t$  uzeti  $ct$  (crtež 1.3). Položaj čestice  $x$  u vremenu  $t$  bit će prikazan jednom „svjetskom točkom“ u ravnini  $x ct$ , a njezino gibanje po osi  $x$  krivuljom u ravnini  $x ct$  tzv. „svjetskom linijom“.

Npr. mirovanje čestice prikazano je pravcem koji je paralelan s vremenskom osi (a), gibanje s konstantnom brzinom-pravcem čiji nagib prema osi  $x$  zavisi o brzini gibanja (b), ubrzano gibanje-zakrivljenom linijom (c).



Crt.1.3. x-ct koordinatni sustav



Crt.1.4. Lorentzove transformacije

Promotrimo geometrijsku interpretaciju Lorentzovih transformacija.

Lorentzove transformacije dane su relacijama:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ili

(1.12)

$$x' = \frac{x - \frac{v}{c}ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Na  $x'$  osi vrijeme  $t'$  po dogovoru jednako je nuli, te je prema

relaciji (1.12):

$$ct - \frac{v}{c} x = 0 \quad \text{— jednačina osi } x'$$

Iz ovoga slijedi da je os  $x'$  pravac u ravnini  $x$   $ct$  koji zatvara s osi  $x$  kut  $\emptyset$  čiji je tangens jednak :

$$\text{tg } \emptyset = \frac{ct}{x} = \frac{v}{c}$$

Na  $ct'$  osi  $x'$  je nula, odnosno prema jednažbi (1.12):

$$x - \frac{v}{c} ct = 0 \quad \text{— } ct'$$

Tangens kuta što ga  $ct'$  os zatvara s osi  $ct$  je u  $x$   $ct$  sustavu :

$$\text{tg } \emptyset = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c}$$

Osi sustava  $x'$   $ct'$  zakrenute su prema osima  $x$   $ct$  sustava za kut  $\emptyset$  (crtež 1.4). Što je veća brzina  $v$  gibanja sustava  $x'$   $ct'$  prema sustavu  $x$   $ct$ , kut  $\emptyset$  će biti veći i osi  $x'$   $ct'$  će se sve više približavati svjetlosnom pravcu  $x = ct$ .

Za odredjivanje mjera u različitim Lorentzovim sustavima polazi se od invarijantne brzine svjetlosti u svim tim sustavima.

Pri izvodjenju Lorentzovih transformacija bilo je pretpostavljeno da kuglasti val svjetlosti u početnom trenutku  $t = t' = 0$  polazi iz ishodišta  $0 = 0'$  i da se svjetlost istom brzinom širi u sustavu  $xyzt$  i sustavu  $x'y'z't'$  koji se prema sustavu  $xyzt$  giba konstantnom brzinom  $v$  u smjeru osi  $+x$ .

U sustavu  $xyzt$  polumjer svjetlosnog vala za vrijeme  $t$  dostigne vrijednost:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1.13)$$

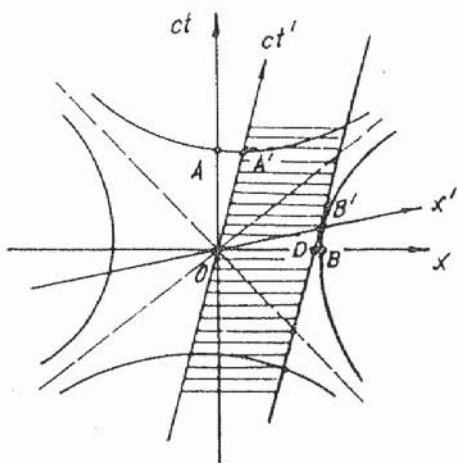
a za vrijeme  $t'$  u sustavu  $x'y'z't'$ :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (1.14)$$

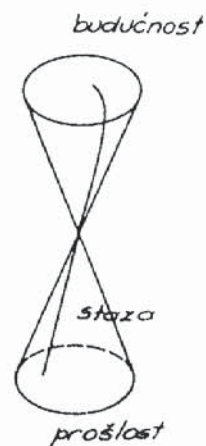
Jednadžba (1.14) dobiva se iz jednadžbe (1.13) ako se primijene Lorentzove transformacije:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \frac{(x' + vt')^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y'^2 + z'^2 - \frac{c^2 (t' + \frac{v}{c^2} x')^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

Dakle, izraz  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$  ostaje nepromijenjen pri Lorentzovim transformacijama. On je isti u svim Lorentzovim sustavima. Na osnovi te invarijante mogu se odrediti mjere u Lorentzovim sustavima.



Crt.1.5. Hiperbole baždarenja



Crt.1.6. Stožac prošlosti i budućnosti

Ako se za invarijantu pretpostavi vrijednost 1 u sustavu  $x ct$  (crtež 1.5):

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 = 1 \quad (1.15)$$

dobiva se jednadžba hiperbole koja siječe os  $x$ , odnosno  $x'$  u jediničnim točkama, tako da odsječci  $OB$  i  $OB'$  prikazuju jedinice dužina u ovim sustavima.

Ako se za invarijantu uzme vrijednost  $-1$ :

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 = -1 \quad (1.16)$$

onda hiperbola siječe os  $ct$ , odnosno  $ct'$  u jediničnim točkama, te odsječci  $OA$  i  $OA'$  daju jedinice vremena pomnožene sa  $c$ . Hiperbolama (1.15) i (1.16) određene su jedinične vrijednosti na koordinatnim osima sustava  $x ct$ , odnosno  $x ct'$ .

Geometrijska interpretacija Lorentzovih transformacija daje tumačenje nekih posljedica Einsteinovih postulata kao npr. kontrakciju dužine. Zamislimo da štap jedinične duljine miruje u sustavu  $x' ct'$  duž  $x'$  osi od  $O$  do  $B'$ . Mirovanje štapa prikazano je paralelnom prugom sa osi  $ct'$  (šrafirano područje na crtežu 1.5). Promatrač koji mjeri duljinu ovog štapa iz sustava  $x ct$  mora istovremeno npr. u  $t = 0$  sa svoje točke gledišta fiksirati položaje krajeva ovog štapa - točke  $O$  i  $D$  - na  $x$  osi. Za njega duljina  $OD$  prikazuje duljinu štapa. Vidi se da je ona manja od jedinične duljine  $OB$  (crtež 1.5), tj. ovaj je štap kraći za promatrača u sustavu  $x ct$ , nego za onog u  $x' ct'$  za kojega je štap duljine  $OB' = 1$ . Ovim kontrakcija prirodno proizlazi iz jedinstva prostorno-vremenskog zbivanja.

Prostor Minkowskog  $x, y, z, ct$  ne može se predočiti. Mogu se uzeti samo tri koordinate npr.  $x, y$  i  $ct$ . Svjetlosni signal odaslan iz ishodišta u  $t = 0$  predočuje tada stožac (crtež 1.6):

$$x^2 + y^2 - c^2 t^2 = 0$$

Os  $ct$  leži u stošcu a osi  $x$  i  $y$  izvan njega.

U vrijeme  $t = 0$  neka je čestica u ishodištu ( $x = 0, y = 0$ ). Brzina čestice manja je od brzine svjetlosti, te se staza čestice nalazi unutar svjetlosnog stošca. Na plaštu stošca  $v = c$ . Položaj čestice prije  $t = 0$  može se naći zrcaljenjem vremenske osi (prijelaz od  $ct$  u  $-ct$ ). Donji stožac predočuje prošlost a gornji budućnost.

Osnovna invarijanta Lorentzovih transformacija:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

može se uvođenjem četvrte koordinate  $x_4 = ict$  napisati u obliku:

$$x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2$$

Koordinate četverodimenzionalnog svijeta Minkowskog mogu se označiti indeksima uz varijablu  $x$ :

$$x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z \quad x_4 = ict \quad (1.17)$$

Lorentzove transformacije (1.9) izražene sa ovim koordinatama:

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x_4 \\
 x'_2 &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\
 x'_3 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\
 x'_4 &= \frac{-i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x_4
 \end{aligned}
 \tag{1.9'}$$

Koeficijenti se mogu rasporediti u kvadratičnu shemu:

$$\alpha = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \tag{1.18}$$

$$\beta = v/c$$

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Lorentzove transformacije (1.9') mogu se napisati u obliku:

$$x'_i = \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} x_j \tag{1.19}$$

U trodimenzionalnom prostoru izraz  $x^2 + y^2 + z^2$  daje kvadrat dužine i on je invarijantan prema vrtnji koordinatnog sustava. Analogno  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$  je kvadrat „dužine“ četverodimenzionalnog vektora koji se ne mijenja pri Lorentzovim transformacijama. Odatle bi slijedio zaključak da Lorentzove transformacije znače vrtnju u svijetu Minkowskog.

Jednadžbe elektrodinamike u četverodimenzionalnom prostoru

Elektromagnetsko polje može se motriteljima iz različitih sustava pojaviti na različite načine. Npr. ako elektron miruje u nekom sustavu motritelj toga sustava (koji miruje u odnosu na elektron) opazit će samo električno polje, a motritelj prema kojemu se elektron giba primijetit će i magnetsko polje.

U četverodimenzionalnom prostoru Minkowskog jednadžbe elektrodinamike mogu se napisati pomoću vektorskih i tenzorskih izraza u obliku koji je invarijantan prema Lorentzovim transformacijama.

Električno i magnetsko polje izraženo pomoću skalarnog i vektorskog potencijala:

$$\vec{E} = - \text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Komponente električnog i magnetskog polja (odnosno magnetske indukcije):

$$\begin{aligned} E_x &= - \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} & B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ E_y &= - \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} & B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ E_z &= - \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} & B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ako bi se skalarni i vektorski potencijal sakupio u jedan četvor-  
ni vektor:

$$A_1 = A_x \quad A_2 = A_y \quad A_3 = A_z \quad A_4 = \frac{i}{c} \phi$$

a za koordinate četverodimenzionalnog prostora koristile oznake (1.17) komponente električnog i magnetskog polja glasile bi:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{c} E_x &= \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} & B_x &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ -\frac{i}{c} E_y &= \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} & B_y &= \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ -\frac{i}{c} E_z &= \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} & B_z &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{aligned}$$

te bi tenzor elektromagnetskog polja bio:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} & \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} & \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} & \frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1} & \frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2} & \frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix}$$

ili uz relaciju (1.20) :

$$\begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c} E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c} E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c} E_z \\ \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_z & 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Iz tenzora elektromagnetskog polja mogu se dobiti Maxwellove jednađbe ako se elementi pojedinih redova deriviraju po pripadnim koordinatama, zbroje i stavi taj zbroj jednak nuli:

$$\sum_{j=1}^4 \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Npr. ako se uzme prvi red:

$$0 + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{i}{c} \frac{\partial E_x}{\partial ict} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

dobiva se x komponenta Maxwellove jednađbe:

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

odnosno

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Jednadžba gibanja elektrona u elektromagnetskom polju

Promotrit ćemo gibanje elektrona u elektromagnetskom polju i napisati jednadžbu gibanja u četverodimenzionalnom prostoru Minkowskog.

Trodimenzionalni vektor brzine  $\vec{v} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z$  treba zamijeniti četvornim vektorom, koji mora biti invarijantan prema vrtnjama u prostoru Minkowskog.

$$v_i = \frac{dx_i}{dt_0} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$t_0$  je vlastito vrijeme elektrona. Dok u vlastitom sustavu prodje vrijeme  $dt_0$  u sustavu prema kojemu se giba vlastiti sustav (elektron) brzinom  $v$  prodje vrijeme  $dt$ :

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Komponente četvornog vektora brzine su:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt_0} = \frac{dx_1}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt_0} = \frac{dx_2}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt_0} = \frac{dx_3}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \frac{v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(1.22)

$$v_4 = \frac{dx_4}{dt_0} = \frac{dx_4}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \frac{d(ict)}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Na osnovi do sada iznesenog mogu se napisati jednadžbe gibanja elektrona u elektromagnetskom polju u obliku:

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d^2 x_1}{dt_0^2} &= e (F_{11}v_1 + F_{12}v_2 + F_{13}v_3 + F_{14}v_4) \\ m_0 \frac{d^2 x_2}{dt_0^2} &= e (F_{21}v_1 + F_{22}v_2 + F_{23}v_3 + F_{24}v_4) \\ m_0 \frac{d^2 x_3}{dt_0^2} &= e (F_{31}v_1 + F_{32}v_2 + F_{33}v_3 + F_{34}v_4) \\ m_0 \frac{d^2 x_4}{dt_0^2} &= e (F_{41}v_1 + F_{42}v_2 + F_{43}v_3 + F_{44}v_4) \end{aligned} \tag{1.23}$$

gdje su  $F_{ij}$  komponente tenzora elektromagnetskog polja (1.21).

Napišimo prvu od jednadžbi (1.23) koristeći relaciju (1.22) i tenzor (1.21):

$$m_0 \frac{d^2 x_1}{dt_0^2} = m_0 \frac{d}{dt_0} \left( \frac{dx_1}{dt_0} \right) = m_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{dx_1}{dt_0} \right) \frac{dt}{dt_0} = m_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \frac{dt}{dt_0} =$$

$$= m_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e(B_z v_y - B_y v_z - \frac{i}{c} E_x \cdot ic) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Analogno i druge dvije. Prve tri jednađbe (1.23) će glasiti:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = e E_x + e(B_z v_y - B_y v_z)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = e E_y + e(B_x v_z - B_z v_x) \quad (1.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = e E_z + e(B_y v_x - B_x v_y)$$

a četvrta od (1.23) će poprimiti oblik:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \frac{dt}{dt_0} = i \frac{e}{c} (E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z) \frac{dt}{dt_0} \quad (1.24')$$

Usporedba relativističke jednađbe gibanja (1.24) i Newtonovog II zakona vodi do izraza za impuls elektrona:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.25)$$

Ako se impuls napiše u obliku:  $p = m v$ , onda bi iz jednačbe gibanja (1.24) proizlazilo da je masa elektrona  $m$  „promjenljiva“.

Do relacije

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Einstein dolazi u radu „Ka elektrodinamici gibajućih tijela“, Annalen der Physik 17 (1905).

Iz jednačbe (1.24') slijedi:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = e \vec{E} \vec{v}$$

Rad sile u jedinici vremena  $e \vec{E} \vec{v}$  dovodi do povećanja energije elektrona.

Izraz za energiju elektrona u gibanju:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 \quad (1.26)$$

čuvena je Einsteinova relacija o ekvivalentnosti mase i energije tijela.

O tome Einstein piše u knjizi "Relativity" (University Paperbacks, Methuen, London, 1920.): „Najvažniji rezultat općeg karaktera na koji vodi specijalna teorija relativnosti je koncepcija mase. Prije otkrića relativnosti fizika je poznavala dva zakona sačuvanja, naime, zakon sačuvanja energije i zakon sačuvanja mase. Ova dva fundamentalna zakona izgledala su sasvim nezavisna jedan od drugog. Pomoću teorije relativnosti oni su se ujedinili u jedan zakon ...” .

Iz relacije (1.26) slijedi da u relativističkoj mehanici energija čestice nije jednaka nuli ni u slučaju kada je njezina brzina jednaka nuli. Ta „energija mirovanja” tj. energija za  $v = 0$  jednaka je

$$E_0 = m_0 c^2$$

Kada su brzine čestice zanemarive  $v/c \ll 1$  razvojem u red i zanemarivanjem članova iznad drugog

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

dobiva se iz relacije (1.26) pored klasičnog izraza za kinetičku energiju i energija mirovanja čestice:

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2}$$

$(E = E_0 + E_k)$

Napomenimo da se klasični izraz za kinetičku energiju može koristiti samo u slučaju ako su brzine tijela zanemarive u odnosu na brzinu svjetlosti. Ako to nije ispunjeno, onda se kinetička energija može izračunati iz relacije:

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

Veza između energije i impulsa čestice može se dobiti iz jednadžbi (1.25) i (1.26) na slijedeći način:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^2$$

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \quad (1.27)$$

U slučaju da je impuls  $p$  znatno veći od  $m_0 c$ , relacija (1.27) bi poprimila oblik:

$$E = c p \quad (1.28)$$

Ovaj izraz je vrlo važan za Einsteinovu hipotezu o kvantima svjetlosti jer u elektrodinamici postoji relacija (1.28) između energije i impulsa elektromagnetskog vala.

### Osnovne ideje Opće teorije relativnosti

Specijalna teorija relativnosti ograničava se na gibanja bez ubrzanja - na transformacije medju inercijalnim sustavima. Inercijalni sustav idealizacija je objektivne stvarnosti - daleko od drugih tijela, lišena ubrzanja.

Od 1907. do 1915. godine Einstein radi na proširenju teorije relativnosti na ubrzana gibanja, odnosno na sve sustave. Rezultat toga je njegova Opća teorija relativnosti objavljena 1916. godine u *Annalen der Physik*, 49 (1916) 769 pod naslovom: „Osnove opće teorije relativnosti“.

Specijalna teorija relativnosti temelji se na postulatu tzv. principu relativnosti: „Ako je sustav koordinata  $K$  tako izabran da u njemu vrijede fizikalni zakoni u njihovom najjednostavnijem obliku, isti zakoni takodjer vrijede i u bilo kojem drugom sustavu koordinata  $K'$  koji se jednoliko po pravcu giba u odnosu na  $K$  sustav - piše Einstein u radu „Osnove opće teorije relativnosti“ i nastavlja - „Ovaj postulat zovemo ‚specijalni princip relativnosti‘. Riječ ‚specijalni‘ znači da je princip ograničen na slučaj kada  $K'$  izvodi jednoliku translaciju u odnosu na  $K$ , a da se ekvivalentnost  $K'$  i  $K$  ne proširuje na slučajeve nejednolikog gibanja  $K'$  u odnosu na  $K$ .“

Proširenje postulata relativnosti vodi do općeg principa relativnosti koji u formulaciji Einsteina glasi „Zakoni fizike moraju biti takve prirode, da se dadu primijeniti u koordinatnim sustavima u bilo kakvom gibanju“. Dakle, zakoni fizike moraju biti tako formulirani, da imaju isti oblik u svim sustavima, tj. u sustavima koji se proizvoljno gibaju. Ovim je obuhvaćeno gravitacijsko i sva ostala ubrzana gibanja.

U knjizi "Relativity" (Methuen, London, 1920.) Einstein postavlja pitanje „Ako ispustimo kamen i on se giba, zašto će pasti na Zemlju? Uobičajeni odgovor na ovo pitanje je: Budući

da ga je privukla Zemlja. Moderna fizika formulira odgovor različitiije. Kao rezultat pažljivijeg studija elektromagnetskih pojava odnosimo se prema djelovanju na udaljenost bez intervencije nekog intermedijarnog medija kao prema nemogućem procesu. Ako npr. magnet privlači komadiće željeza, ne možemo biti zadovoljni s tumačenjem da magnet djeluje izravno na željezo kroz prazni medjuprostor, i mi smo - poslije Faradaya - prisiljeni zamisliti da se magnet javlja preko nečeg fizikalno realnog u prostoru oko njega, nečeg što mi nazivamo magnetskim poljem ... Djelovanje Zemlje na kamen je neizravno. Zemlja proizvodi u svojoj okolini gravitacijsko polje koje djeluje na kamen i izaziva njegovo padanje ... "

Prema Newtonovu zakonu gibanja:  $\vec{F} = m \vec{a}$  (gdje je inercijska masa  $m$  karakteristična konstanta tijela koje se ubrzava). Ako je gravitacija uzrok akceleraciji, tada je:  $\vec{F} = m' \vec{g}$ , gdje je gravitacijska masa  $m'$  takodjer karakteristična konstanta za tijelo, a  $g$  intenzitet gravitacijskog polja. Iz tih dviju relacija slijedi:

$$a = \frac{m'}{m} g$$

Odatle Einstein zaključuje „Gravitacijska masa tijela jednaka je njezinoj inercijskoj masi“ ("Relativity", ibid). Ovo je bilo poznato i prije Einsteina, ali kako kaže Einstein „nije bilo interpretirano. Zadovoljavajuća interpretacija može biti dobivena samo ako se uzme u obzir slijedeća činjenica: Isti kvalitet tijela manifestira se, prema okolnostima, kao ,inercija' ili kao ,težina' ... "

Promotrimo eksperiment koji je zamislio Einstein ... U praznom prostoru udaljenom od zvijezda i drugih većih tijela ispunjeni su aproksimacijski uvjeti za primjenu Newtonovih zakona. Za taj dio prostora moguće je odabrati Galileiev referentni sustav prema kojemu će tijelo mirovati ili se gibati jednoliko po pravcu.

Zamislimo u tom prostoru kabinu obješenu na kuku preko užeta unutar koje se nalazi motrilac. Ovaj motrilac ne bi u kabini imao težinu. Za njega gravitacija ne postoji. Ako bi „netko“ vukao kabinu stalnom silom u smjeru prema objesištu, onda bi motrilac izvan kabine ustanovio jednoliko ubrzano gibanje kabine u smjeru prema objesištu pod djelovanjem sile  $m \vec{a}$ . Ako bi primijenjena sila davala kabini ubrzanje jednako akceleraciji sile teže, motrilac bi se u kabini osjećao kao u području djelovanja gravitacijske sile  $m \vec{g}$ . Sva ispuštena tijela padala bi s konstantnom akceleracijom (slobodni pad).

„Imamo dobre temelje za proširenje principa relativnosti na sustave koji se ubrzavaju jedan prema drugom“ ... „Mi moramo uočiti da se mogućnost ovog načina interpretiranja zasniva na fundamentalnom svojstvu gravitacijskog polja da daje svim tijelima jednaku akceleraciju, ili, što je isto, na zakon ekvivalentnosti inercijske i gravitacijske mase“ (Einstein "Relativity", ibid).

Slično je i u raketi koja se giba kroz svemir daleko od drugih tijela. Ako se raketa giba jednoliko, ljudi bi se u njoj osjećali bez težine i lebdjeli bi. Ako bi neki mehanizam počeo ubrzavati raketu, putnici bi počeli padati na suprotnu stranu i mogli bi zaključiti da se pojavilo gravitacijsko polje koje uzrokuje njihovo padanje.

Još jedan primjer. Ljudi u liftu koji miruje ili se jednoliko giba osjećaju da su teški (tlak na pod lifta). Ako bi puklo uže - slobodno padanje - njihova bi težina prividno iščezla (ubrzanje -  $\vec{g}$ ) i oni bi lebdjeli, te bi mogli zaključiti da je gravitacijsko polje iščezlo.

Navedeni primjeri pokazuju da je gravitacijsko polje ekvivalentno polju koje potječe od pogodno ubrzanog sustava. Ono se može stvoriti ili poništiti pogodnim ubrzavanjem sustava.

Ovu ekvivalentnost gravitacijskog polja i polja koje potječe od ubrzanog gibanja sustava Einstein je nazvao princip ekvivalencije. Osniva se na ekvivalentnosti gravitacijske i trome mase.

U Newtonovoj mehanici gibaju se čestice na koje ne djeluju sile po pravcima. U prostoru gravitacijskog polja putanje čestica su zakrivljene linije. Po Einsteinu te putanje mogu se smatrati geodetskim linijama u zakrivljenom prostoru. Einstein je došao do zaključka da se u Općoj teoriji relativnosti mora napustiti Euklidova geometrija i umjesto nje uzeti Riemannova geometrija u četverodimenzionalnom prostoru Minkowskog. Riemann je razvio geometriju zakrivljenih prostora u kojoj umjesto pravaca dolaze geodetske linije kao najkraće spojnice točaka. Riemannov prostor može se prodočiti dvodimenzionalno nekom zakrivljenom plohom. Zakrivljenost plohe određena je po Općoj teoriji relativnosti gravitacijom. Gravitacija postaje geometrijsko svojstvo prostorno-vremenskog kontinuuma, uklopljena u metriku četverodimenzionalnog svijeta.

Samo u beskonačno malim područjima prostora Minkowskog, Riemannova geometrija (neeuklidska) svodi se na euklidsku.

U prilog Opće teorije relativnosti idu pojave otklona svjetlosne zrake u gravitacijskom polju, pojava zakretanja Merkurova perihela, pomak spektra linija prema crvenom dijelu spektra koje su opažene, a koje slijede iz jednadžbi Opće teorije relativnosti.

## 2. UVOD U VALNU MEHANIKU

Klasična mehanika i klasična elektrodinamika nisu uspjele objasniti atomske pojave. Prvi lom klasičnih koncepcija nastao je pri pokušaju tumačenja zračenja crnog tijela. Rayleigh-Jeansov zakon nagovještavao je „katastrofu“ klasične fizike. Po klasičnoj fizici atomi - harmonički oscilatori - mogu kontinuirano mijenjati svoju energiju. M. Planck 1900. g. uvodi smionu hipotezu prema kojoj energija harmoničkog oscilatora može biti samo cijeli broj odredjenih kvantata energije. A. Einstein je na osnovi Planckove hipoteze objasnio fotoelektrički efekt, a N. Bohr dao je 1913. g. tumačenje emisije spektra vodika ... Bili su udareni temelji kvantne teorije.

Kvantna teorija uspjevala je protumačiti spektar vodikovih atoma i vodiku sličnih atoma, rendgenske zrake, Starkov efekt ... Teškoće su nastale pri proračunu helijeva spektra i pri pokušaju primjene na kemijske spojeve. Izlaz iz te situacije dao je W. Heisenberg. Njegov rad temelji se na kritičkoj analizi stare kvantne teorije.

1925. g. W. Heisenberg (Z. Physik 33, 1925, 879) zabacio je predodžbu o stazama elektrona u atomu i pošao sa stajališta da teorija atomnih procesa mora promatrati frekvencije i amplitude (intenzitete) svjetlosti kao jedino fizički stvarne. Klasičnim veličinama odgovaraju u Heisenbergovoj kvantnoj mehanici pri-padne matrice. Matrice sa svojim elementima-frekvencijama  $\nu_{nm}$  i amplitudama  $a_{nm}$  - daju podatke o prijelazima elektrona iz stacionarnog stanja  $n$  u stacionarno stanje  $m$  atoma. Temeljna je zadaća Kvantne mehanike, po Heisenbergu, odredjivanje matrice nekog atoma. Rezultati kvantno-teorijskih proračuna mogu se zorno interpretirati usporedbom matrica s klasičnim veličinama.

1926. g. E. Schrödinger je objavio valnu jednadžbu do koje je došao na osnovi Broglieove teorije, a malo kasnije uspio

je pokazati da se iz Valne mehanike mogu proračunati Heisenbergove matrice. Time je udario put utvrdjivanju identiteta Heisenbergove matrične mehanike i njegove Valne mehanike. Taj identitet formulirao je Dirac. Kvantna mehanika javlja se u dvije ekvivalentne formulacije: Matrična mehanika i Valna mehanika.

### De Broglieovi valovi materije

Schrödingerova valna mehanika temelji se na radovima L.de Brogliea. U svojoj disertaciji 1924.g. (Ann. Physique 3(1925)22) L.de Broglie iznio je pretpostavku da je valno-čestična dualnost svojstvo svih mikroskopskih čestica. Čestice kao i svjetlost posjeduju valna i korpuskularna svojstva.

De Broglie je pretpostavljajući postojanje prirodne simetrije, smatrao da bi čestice ukupne energije  $E$  i količine gibanja  $p$  trebale biti praćene valom analogno kao fotoni čija je frekvencija  $\nu = E/h$ , a valna dužina  $\lambda = h/p$ .

Rad L. de Brogliea bio je motiviran misterijom Bohrovih orbita. Pokušao ih je rastumačiti slaganjem stojnih valova oko opsega pojedine putanje.

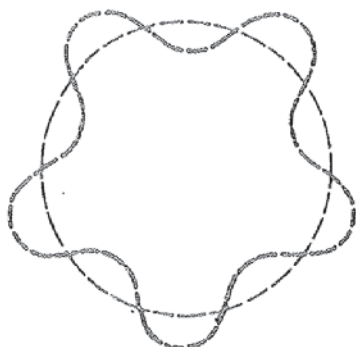
Kombinacijom uvjeta:

$$n \lambda = 2r\pi \quad (2.1)$$

(gdje je valna dužina pridružena  $n$ -toj orbiti, a  $r$  polumjer te orbite, crtež 2.1):

sa

$$m v r = n \frac{h}{2\pi}$$



Crt.2.1. Putanja i stojni val elektrona

dobiva se:

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{h}{p} \quad (2.2)$$

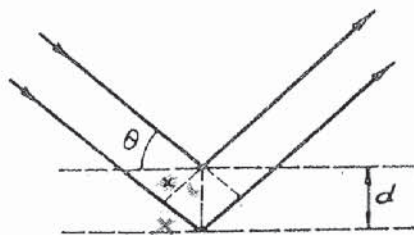
De Broglieova relacija  $\lambda = h/p$  jedan je od stupova moderne kvantne teorije. Ona vrijedi za fotone, relativističke i nerelativističke čestice. Dualnost čestica-val osnovna je osobina prirode.

Relacija  $n\lambda = 2r\pi$ , odnosno  $n \frac{h}{p} = 2r\pi$  ekvivalentna je uvjetu kvantizacije momenta količine gibanja u staroj kvantnoj teoriji:  $L = mvr = nh/2\pi$ .

#### Davisson-Germerov eksperiment

Davisson i Germer prvi su 1927.g. iznijeli dokaze o valnim svojstvima katodnih zraka (Phys.Rev. 30 (1927) 705). Oni su katodne zrake (dobivene iz zagrijane katode) ubrzavali naponom od pedesetak volti i promatrali ogibne pojave pri refleksiji i prolazu katodnih zraka kroz kristal nikla.

Opazili su da pri refleksiji katodnih zraka na kristalu nikla do pojačanja dolazi samo kod određenih kutova  $\theta$  koji udovoljavaju Braggovom uvjetu:



*putanja katodnog zraka*

$$\delta = 2x = 2 d \sin \theta = n\lambda \quad (2.3)$$

$$n = 1, 2, 3 \dots$$

Crt.2.2. Refleksija katodnih zraka na sukcesivnim ravninama kristala

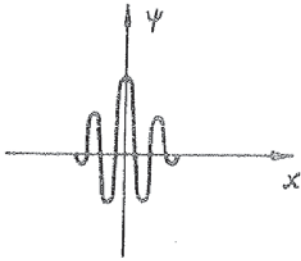
Kad je ovaj uvjet ispunjen, valovi raspršeni na nizovima atoma su u fazi - dolazi do pojačanja (konstruktivna interferencija). Usporedba valne dužine dobivene iz relacije (2.3) s valnom dužinom iz de Broglieove relacije (2.2) dala je odlično slaganje.

### Čestice i valni paketi

Ravni valovi  $e^{i(kx-\omega t)}$  nisu lokalizirani u prostoru. Prostiru se od  $-\infty$  do  $+\infty$ , te nisu pogodni za predočivanje čestica. Valni paketi mnogo su pogodniji. Valni paket je valno gibanje manje-više lokalizirano u prostoru. Može se dobiti superpozicijom sinuisodalnih valova:

$$\psi(x, t) = \sum_n A_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}$$

Pogodnim odabiranjem sinusoidalnih valova može se postići konstruktivna interferencija na određenom mjestu u prostoru a destruktivna na ostalim mjestima (crtež 2.3).



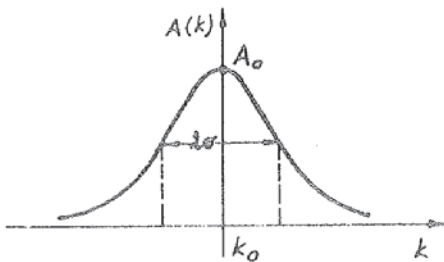
Ako je razdioba valnih brojeva  $k$  i frekvencija  $\omega$  kontinuirana:

$$\psi(x,t) = \int A(k) e^{i(kx-\omega t)} dk \quad (2.4)$$

Crt.2.3. Valni paket

gdje je  $A(k)$  amplituda pojedine komponente vala.

Bilo koja funkcija može se napisati kao superpozicija sinusoidalnih funkcija (Fourierova analiza).



Neka funkcija  $A(k)$  ima oblik (crtež 2.4):

$$A(k) = A_0 e^{-a^2(k-k_0)^2} \quad (2.5)$$

Crt.2.4. Grafički prikaz  
jednadžbe (2.5)

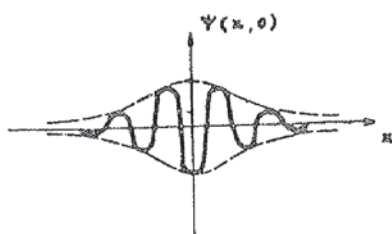
$\Delta k$  - područje valnih brojeva za koje je funkcija različita od nule

$A_0$  - maksimalna vrijednost funkcije

$a$  - karakterizira širinu krivulje (širina za ovakvu krivulju  $a$  definira se kao interval u varijabli  $k$  u kojemu funkcija padne od maksimalne vrijednosti  $A_0$  do  $e^{-1/2} A_0$ )

Tada će valna funkcija (2.4) u određenom trenutku npr.  $t = 0$  biti jednaka:

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_0 e^{-a^2(k-k_0)^2} e^{ikx} dk = \\ &= \frac{A_0 \sqrt{\pi}}{a} e^{-x^2/4a^2} e^{ik_0 x} \end{aligned} \quad (2.4')$$



Crt.2.5. Grafički prikaz realnog dijela jednadžbe (2.4')

to je sinusoidalni val  $e^{ik_0 x}$  moduliran anvelopom

$$e^{-x^2/4a^2}$$

koja ga lokalizira u prostoru.

Parametar  $a$  određuje širinu anvelope valnog paketa. Ako je  $a$  manji, valni paket je bolje lokaliziran ( $\Delta x$  je manji).

Faznu i grupnu brzinu za valove materije može se izračunati koristeći de Broglieovu hipotezu da su energija i količina gibanja povezane s frekvencijom i valnom dužinom sljedećim relacijama:

$$p = h/\lambda = \hbar k \quad E = h\nu = \hbar\omega$$

Za nerelativističko gibanje veza između  $E$  i  $p$  je:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \text{ili} \quad \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

a odatle se za faznu brzinu i grupnu brzinu dobiva:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m} = \frac{1}{2} v$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v$$

Fazna brzina nema fizičkog značenja. Grupna brzina tj. brzina širenja valnog paketa jednaka je brzini čestice.

### Heisenbergove relacije neodređenosti

U klasičnoj mehanici gibanje neke čestice potpuno je opisano ako je poznat položaj i brzina čestice u svakom trenutku. Točno određena brzina (količina gibanja) odgovara u valnoj slici valu s točno određenom valnom dužinom:  $\lambda = h/p$ . Val s točno određenom valnom dužinom je ravni val koji se širi po čitavom prostoru. Čestica određene brzine ima u valnoj slici potpuno neodređen položaj u prostoru. Ako se želi prikazati da se čestica nalazi u nekom malom području treba izgraditi val koji intenzivno titra samo u tom malom području a izvan toga iščezava. Takav val nastaje sumiranjem vrlo mnogo ravnih valova različitih valnih dužina. Valovima različitih valnih dužina odgovaraju različite brzine elektrona. Time što se čestica ograničava na malo područje, brzina čestice postaje neodređena. Ako se valni paket proteže preko područja  $\Delta x$ , vrijednosti valnih brojeva  $k$  valova koji interferiraju, a koji sastavljaju valni paket, padaju unutar intervala  $\Delta k$  takvog da prema Fourierovoj analizi:

$$\Delta x \Delta k \approx 2\pi$$

odnosno uz  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{p}{h}$  ili  $\Delta k = 2\pi \frac{\Delta p}{h}$

$$\Delta x \Delta p \approx h \quad (2.6)$$

Relacija (2.6) daje vezu između neodređenosti položaja i količine gibanja za optimalni slučaj. U većini slučajeva  $x$  i  $p$  poznati su s manje sigurnosti:

$$\Delta x \Delta p \gtrsim h \quad (2.7)$$

To je relacija neodređenosti koju je otkrio Werner Heisenberg 1927. godine (Z. Physik 43 (1927) 172). Ona izražava da je principijelno nemoguće istovremeno točno ustanoviti brzinu i položaj čestice. Umnožak neodređenosti u položaju i u količini gibanja reda je veličine Planckove konstante. Ako je položaj čestice neodređen za  $\Delta x$ , tada je količina gibanja neodređena za  $\Delta p$ , a pri tome  $\Delta p$  ne može biti manji od  $h/\Delta x$ . Nemoguće je istodobno mjeriti položaj i količinu gibanja čestice točnije nego što dopušta Heisenbergova relacija neodređenosti.

Razmotrimo eksperiment koji je zamislio Heisenberg. Elektron promatramo mikroskopom. Osvjetlimo ga svjetlošću valne dužine  $\lambda$ . Moć razlučivanja mikroskopa zavisi o valnoj dužini. Položaj elektrona će biti to bolje određen, što je manja valna dužina. Ako bi se upotrebio elektromagnetski val dovoljno male valne dužine, moglo bi se postići vrlo točno određivanje položaja. Ali kvant elektromagnetskog vala (koji se od elektrona reflektira i vraća u objektiv) pri sudaru prenese na elektron određenu količinu gibanja (Comptonovo raspršenje) i to veću što je valna dužina elektromagnetskog vala manja. Dakle, što je valna dužina elektromagnetskog vala manja, točnije je određivanje položaja, a time se više promijeni količina gibanja elektrona, i nesigurnost u određivanju brzine postaje veća.

Ako se želi odrediti vrijeme u kojem čestica prolazi kroz danu točku, mora se čestica reprezentirati s valnim paketom koji ima vrlo kratko trajanje  $\Delta t$ . Da bi se to postiglo trebalo bi imati superpoziciju valova različitih frekvencija s amplitudom znatnom samo u intervalu frekvencije  $\Delta \omega$  tako da prema Fourierovoj analizi:

$$\Delta t \Delta \omega \approx 2\pi$$

ili uz  $E = \hbar\omega$  odnosno  $\Delta E = \hbar\Delta\omega$

$$\Delta t \Delta E \approx h$$

Ovo je za optimalni slučaj. U većini slučajeva vrijeme i energija poznate su s manje sigurnosti, te je općenitija relacija:

$$\Delta t \Delta E \gtrsim h \quad (2.8)$$

Umnožak neodređenosti u energiji i vremenu je barem veličine Planckove konstante. Bilo koji pokušaj preciznog određivanja energije zahtijeva neko konačno vrijeme  $\Delta t$  koje je povezano s nesigurnošću energije  $\Delta E$  relacijom (2.8).

Relacija (2.8) zahtijeva izvjesnu reviziju naše koncepcije stacionarnog stanja. Elektron iz pobudjenog stacionarnog stanja prelazi u stacionarno stanje niže energije. Ne zna se točno koliko će dugo elektron ostati u pobudjenom stanju tj. koliko je vrijeme života stanja. Može se jedino govoriti o vjerojatnosti u jedinici vremena da elektron skoči u niže energijsko stanje. Vrijeme života stanja poznato je unutar neodređenosti  $\Delta t$ . Dakle, energija stacionarnog stanja elektrona nije poznata preciz-

no nego ima neodredjenost  $\Delta E$  prema relaciji (2.8). Često se  $\Delta E$  označava kao energijska širina stanja čija je energija između  $E - \frac{1}{2} \Delta E$  i  $E + \frac{1}{2} \Delta E$ .

Heisenbergov princip neodredjenosti jedan je od osnovnih principa kvantne mehanike. Radovi Heisenberga - otkriće kvantne mehanike i princip neodredjenosti - svrstavaju Heisenberga među one velike znanstvenike koji su otvorili nov način mišljenja i spoznavanja prirode.

### Schrödingerova valna jednačina

Mehanički valovi mogu se opisivati valnom jednačinom

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

koja proizlazi iz Newtonove jednačine gibanja.

Elektromagnetski valovi mogu se opisati jednačinama

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

koje proizlaze iz Maxwellovih jednačina.

Ne postoji opći princip koji bi odgovarao Newtonovim zakonima ili Maxwellovim jednačinama iz kojeg bi se mogla izvesti jednačina valova materije. Ipak, izgleda razumno njeno postojanje...

Objavljivanje de Broglieove valne hipoteze izazvalo je veliki broj diskusija kako u raznim evropskim centrima, tako i u Zürichu. Ugledni fizikalni kemičar Debye sugerirao je mladom fizičaru Ervinu Schrödingeru da načini pažljivu studiju de Broglieove teorije i izloži je na seminaru. U toku ove studije Schrödinger je razvio valnu jednačbu koja sada nosi njegovo ime. Objavio ju je u Ann. Physik 79, 361(1926).

Gibanje slobodne čestice ( $U = 0$ ) određene količine gibanja  $p$  može se predočiti ravnim valom:

$$\psi(x,t) = A e^{i(kx-\omega t)} \quad k = 2\pi/\lambda \quad \omega = 2\pi\nu$$

Ukupna energija čestice:  $E = p^2/2m$

te u valnoj slici vrijedi:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Za valnu funkciju  $\psi(x,t)$  mora biti ispunjeno da je:

$$\hbar\omega e^{i(kx-\omega t)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} e^{i(kx-\omega t)} \quad (2.9)$$

Jednačba (2.9) može se napisati u obliku:

$$i\hbar(-i\omega) e^{i(kx-\omega t)} = -\frac{\hbar^2}{2m}(ik)^2 e^{i(kx-\omega t)}$$

koji je ekvivalentan sa:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{i(kx-\omega t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{i(kx-\omega t)}$$

odnosno ako je  $\psi(x,t) = A e^{i(kx-\omega t)}$  sa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.10)$$

Valna funkcija  $\psi(x,t) = A e^{i(kx-\omega t)}$  (sinusoidalni val) zadovoljava diferencijalnu jednađbu (2.10). Bilo koji val može se prikazati kao superpozicija sinusoidalnih valova. Ako je svaki sinusoidalni val rješenje jednađbe (2.10) može se pokazati da je suma takvih rješenja takodjer rješenje jednađbe. Razumno je pretpostaviti da jednađbu (2.10) mora zadovoljavati svaka valna funkcija koja opisuje fizikalno moguće stanje čestice.

Jednađba (2.10) je vremenski zavisna Schrödingerova valna jednađba. Ona ima značaj u kvantnoj mehanici analogan Newtonovoj jednađbi gibanja u klasičnoj mehanici.

Schrödingerova jednađba (2.10) vrijedi za slobodne čestice. Ako je potencijalna energija čestice  $U(x)$ , jednađba bi bila oblika:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.10')$$

U slučaju valova određene frekvencije (odnosno energije) koji opisuju stacionarna stanja, rješenja valne jednađbe mogu se pisati u obliku:

$$\psi(x,t) = u(x) e^{-i\omega t} = u(x) e^{-i\frac{E}{\hbar} t} \quad (2.11)$$

Valne funkcije stacionarnih (stojnih) valova imaju separirane vremenske i prostorne varijable.

Uvrštavanjem valne funkcije (2.11) u jednadžbu (2.10') dobiva se:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} + U(x) u = Eu \quad (2.12)$$

Ovo je vremenski nezavisna Schrödingerova jednadžba. Ona se primjenjuje za opis stanja čestica/konstantne ukupne energije npr. čestice vezane određenim potencijalom u nekom području prostora (vezane čestice).

Schrödingerova jednadžba (2.10') i (2.12) napisana u tri dimenzije:

$$\nabla^2 \psi - \frac{2m}{\hbar^2} U(x, y, z) \psi = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\nabla^2 u - \frac{2m}{\hbar^2} U(x, y, z) u = - \frac{2m}{\hbar^2} E u$$

### Valna funkcija i gustoća vjerojatnosti

Rješenja Schrödingerove jednadžbe pisana su općenito u kompleksnom obliku, te fizikalni smisao dobivaju ako se iz kompleksnih valnih funkcija izgrade realne veličine. Umnožak  $\psi$  i njene konjugirane kompleksne veličine  $\psi^*$  pozitivna je realna veličina:  $\psi\psi^* = |\psi|^2$ . U svojim prvim radovima Schrödinger je za ovaj izraz pretpostavio vrlo jednostavno značenje. Zabacivši sliku elektrona kao točke predočio ga je električnim oblakom čija bi gustoća naboja bila dana sa  $e\psi\psi^*$ . Ovo shvaćanje nailazilo je na poteškoće pri tumačenju mnogih pojava (npr. pri prijelazu iz područja jednog potencijala u drugi: lom i refleksija ...)

Born je 1926. godine uveo novu interpretaciju valne funkcije. Zadržao je sliku elektrona kao točkastog naboja, a izraz  $\psi\psi^*$  odnosno  $uu^*$  bi po Bornu imao značenje vjerojatnosti da se na nekom mjestu prostora nađe elektron. Ova statistička interpretacija vala materije rasvjetljuje pojavu interferencije i ogiba. Tamna i svijetla mjesta u interferencijskoj slici pokazuju kako su često na ta mjesta padali elektroni. Interferencijska slika daje uvid u vjerojatnost padanja elektrona na određena mjesta.

Vjerojatnost nalaženja čestice u jedinici volumena ili gustoća vjerojatnosti nalaženja jednaka je:

$$P = |u(x,y,z)|^2$$

a vjerojatnost nalaženja čestice u volumenu V:

$$P_V = \int_V |u(x,y,z)|^2 dV$$

Vjerojatnost nalaženja čestice u prostoru - uvjet normiranja valne funkcije:

$$\int_{\text{čitav prostor}} |u(x,y,z)|^2 dV = 1$$

Izražava da se čestica mora nalaziti negdje u prostoru.

Poznavajući valnu funkciju  $u(x,y,z)$  može se iz  $|u|^2$  zaključiti na vjerojatnost nalaženja čestice na određenom mjestu prostora odnosno u slučaju snopa čestica na prosječni broj čestica na tom mjestu ili na intenzitet promatranog snopa.

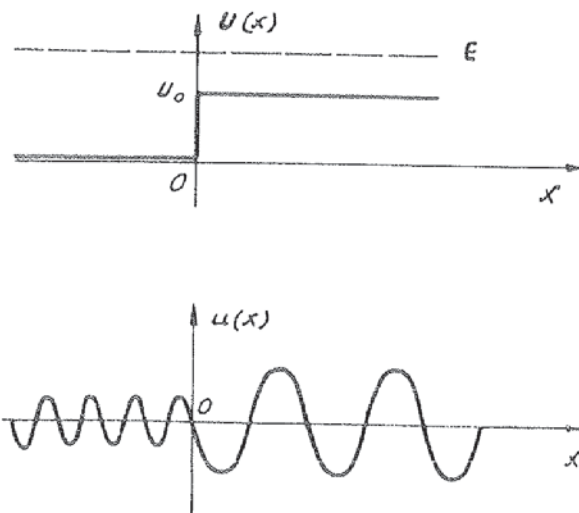
### Potencijalni bedem

Promotrimo što se događa kada snop nabijenih čestica npr. elektrona naiđe na promjenu potencijala tzv. potencijalni bedem visine  $U_0$  i beskonačne dužine.

Valna dužina nabijenih čestica zavisi o potencijalu.

Budući da je  $\lambda = h/p$ , a ukupna energija  $E = p^2/2m + U_0$ , to je  $p = \sqrt{2m(E - U_0)}$ , te je  $\lambda = h/\sqrt{2m(E - U_0)}$

Promjena valne dužine svjetlosti uvjetovana je različitom optičkom gustoćom sredstva kroz koje svjetlost prolazi, a valna dužina valova materije različitim potencijalima sredstva. Pojavi refleksije i loma svjetlosti na granici sredstava odgovara kod nabijenih čestica nailaženje na nagli skok potencijala.



Crt.2.6. Širenje vala prema potencijalnom bedemu ( $U_0 < E$ )

U području "1" ( $x \leq 0$ ,  $U = 0$ ) čestice su slobodne:

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

Valna dužina valova materije:  $\lambda = h/\sqrt{2mE}$  ,

a valni vektor:  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi\sqrt{2mE}/h = \sqrt{2mE}/\hbar$

Schrödingerova jednađba:  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} = E u$

Rješenje te diferencijalne jednađbe su valne funkcije:

$e^{ikx}$  i  $e^{-ikx}$ . Valna funkcija  $e^{ikx}$  reprezentira slobodnu česticu količine gibanja  $p = \hbar k$ , energije  $E = p^2/2m$  koja se giba u  $+x$  pravcu, a valna funkcija  $e^{-ikx}$  slobodnu česticu iste količine gibanja i energije, a koja se giba u pravcu  $-x$ .

Opće rješenje gornje jednađbe može se pisati kao linearna kombinacija rješenja  $e^{ikx}$  i  $e^{-ikx}$ :

$$u(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad \text{ravni val}$$

Kada val naidje na skok potencijala, jedan će se dio reflektirati, a drugi će ući u područje "2". Dakle, u području "1" bit će upadni val  $e^{ikx}$  i reflektirati val  $e^{-ikx}$ .

U području "2" ( $x \geq 0$ ) širi se val materije s promijenjenom valnom dužinom:

$$\lambda' = h / \sqrt{2m(E - U_0)} \quad ,$$

i valnim vektorom:  $k' = 2\pi/\lambda' = \sqrt{2m(E - U_0)} / \hbar$

Schrödingerova jednađba će glasiti:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} + U_0 u = E u$$

Rješenje ove diferencijalne jednačbe je:

$$u_2 = C e^{ik'x} \quad \text{transmitirani val}$$

Jednačbe valova iz područja "1" i "2":

$$\begin{aligned} \text{upadni val:} & \quad u_u = A e^{ikx} \\ \text{reflektirani val:} & \quad u_r = B e^{-ikx} \\ \text{transmitirani val:} & \quad u_t = C e^{ik'x} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Amplitude  $A$ ,  $B$  i  $C$  mogu se odrediti primjenom rubnih uvjeta (uvjeti kontinuiteta kod  $x = 0$ ). Potencijal ima skok u ishodištu od 0 do  $U_0$ , ali valna funkcija i njena prva derivacija po  $x$  mora ostati neprekidna. Iznenadni skok valne funkcije u  $x = 0$  značio bi iznenadni porast nagiba  $du/dx$ , i vrijednost  $d^2u/dx^2$  bi postala tako velika kao da je u toj točki nedefinirana.

Dakle, valna funkcija mora zadovoljavati slijedeće rubne uvjete:

$$u_u + u_r = u_t \Big|_{x=0} \quad (2.14)$$

$$\frac{du_u}{dx} + \frac{du_r}{dx} = \frac{du_t}{dx} \Big|_{x=0}$$

Uvjeti (2.14) primijenjeni na (2.13) daju:

$$A + B = C$$

$$ikA - ikB = ik' C$$

Odatle slijedi:

$$B = \frac{k - k'}{k + k'} A \quad C = \frac{2k}{k + k'} A$$

Koeficijent refleksije izražava koliko se upadnih čestica reflektiralo odnosno kolika je vjerojatnost refleksije:

$$R = v_{BB}^* / v_{AA}^* = \left( \frac{k - k'}{k + k'} \right)^2$$

analogno koeficijent transmisije

$$T = v'_{CC}^* / v_{AA}^* = \frac{4kk'}{(k+k')^2}$$

$$T + R = 1 \quad (\text{sačuvanje broja čestica})$$

U slučaju da je  $E = U_0$ ,  $k' = 0$ ,  $T = 0$ , sve bi se čestice reflektirale.

Kada je ukupna energija  $E < U_0$ , po klasičnoj teoriji čestica ne bi mogla ući u područje "2" jer je tu kinetička energija negativna. U valno-mehaničkoj slici to je moguće. Rješenje Schrödingerove jednadžbe u ovom slučaju je kombinacija funkcija  $e^{\gamma x}$  i  $e^{-\gamma x}$ :  $u_2 = C e^{-\gamma x} + D e^{\gamma x}$ .

Funkcija  $e^{\gamma x}$  nije fizikalno prihvatljiva jer ona s povećanjem  $x$  raste bez granica, a to je nerealno. Stoga je rješenje jednadžbe:

$$u_2 = C e^{-\gamma x} \quad (\text{funkcija eksponencijalno opada})$$

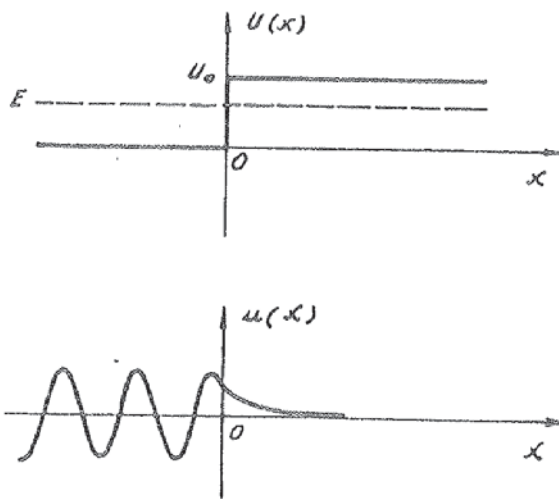
U području "2" valna dužina i valni broj poprimaju izraz:

$$\lambda' = h / \sqrt{2m(E - U_0)} = h / i \sqrt{2m(U_0 - E)}$$

$$k' = 2\pi/\lambda' = 2\pi i \sqrt{2m(U_0 - E)}/h = i \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar = i\gamma$$

gdje je:

$$\gamma = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$$

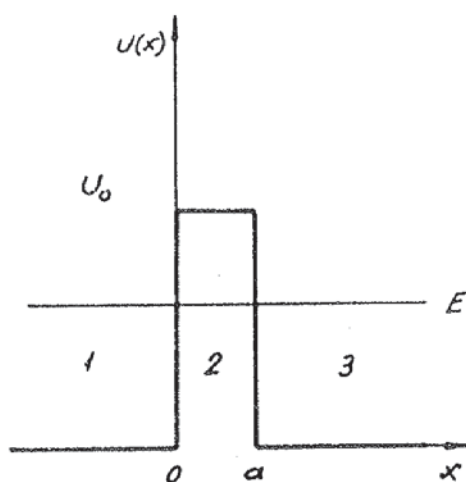


Crt.2.7. Širenje vala prema potencijalnom bedemu ( $U_0 > E$ )

Val materije prodire u područje negativne kinetičke energije a njegova amplituda eksponencijalno trne.

### Tunel efekt

Ako potencijalni bedem nije beskonačno dug nego ima određenu duljinu  $d$ , tada čestica, ako ima energiju  $i$  manju od visine barijere  $U_0$ , može proći kroz barijeru i naći se s druge strane potencijalnog brijega. Ta se pojava naziva tunel-efekt. Opažena je u mikro-svijetu atoma i molekula.



Crt.2.8. Tunel efekt

Valna funkcija u području "1" ( $x < 0$ ) je:

$$u_1 = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

gdje je  $k = 2\pi/\lambda = \sqrt{2mE} / \hbar$ ,  $e^{ikx}$  upadni val, a  $e^{-ikx}$  reflektirani val.

Valna funkcija u području "2" ( $0 \leq x \leq d$ ):

$$u_2 = D e^{-\gamma x} + F e^{\gamma x}$$

$$k' = 2\pi/\lambda' = \sqrt{2m(E - U_0)} / \hbar = i \sqrt{2m(U_0 - E)} / \hbar ; \quad k' = i\gamma$$

Valna funkcija u području "3" ( $x > d$ ):

$$u_3 = C e^{ikx} \quad \text{transmitirani val}$$

Funkcije se moraju glatko spojiti na obje granice, te moraju biti ispunjeni uvjeti o neprekinutosti valne funkcije i prvih derivacija na mjestima  $x = 0$  i  $x = d$ . Iz tih uvjeta slijedi:

$$\text{kod } x = 0 \quad A + B = D + F$$

$$ik(A - B) = (-D + F)\gamma$$

$$\text{kod } x = d \quad D e^{-\gamma d} + F e^{\gamma d} = C e^{ikd}$$

$$\gamma (-D e^{-\gamma d} + F e^{\gamma d}) = ikC e^{ikd}$$

Odatle proračuni daju da je koeficijent refleksije:

$$R = \frac{v_{BB}^*}{v_{AA}^*} = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{k} + \frac{k}{\gamma}\right)^2 \text{sh}^2 \gamma d}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{k} + \frac{k}{\gamma}\right)^2 \text{sh}^2 \gamma d} \quad (2.15)$$

a koeficijent transmisije:

$$T = \frac{v_{CC}^*}{v_{AA}^*} = [1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{k} + \frac{k}{\gamma}\right)^2 \text{sh}^2 \gamma d]^{-1} \quad (2.16)$$

Za  $\gamma d \gg 1$  vrijedi aproksimacijska formula:

$$T = 16 \left(\frac{\gamma}{k} + \frac{k}{\gamma}\right)^{-2} e^{-2\gamma d} \quad (2.16')$$

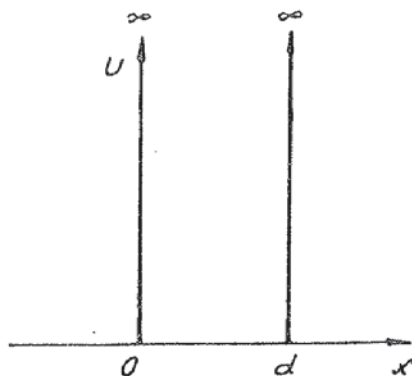
Koeficijent transmisije eksponencijalno opada sa širinom brijega  $d$ , masom čestice  $m$  i relativnom visinom  $U_0 - E$ . Kada je barijera široka (veliki  $d$ ), transmisija je mala, i skoro se sav val reflektira. Ako je  $d$  vrlo malo, tada je  $\text{sh}^2 \gamma d$  vrlo malo i  $T \approx 1$  te skoro sav val prolazi kroz brijeg.

Ovo „tuneliranje“ kroz potencijalni brijeg opaženo je eksperimentalno. Alfa čestice iz radioaktivne tvari emitiraju se na taj način. Na tom principu tumači se rad tunel-dioda u kojoj elektroni prolaze kroz područje negativne kinetičke energije putujući iz jednog dijela diode u drugi.

U ovim razmatranjima čestice su opisivane ravnim valom. Nešto složeniji su proračuni kad bi se opisivale valnim paketom. Kada valni paket naidje na potencijalni brijeg, postoji konačna vjerojatnost da se pojavi iza brijega. Kada se opisuje nailazak jedne čestice na potencijalni brijeg, onda bilo da se opisuje ravnim valom ili valnim paketom koeficijenti  $R$  i  $T$  daju vjerojatnost da će čestica proći kroz brijeg ili se reflektirati. Ako se promatra snop čestica koji nailazi na potencijalni brijeg, onda ovi koeficijenti daju vjerojatnost da neke čestice prodju kroz brijeg, odnosno daju broj čestica koje prodju kroz brijeg. Ako je energija manja od visine potencijalne barijere, što je debljina barijere veća, to će manje čestica proći - intenzitet transmitiranog snopa bit će manji.

### Potencijalna jama

Promotrimo slučaj vezane čestice koja se giba po osi  $x$  između dva potencijalna zida, čije je gibanje ograničeno unutar jednodimenzionalne potencijalne jame širine  $d$  (unutar područja  $x = 0$  i  $x = d$ )



Crt. 2.9. Jednodimenzionalna potencijalna jama

Slično kao elektroni u metalu ili molekule idealnog plina u komori čestice se gibaju slobodno dok ne udare u zid koji ih prisiljava da se vrate natrag.

Potencijalna energija u jami (za  $0 < x < d$ ) jednaka je nuli, a kod  $x = 0$  i  $x = d$  oštro raste do beskonačne vrijednosti.

U području izvan jame:  $d < x < \infty$ , gdje je  $U = \infty$ , valna je funkcija jednaka nuli, tj.  $u(x) = 0$ . Čestica s konačnom energijom ne može izići izvan ovakove potencijalne jame.

Schrödingerova jednačba u području  $0 < x < d$  gdje je  $U = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = E u(x)$$

ili

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k^2 u(x) = 0$$

gdje je valni vektor  $k = \sqrt{2m E}/\hbar$ .

Budući da se čestica giba naprijed i natrag između  $x = 0$  i  $x = d$ , valna je funkcija kao i kod potencijalnog bedema dana sa:

$$u(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

Granični uvjeti zahtijevaju da je:

$$u(x) = 0 \quad \text{kod} \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = d$$

Tada je  $u(x=0) = A + B = 0$  ili  $A = -B$  te je:

$$u(x) = A (e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2i A \sin kx$$

$$u(x) = C \sin kx \tag{2.17}$$

Granični uvjeti kod  $x = d$  daju:

$$u(x=d) = C \sin kd = 0$$

Budući da  $C$  ne može biti jednako nuli jer tada ne bi postojala valna funkcija, to slijedi da je:

$$\begin{aligned} \sin kd = 0 \quad \text{ili} \quad kd = n\pi \quad \text{gdje je } n \text{ cijeli broj} \\ \text{odnosno:} \quad k = n\pi/d \end{aligned} \quad (2.18)$$

a količina gibanja:

$$p = \hbar k = n\pi \hbar/d \quad (2.18')$$

Relacija (2.18') daje moguće vrijednosti količine gibanja.

Primijeni li se relacija (2.18) na rješenje (2.17), dobiva se:

$$u(x) = C \sin n\pi x/d \quad (2.19)$$

Iz relacije (2.18) slijedi:

$$\sqrt{2mE/\hbar} = n\pi/d$$

odnosno

$$E = n^2 \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi\hbar}{d}\right)^2 \quad (2.20)$$

ili

$$E = n^2 \frac{\hbar^2}{8m d^2}$$

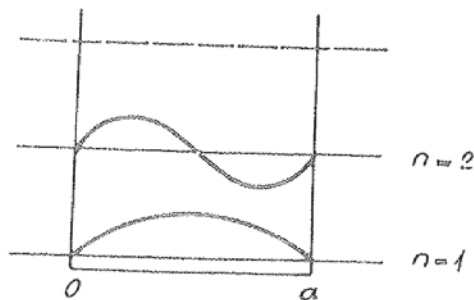
Moguće su samo neke diskretne energije  $E_1, E_2 \dots$

$n$	$E_n = n^2 E_1$	_____
$n = 3$	$E_3 = 9 E_1$	_____
$n = 2$	$E_2 = 4 E_1$	_____
$n = 1$	$E_1$	_____

Razmak između energijskih razina zavisi o masi čestice i širini jame. Što su  $m$  i  $d$  veći, to je razmak između razina manji. U makrosvijetu mase tijela i veličine jame toliko su velike, a razine toliko blizu, da kvantiziranost nije više uočljiva. Energija praktički može poprimiti sve vrijednosti.

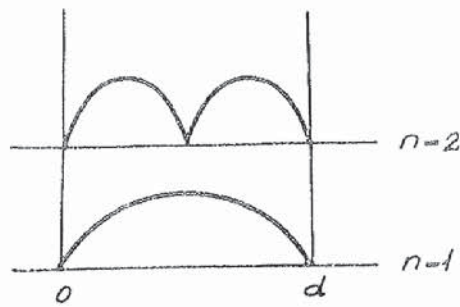
Kvantna mehanika - izražena Schrödingerovom jednačbom uključuje kvantizaciju energije, tj. postojanje diskretnog niza dopustivih energijskih razina.

Na crt. 2.10 dan je prikaz valnih funkcija:



Crt.2.10. Valne funkcije za česticu u pravokutnoj potencijalnoj jami

Vjerojatnost da se čestica nađe na određenom mjestu u jami dana je sa  $uu^*$  (crt. 2.11).



Crt.2.11. Vjerojatnost da se čestica nadje na određenom mjestu u jami

Ukupna vjerojatnost da se čestica nadje u jami:

$$\int_0^d u(x) u^*(x) dx = 1 \quad (2.21)$$

Relacija (2.21) je uvjet normiranja valne funkcije. Izražava da se čestica sigurno nalazi negdje u jami.

Iz relacije (2.21) slijedi:

$$C^2 \int_0^d \sin^2 \frac{n \pi x}{d} dx = 1 \quad \text{te je } C = \sqrt{2/d}$$

Normirana valna funkcija glasi:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin(n \pi x/d)$$

Slična razmatranja mogu se provesti za trodimenzionalnu potencijalnu jamu. Za valnu funkciju dobiva se izraz:

$$u(x,y,z) = C \sin \frac{n_x \pi}{d_x} x \sin \frac{n_y \pi}{d_y} y \sin \frac{n_z \pi}{d_z} z$$

a za energiju :

$$E = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{n_x^2}{d_x^2} + \frac{n_y^2}{d_y^2} + \frac{n_z^2}{d_z^2} \right)$$

odnosno

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \quad (2.22)$$

gdje su  $d_x, d_y, d_z$  dimenzije potencijalne jame,  $n_x, n_y, n_z$  cijeli brojevi, a  $k_x, k_y, k_z$  komponente valnog vektora:

$$k_x = \frac{n_x \pi}{d_x}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{d_y}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{d_z} \quad (2.23)$$

Uvjeti kvantizacije (2.23) vode k nekoj točki u „k” prostoru (koja određuje stanje čestice) za svaki mogući niz vrijednosti:  $n_x, n_y, n_z$  (odnosno  $k_x, k_y, k_z$ ).

Sva stanja danih  $k_x, k_y, k_z$  sa energijom manjom ili jednakom nekoj energiji  $E$  leže unutar oktanta sfere u „k” prostoru polumjera:

$$k = \frac{1}{\hbar} (2mE)^{1/2} \quad (2.24)$$

Razmaci medju sukcesivnim točkama u „k” prostoru (crtež 2.12) su:

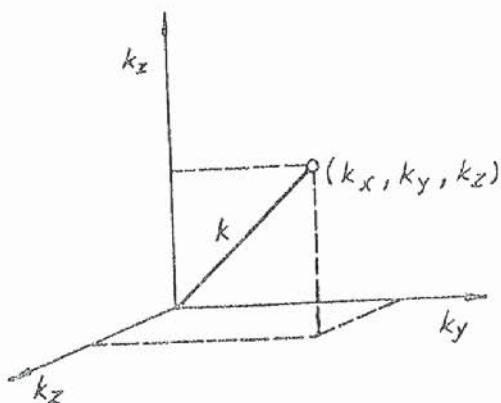
$$k_{x_2} - k_{x_1} = \frac{2\pi}{d_x} - \frac{\pi}{d_x} = \frac{\pi}{d_x}$$

analogno za  $y$ :

$$k_{y_2} - k_{y_1} = \frac{\pi}{d_y}$$

i z komponentu:

$$k_{z_2} - k_{z_1} = \frac{\pi}{d_z}$$



Crt. 2.12. „k“ prostor

Broj točaka u jedinici volumena „k“ prostora:

$$\frac{1}{\frac{\pi}{d_x} \frac{\pi}{d_y} \frac{\pi}{d_z}} = \frac{d_x d_y d_z}{\pi^3} = \frac{V}{\pi^3} \quad (2.25)$$

Broj točaka (stanja) unutar oktanta dan je umnoškom broja točaka u jedinici volumena (2.25) i volumena oktanta:

$$S = \frac{V}{\pi^3} \frac{1}{8} 4\pi \frac{k^3}{3} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{k^3}{3} \quad (2.26)$$

Broj stanja u intervalu valnog vektora  $dk$  (između  $k$  i  $k+dk$ ):

$$dS = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk$$

a gustoća stanja:

$$g(k) = \frac{dS}{dk} = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \quad (2.27)$$

Iz relacije (2.26) uz (2.24) dobiva se broj stanja sa energijom između  $E$  i  $E+dE$ :

$$S = \frac{4\pi V (2m)^{3/2}}{3 h^3} E^{3/2}$$

a odatle gustoća stanja:

$$g(E) = \frac{dS}{dE} = \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} \quad (2.28)$$

### Harmonički oscilator

Mnogi problemi u fizici mogu se barem u prvoj aproksimaciji riješiti pomoću harmoničkog oscilatora kao npr. pojave vezane uz titranje atoma i molekula čvrstog tijela.

Harmoničko oscilator - čestica koja titra pod djelovanjem elastične sile  $F = -kx$  - ima potencijalnu energiju  $U = kx^2/2$ .



Crt.2.13. Potencijalna energija harmoničkog oscilatora

Schrödingerova jednačba za harmonički oscilator:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) u = 0$$

ili

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{mk}{\hbar^2} x^2 u + \frac{2m}{\hbar^2} E u = 0$$

Množenjem sa  $\hbar/\sqrt{mk}$  i uvođenjem supstitucija:

$$y^2 = \sqrt{mk} x^2 / \hbar$$

$$\alpha = 2 E / \hbar \omega$$

jednadžba poprima oblik:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} - y^2 u + \alpha u = 0$$

Moguća rješenja te jednadžbe su funkcije oblika:

$$u_n(x) = H_n(y) e^{-y^2/2}$$

$H_n(y)$  su Hermiteovi polinomi:

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n e^{-y^2}}{dy^n}$$

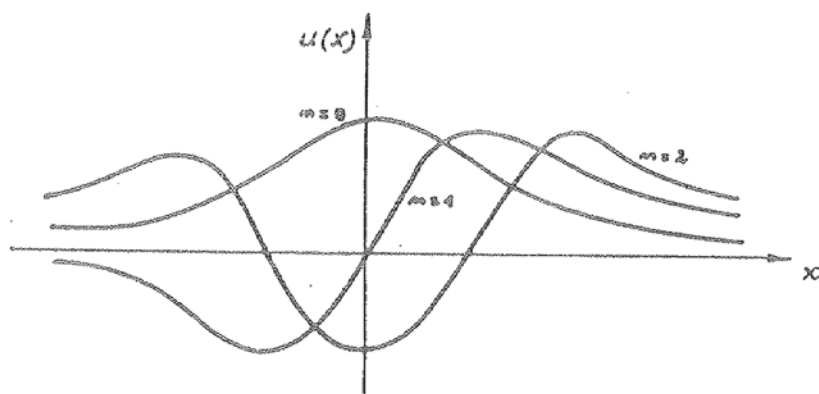
Npr. za  $n = 1$       $H_1 = - e^{y^2} (-2y) e^{-y^2} = 2y$

$n = 2$       $H_2 = e^{y^2} (-2) e^{-y^2} + e^{y^2} 4y^2 e^{-y^2} = -2 + 4y^2$

te je

n	$u_n(x)$
0	$e^{-y^2/2}$
1	$2y e^{-y^2/2}$
2	$(4y^2 - 2) e^{-y^2/2}$
...	.....

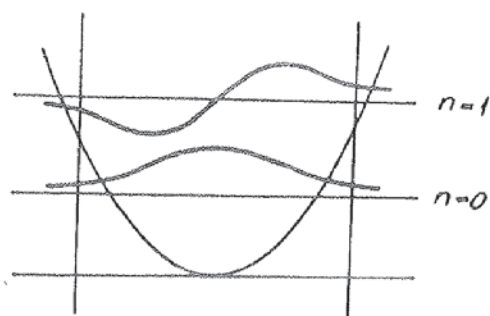
Grafički prikaz valnih funkcija harmoničkog oscilatora dan je na crtežu 2.14.



Crt.2.14. Valne funkcije harmoničkog oscilatora

Valna funkcija iščezava za velike  $x$ . Hermiteov polinom postaje nula na  $n$  mjesta. To su čvorne točke valne funkcije. Broj  $n$  kaže koliko puta valna funkcija siječe apscisu. Kod prijelaza iz nivoa  $n$  u nivo  $n + 1$  poveća se broj čvorišta za 1.

Za česticu u pravokutnoj potencijalnoj jami valne funkcije jednake su nuli na granici potencijala, dok valne funkcije harmoničkog oscilatora ne padaju oštro na nulu na granici potencijala - prodiru i izvan jame. (crtež 2.15).



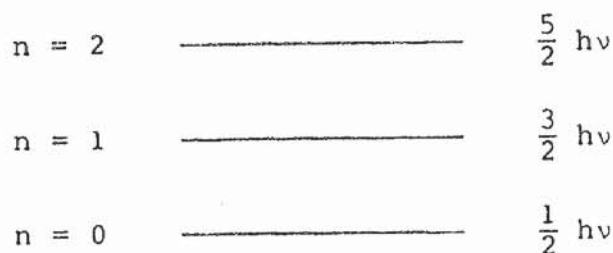
Crt.2.15. Potencijalna energija i pripadne valne funkcije harmoničkog oscilatora

Rješavanje Schrödingerove jednačbe daje za parametar  $\alpha$  vrijednost  $2n + 1 : \alpha = 2n + 1$ , a jer je  $\alpha = 2E/\hbar\omega$ , to slijedi da je energija harmoničkog oscilatora jednaka:

$$2E = \alpha\hbar\omega = (2n + 1) \hbar\omega$$

$$E = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega \quad \text{ili} \quad E = (n + \frac{1}{2}) h\nu \quad (2.30)$$

Na crtežu 2.16. prikazane su energijske razine harmoničkog oscilatora.



Crt.2.16. Energijske razine harmoničkog oscilatora

Dobivena je diskretnost za energije harmoničkog oscilatora i u Valnoj mehanici. Dobiveni izraz za energije harmoničkog oscilatora razlikuje se od Planckova izraza  $E = nh\nu$  (stara kvantna teorija). Najniža energija harmoničkog oscilatora nije jednaka nuli u valnoj teoriji. Za  $n = 0$   $E_0 = \frac{1}{2} h\nu$ . U Schrödingerovoj valnoj mehanici kao i u Heisenbergovoj mehanici harmonički oscilator ima najnižu energiju jednaku  $\frac{1}{2} h\nu$ . To znači da harmonički oscilator ne može potpuno mirovati. Kada bi oscilator mirovao u osnovnom stanju, tada bi mu položaj ( $x = 0$ ) i količina gibanja ( $p_x = 0$ ) bili potpuno određeni, a to nije u skladu s relacijom neodređenosti:

$$\Delta p_x \Delta x \geq h$$

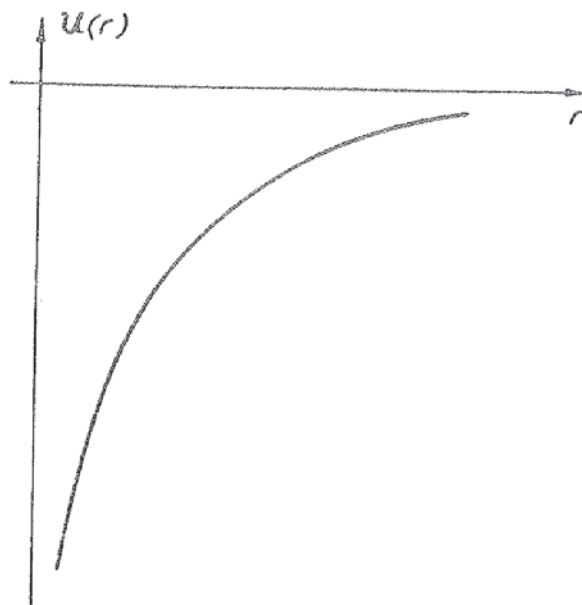
Vodikov atom

Schrödingerova jednađba za elektron koji se giba u Coulombovom potencijalu jezgre:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + U u = E u \quad (2.31)$$

gdje je  $U$  potencijalna energija elektrona u polju jezgre:

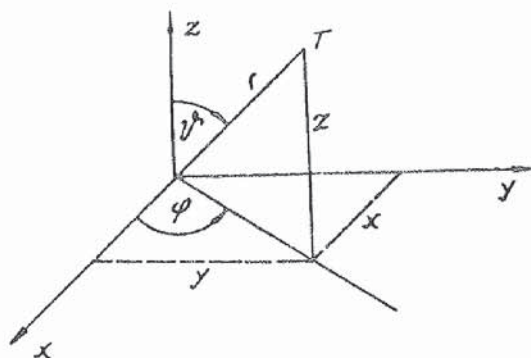
$$U = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$



Crt.2.17. Potencijalna energija elektrona u polju jezgre

Budući da je potencijal  $\check{V}$  centralno simetričan, pogodnije je napisati Schrödingerovu jednađbu u polarnim koordinatama  $(r, \theta, \phi)$ .

Veza izmedju polarnih i Descartesovih koordinata:



$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Crt.2.18. Descartesov i polarni koordinatni sustav

U polarnim koordinatama Schrödingerova jednačba (2.31) glasi:

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right] + U u = E u\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) - U u = E u\end{aligned} \quad (2.32)$$

Pretpostavimo rješenje valne funkcije elektrona u obliku produkta funkcija od kojih svaka funkcija zavisi samo od jedne varijable  $r$ ,  $\theta$ , ili  $\phi$  :

$$u(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi) \quad (2.33)$$

Uvrštenjem rješenja (2.33) u jednađbu (2.32) dobiva se:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[ \frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \right] + U u = E u$$

Ako se dobivena jednađba pomnoži sa  $r^2 \sin^2 \theta$  treći član na lijevoj strani  $\left( \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \right)$  postat će funkcija samo od  $\phi$ . Prebacujući ovaj član na desnu stranu jednađbe a sve druge na lijevu, dobiva se:

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \\ + \frac{2m_e}{\hbar^2} r^2 \sin^2 \theta (E - U) = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$$

Budući da lijeva strana ove jednađbe zavisi od  $r$  i  $\theta$ , a desna od  $\phi$ , ova jednađba može biti zadovoljena samo ako je svaka strana jednađbe konstantna. Neka ova konstanta bude  $m^2$ . Sada imamo dvije jednađbe koje su jednake  $m^2$ . Jedna od njih je:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = - m^2 \quad (2.34)$$

i druga koja uz preuredjenje (na jednoj strani  $r$  a na drugoj  $\phi$ ) poprima izgled:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m_e}{\hbar^2} (E - U) = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) \quad (2.35)$$

Budući da je lijeva strana jednadžbe (2.35) funkcija samo od  $r$  a desna ne sadrži  $r$  to opet mora svaka strana biti konstantna. Označimo tu konstantu sa  $\lambda$ . Dobivamo dvije jednadžbe:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m_e r^2}{\hbar^2} (E - U) = \lambda \quad (2.36)$$

i

$$\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) = \lambda \quad (2.37)$$

Diferencijalna jednadžba (2.32) rastavljena je u tri diferencijalne jednadžbe (2.34, 2.36 i 2.37).

Rješenje jednadžbe 2.34 glasi:

$$\phi = A e^{im\phi} \quad (2.38)$$

gdje je  $m = 0, 1, 2 \dots$  magnetski kvantni broj

Cjelobrojne vrijednosti od  $m$  proizlaze iz zahtjeva da  $\phi\phi^*$  i  $\phi$  budu jednoznačne za svaku vrijednost  $m$ .

Konstanta  $A$  određuje se iz uvjeta: 
$$\int_0^{2\pi} \phi\phi^* d\phi = 1$$

Rješenja jednačbe (2.37) su pridruženi Legendreove funkcije od  $\cos \theta$  :

$$P_{\ell}^m(\cos \theta) = (-1)^m (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \frac{d^m P_{\ell}(\cos \theta)}{d \cos \theta^m}$$

gdje su  $P_{\ell}(\cos \theta)$  Legendreovi polinomi:

$$P_{\ell}(\cos \theta) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell}}{d \cos \theta^{\ell}} (\cos^2 \theta - 1)^{\ell}$$

Konačne jednoznačne Legendreove funkcije dobivaju se uz uvjet:

$$\lambda = \ell(\ell + 1) \quad \text{gdje je} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad \text{odnosno} \quad \ell \geq |m|$$

Za dani  $\ell$  moguće su  $2\ell + 1$  vrijednosti od  $m$ . S tim svojstvom uveden je u Bohrovoj teoriji orbitalni broj  $\ell$ .

Ukupna kutna zavisnost valne funkcije dana je umnoškom  $\Theta\Phi$ . Označava se sa  $Y_{\ell m}$  i naziva kuglina funkcija.

$$Y_{\ell m} = C_{\ell m} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

Konstanta  $C_{\ell m}$  određuje se iz uvjeta normiranja.

Volumni element u polarnim koordinatama  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  te uvjet normiranja glasi:

$$\int_0^{\infty} r^2 R R^* dr \int_0^{\pi} \sin \theta \Theta \Theta^* d\theta \int_0^{2\pi} \Phi \Phi^* d\phi = 1$$

U tablici 2.2 dane su vrijednosti normiranih funkcija  $\theta$ ,  $\phi$  i  $Y_{lm}$ .

	$\ell$	$m$	$\theta$	$\phi$	$Y_m$
s	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
p	1	0	$\frac{\sqrt{6}}{2} \cos \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta$
	1	$\pm 1$	$\frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\phi}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$
d	2	0	$\frac{\sqrt{10}}{4} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
	2	$\pm 1$	$\frac{\sqrt{15}}{2} \sin \theta \cos \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\phi}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin 2\theta e^{\pm i\phi}$
	2	$\pm 2$	$\frac{\sqrt{15}}{4} \sin^2 \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm 2i\phi}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$

Tablica 2.2

Rješenje jednadžbe(2.36) su valne funkcije oblika:

$$R(r) = N_{n,\ell} e^{-\rho/2} \cdot L_{n+\ell}^{2\ell+1}(\rho)$$

gdje je  $\rho = 2r/nr_0$ ,  $r_0$  Bohrov polumjer vodikova atoma, a  $L_{n+\ell}^{2\ell+1}(\rho)$  pridruženi Laguerrovi polinomi.

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \frac{d^{2l+1}}{d\rho^{2l+1}} L_{n+l}(\rho)$$

$$L_{n+l}(\rho) = e^{\rho} \frac{d^{n+l}}{d\rho^{n+l}} (\rho^{n+l} e^{-\rho})$$

Konstanta  $N_{n,l}$  određena je uvjetom normiranja i iznosi:

$$N_{n,l} = - \left\{ \left( \frac{2}{nr_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]} \right\}^{1/2}$$

Radijalne funkcije vodikova atoma za tri najniže energije dane su u tablici 2.3.

n	l	$R_{n,l}$
1	0	$2(1/r_0)^{3/2} e^{-\rho/2}$
2	0	$(1/2r_0)^{3/2} (2 - \rho) e^{-\rho/2}$
	1	$(3)^{-1/2} (1/2r_0)^{3/2} \rho e^{-\rho/2}$
3	0	$3^{-1} (1/3r_0)^{3/2} (6 - 6\rho + \rho^2) e^{-\rho/2}$
	1	$3^{-1} \cdot 2^{-1/2} (1/3r_0)^{3/2} (4 - \rho) \rho e^{-\rho/2}$
	2	$3^{-1} \cdot 10^{-1/2} (1/3r_0)^{3/2} \rho^2 e^{-\rho/2}$

Tablica 2.3

Uvrstimo valnu funkciju  $R_{1,0}$  u jednađbu (2.36).

Jednađba (2.36) poprimit će oblik:

$$\frac{1}{r_0^2} - \frac{2}{r r_0} + \frac{2m_e}{\hbar^2} E + \frac{m_e e^2}{2\pi \epsilon_0 \hbar^2 r} = 0$$

Da bi rješenje vrijedilo za sve vrijednosti  $r$ , koeficijenti uz  $1/r$  kao i konstantni član trebali bi biti jednaki nuli. Odatle slijedi:

$$r_0 = \frac{4\pi \epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \quad \text{Bohrov polumjer}$$

$$E = - \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \quad \text{energija osnovnog stanja vodikova atoma}$$

Općenito za energiju vodikova atoma stacionarnog stanja  $n$  dobiva se izraz:

$$E = - \frac{1}{n^2} \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$$

gdje je  $n = n_r + \ell + 1$

Umjesto kvantnog broja  $k$  Bohrove teorije ovdje dolazi  $\ell + 1$ . Bohr je isključio slučaj  $k = 0$  jer bi to zorno u klasičnoj mehanici značilo da elektron titra u pravcu kroz jezgru atoma. Po valnoj mehanici moment količine gibanja određuje kvantni broj  $\ell$ . Vrijednost  $\ell = 0$  karakterizira slučaj vala materije koji ne zavisi od polarnih kutova.

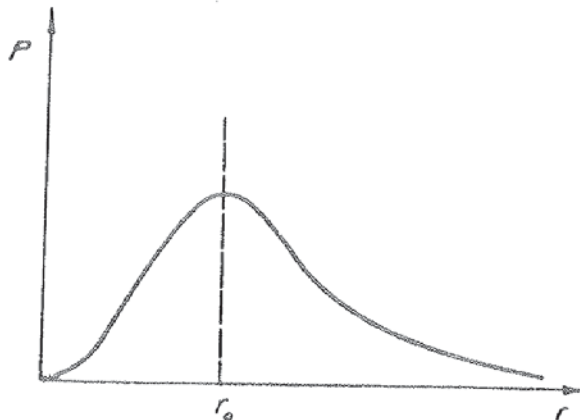
Iz uvjeta normiranja:

$$\int_0^{\infty} P(r) dr = \int_0^{\infty} r^2 RR^* dr = 1$$

može se izračunati funkcija  $P(r)$  tzv. radijalna gustoća vjerojatnosti za određeni  $n$  i  $\ell$ . U slučaju radijalne valne funkcije  $R_{10}$  gustoća vjerojatnosti će biti jednaka:

$$P(r) = 4 (1/r_0)^3 r^2 e^{-(2r/r_0)}$$

Prikaz ove gustoće vjerojatnosti dan je na crtežu 2.19.



Crt. 2.19. Radijalna gustoća vjerojatnosti

Radijalna gustoća vjerojatnosti  $P(r)$  pokazuje maksimalnu vrijednost kada je  $r$  jednako  $r_0$  tj. za vodikov atom kod vrijednosti  $r$  jednako Bohrovom polumjeru. Slična razmatranja za više glavne kvante brojeve dovode do Bohrovih staza. Za danu vrijednost  $n$ , najviši moment količine gibanja je za slučaj najvišeg  $\ell$  tj.  $\ell = n-1$ . Bohrovi polumjeri u Valnoj mehanici zamijenjeni su vjerojatnošću radijalne gustoće.

Newtonova determiniranost lomi se na ulazu u mikrosvijet u niz krhkih tragova mogućnosti, jačih i slabijih, više i manje vjerojatnih. Uočavanje tih jačih tragova vodi do statističkih zakonitosti - do orijentacije u bespuću mikrosvijeta.



### 3. KLASIČNA I KVANTNA STATISTIKA

Ako se sistem sastoji od vrlo velikog broja čestica kao što je npr. plin u nekoj posudi (u 1 molu ima približno  $10^{23}$  molekula), elektroni u metalu itd, nemoguće je pratiti ponašanje svake pojedine čestice i primijeniti fizikalne zakone na svaku česticu. Uz to postoje i principijelne poteškoće. Prema Heisenbergovim relacijama neodređenosti nemoguće je postaviti egzaktne početne uvjete (nemoguće je istovremeno poznavati koordinatu i konjugirani impuls mikročestice).

U slučaju velikog broja čestica može se odrediti jedino vjerojatnost da čestica ima određen položaj i impuls u određenom trenutku. A na osnovi raspodjele vjerojatnosti stanja mogu se odrediti srednje vrijednosti mikroskopskih veličina a preko njih makroskopske veličine koje opisuju sistem.

Nalaženje vjerojatnosti stanja sistema, koji se sastoji od vrlo velikog broja čestica, osnovni je zadatak statističke fizike.

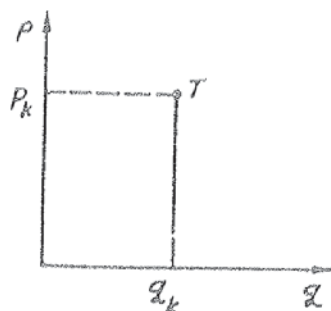
Tragovi početka statističke fizike mogu se naći u radovima Clausiusa 1850. godine u kojima je dao kinetičku teoriju plina. Osnovne zakone klasične statistike dali su Maxwell i Boltzmann, a kvantne statistike Bose i Einstein te Fermi i Dirac.

#### MAXWELL-BOLTZMANNOVA STATISTIKA

Razmotrimo sistem koji se sastoji od velikog broja identičnih čestica koje se mogu razlikovati, npr. molekule plina.

U plinu pojedina molekula juri na sve strane, sudara se s ostalim molekulama, mijenja svoju brzinu. Određeni broj molekula imat će energiju  $E_1$ , drugi  $E_2$ ... Zbog jednostavnosti proračuna uzet ćemo da energije molekula tvore niz  $E_1, E_2 \dots$  ali razmak može biti proizvoljno malen, tako da diskontinuitet može iščezavati.

Položaj čestice u trodimenzionalnom prostoru određen je sa tri koordinate:  $x, y, z$ , a brzina čestice sa tri komponente  $v_x, v_y, v_z$ , odnosno impuls sa komponentama  $p_x, p_y, p_z$ . Stanje čestice određeno je sa tih 6 brojeva:  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$ , ili  $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$  (ako se prostorne koordinate označe sa  $q_i$  a impulsa sa  $p_i$ ) i bilo bi opisano točkom u tzv. faznom prostoru (crtež 3.1).



Crt. 3.1. Dvodimenzionalni fazni prostor

Pretpostavit ćemo da je broj čestica  $N$  konstantan, da čestice međusobno ne djeluju i da u određenom trenutku  $N_1$  molekula ima energiju  $E_1$ ,  $N_2$  energiju  $E_2$  itd. Ako je sistem izoliran, ukupna energija konstantna je.

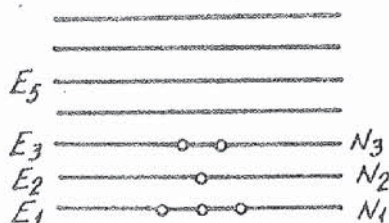
$$N = N_1 + N_2 + \dots = \sum_i N_i \quad (3.1)$$

$$U = N_1 E_1 + N_2 E_2 + \dots = \sum_i N_i E_i \quad (3.2)$$

Brojevi  $N_1, N_2 \dots$  (koji opisuju raspodjelu čestica na raspoloživa energijska stanja) vremenom se mogu mijenjati (npr. molekule plina pri međusobnim sudarima mijenjaju brzinu). Kada je postignuta najvjerojatnija raspodjela molekula, sistem je u termičkoj ravnoteži. Takva raspodjela će se zadržati dok ne naidje neki vanjski poremećaj. U slučaju plina u termičkoj ravnoteži, ako se npr. molekula energije  $E_1$  sudari s molekulom energije  $E_2$  i njihove energije nakon sudara postaju  $E_3$  i  $E_4$  u međuvremenu će neki drugi par molekula sudarom dobiti energije  $E_1$  i  $E_2 \dots$

Neka je  $N$  molekula razdijeljeno po energijama  $E_1, E_2 \dots$  na način prikazan na crtežu 3.2.

Vjerojatnost raspodjele proporcionalna je broju različitih načina na koje molekule mogu biti rasporedjene izmedju raspoloživih energijskih stanja. Permutacije čestica na istoj energijskoj razini ne doprinose povećanju broja stanja, ali nije svejedno u kojoj se energijskoj razini čestica nalazi (čestice su razlučive).



Crt.3.2. Raspodjela molekula po energijskim razinama

Ako je ukupni broj čestica  $N$ , onda je broj permutacija tih  $N$  čestica jednak  $N!$  Ali budući da premutacija čestica na istoj energijskoj razini ne znači novo stanje, te permutacije treba odbaciti, pa će broj različitih permutacija, koje realiziraju određenu raspodjelu, biti jednak:

$$\frac{N!}{N_1! N_2! \dots}$$

Energiji  $E_1$  pridružen je određeni volumen faznog prostora. Neka taj fazni prostor ima  $S_1$  ćelija. Određena energija može se ostvariti na razne načine - različitim kombinacijama  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$ . Može više ćelija faznog prostora imati istu energiju.  $S_1$  se može nazvati brojem različitih stanja energije  $E_1$ .

Svaku od čestica iz raspodjele dane na crtežu 3.2, energije  $E_1$  može se smjestiti u bilo koju od ćelija  $S_1$ , te će na svakoj razini broj raspodjela porasti za faktor:  $S_1^{N_1}$

Ukupno broj raspodjela čestica po energijskim razinama bit će jednak:

$$B = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots} S_1^{N_1} S_2^{N_2} \dots \quad (3.3)$$

S izrazima  $N!$  otežano je računanje, pa ih je pogodno zamijeniti približnim izrazima.

$$\begin{aligned} \ln N! &= \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln N = \ln 1 \cdot 1 + \\ &+ \ln 2 \cdot 1 + \dots = \sum_i \ln i \cdot 1 \end{aligned}$$

Aproksimacijski može se ova suma zamijeniti s integralom :

$$\int_1^N \ln x \, dx = (x \ln x - x) \Big|_1^N = N \ln N - N + 1 . \text{ Zanemarivanjem } 1$$

iza  $N$  dobiva se aproksimacijski izraz za  $\ln N!$  :

$$\ln N! \approx N \cdot \ln N - N = \ln N^N - \ln e^N \quad \text{ili} \quad N! \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

$$N! \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad \begin{array}{l} \text{aproksimacijska} \\ \text{Stirlingova formula} \end{array} \quad (3.4)$$

Primjenom relacije (3.4) na (3.3) dobiva se za ukupni broj razdioba čestica po energijskim razinama:

$$B = \frac{N^N}{N_1^{N_1} N_2^{N_2} \dots} S_1^{N_1} S_2^{N_2} \dots = N^N \left(\frac{S_1}{N_1}\right)^{N_1} \left(\frac{S_2}{N_2}\right)^{N_2} \dots \quad (3.5)$$

Da bi se dobila najvjerojatnija raspodjela čestica po energijskim razinama (koja odgovara stanju termičke ravnoteže), treba tražiti maksimum od broja raspodjela  $B$  kada varira broj čestica  $N_1$ .

Pogodnije je umjesto  $B$  uzeti  $\ln B$  (gdje ima maksimum  $B$  ima  $i \ln B$ ).

$$\ln B = N \ln N - \sum_i N_i \ln \frac{N_i}{S_i} \quad (3.6)$$

Pri ovome treba uzeti u obzir da je broj molekula konstantan i da je ukupna energija konstantna tj.

$$\sum_i \delta N_i = 0 \quad \sum_i E_i \delta N_i = 0 \quad (3.7)$$

$$\delta \ln B = - \sum_i \left( \ln \frac{N_i}{S_i} + 1 \right) \delta N_i \quad (3.8)$$

Pomnoži li se (3.7) sa „a” odnosno „b” i doda jednačbi (3.8) (prema Langrangeovoj metodi) dobiva se:

$$\delta \ln B - a \sum_i \delta N_i - b \sum_i E_i \delta N_i = - \sum_i \left( \ln \frac{N_i}{S_i} + 1 + a + b E_i \right) \delta N_i$$

Iz uvjeta da  $B$  (odnosno  $\ln B$ ) bude maksimalan, slijedi:

$$\ln \frac{N_i}{S_i} + 1 + a + b E_i = 0$$

odnosno da je broj čestica s energijom  $E_i$  jednak:

$$N_i = S_i e^{-1-a-bE_i} \quad (3.9)$$

Relacija (3.9) izražava najvjerojatniju raspodjelu čestica na energijske razine. Izveo ju je Boltzmann 1871. Po relaciji (3.9) raspodjeljuju se čestice u termičkoj ravnoteži.

Iz relacije (3.9) dobiva se za prosječni broj čestica u određenom stanju:

$$P_{MB} = \frac{N_i}{S_i} = \frac{1}{e^{1+a+bE_i}} \quad (3.10)$$

Parametar „a” može se izraziti preko ukupnog broja čestica sistema N (relacije 3.1. i 3.9.):

$$N = \sum_i N_i = \sum_i S_i e^{-1-a-bE_i}$$

$$N = e^{-1-a} Z \quad (3.11)$$

gdje je Z particijska funkcija:  $Z = \sum_i S_i e^{-bE_i}$  (3.12)

Iz relacije (3.11) slijedi da je:

$$e^{-a} = \frac{N e}{Z} \quad (3.13)$$

Parametar „b” povezan je s ukupnom energijom sustava u termičkoj ravnoteži U (relacija 3.2, 3.9 i 3.11):

$$U = \sum_i N_i E_i = \frac{N}{Z} \sum_i S_i E_i e^{-bE_i}$$

$$U = - \frac{N}{Z} \frac{d}{db} \sum_i S_i e^{-bE_i} = - \frac{N}{Z} \frac{dZ}{db}$$

$$U = - N \frac{d}{db} (\ln Z) \quad (3.14)$$

Relacija 3.14. izražava vezu između unutrašnje energije i particijske funkcije sustava u toplinskoj ravnoteži. Parametar „b” karakterizira unutrašnju energiju sustava. Pogodno ga je izraziti preko apsolutne temperature sustava:

$$b = 1/kT \quad (3.15)$$

k - Boltzmannova konstanta

Relacije (3.9) i (3.10) uz (3.11) i (3.15) mogu se napisati u obliku:

$$N_i = \frac{N}{Z} S_i e^{-E_i/kT} \quad (3.9')$$

$$P_{MB} = \frac{N_i}{S_i} = \frac{N}{Z} e^{-E_i/kT} \quad (3.10')$$

a prosječna energija po čestici  $U/N$  (relacija 3.14):

$$\bar{E} = \frac{U}{N} = kT^2 \frac{d}{dT} (\ln Z) \quad (3.16)$$

Veza između prosječne energije sustava i temperature zavisi o mikroskopskoj strukturi sustava (izraženo preko particijske funkcije  $Z$ ).

#### Primjena Maxwell-Boltzmannove statistike na idealni plin

Promotrit ćemo jednoatomni idealni plin. Tada je energija  $E_i$  u relaciji (3.9') dana izrazom:

$$E_i = \frac{1}{2m} p_i^2 = \frac{1}{2} m v_i^2$$

U slučaju da se pretpostavi da idealni plin zauzima vrlo veliki volumen tj. da se uzme potencijalna jama vrlo velikih dimenzija može se od diskontinuiranih vrijednosti energija prijeći na kontinuirani spektar energija. Tada bi funkcija particije (3.12) preimila oblik:

$$Z = \int_0^{\infty} e^{-E/kT} g(E) dE \quad (3.17)$$

a izraz za raspodjelu molekula u termičkoj ravnoteži (3.9'):

$$dN = \frac{N}{Z} e^{-E/kT} g(E) dE \quad (3.18)$$

gdje je  $g(E)$  gustoća stanja :  $g(E) = dS/dE$  (relacija 2.28).

$dN$  je broj molekula sa energijom iz intervala  $(E, E+dE)$  a  $g(E)dE$  broj stanja u tom energijskom području. Broj stanja proizlazi iz različitih orijentacija momenta količine gibanja  $p$  za danu energiju.

Primjenom relacije (2.28) dobiva se za funkciju particije (3.17):

$$z = \frac{4\pi V \sqrt{2} m^{3/2}}{h^3} \int_0^{\infty} E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

$$z = \frac{4\pi V \sqrt{2} m^{3/2}}{h^3} \frac{1}{2} \sqrt{\pi (kT)^3}$$

$$z = \frac{V (2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} \quad (3.19)$$

Relacija (3.19) daje funkciju particije u slučaju jednoatomnog idealnog plina. Iz nje slijedi:

$$\ln z = C + \frac{3}{2} \ln kT \quad (3.20)$$

Iz relacije (3.16) i (3.20) dobiva se za prosječnu energiju molekula jednoatomnog idealnog plina:

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT \quad (3.21)$$

a za unutrašnju energiju plina:

$$U = \frac{3}{2} N kT \quad (3.22)$$

Unutrašnja energija idealnog plina zavisi o njegovoj temperaturi. Relacija je bila poznata prije razvitka statističke mehanike. Ona je sugerirala identifikaciju parametra „b“ sa  $1/kT$ .

Izraz za energijsku raspodjelu molekula idealnog plina (3.18), uz relaciju za gustoću stanja (2.28), poprima oblik:

$$dN = \frac{N}{Z} \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} e^{-E/kT} dE \quad (3.23)$$

odnosno uz (3.19):

$$N_E = \frac{dN}{dE} = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} \quad (3.24)$$

Maxwellova relacija za energijsku raspodjelu molekula idealnog plina. Do ove relacije došao je Maxwell oko 1857. g.

Iz relacije (3.24) može se naći raspodjela molekula po brzinama:

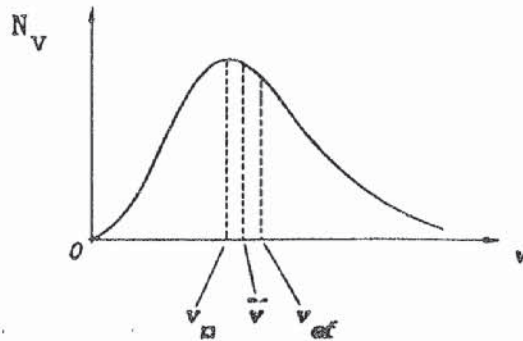
$$\frac{dN}{dv} = \frac{dN}{dE} \frac{dE}{dv}$$

$$\text{gdje je } E = \frac{1}{2} mv^2$$

$$\frac{dN}{dv} = mv \frac{dN}{dE}$$

$$N_v = \frac{dN}{dv} = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \quad (3.25)$$

Iz raspodjele brzina (3.25) mogu se izračunati najvjerojatnija, srednja i efektivna brzina molekula plina (crtež 3.3).



Crt. 3.3. Raspodjela molekula po brzinama

Najvjerojatnija brzina  $v_m$  je brzina koju ima najveći broj molekula. Za  $v=v_m$  Maxwellova raspodjela (3.25) ima maksimum:

$$\frac{dN_v}{dv} = 0$$

$$2 v_m - \frac{m v_m^3}{kT} = 0$$

$$v_m = \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$$

Srednja brzina  $\bar{v}$  dana je sa:

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v \frac{dN}{dv} dv$$

Uvodeći vrijednost za  $dN/dv$  iz relacije (3.25) dobiva se:

$$\bar{v} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-mv^2/2kT} dv$$

$$\bar{v} = \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} = 1,13 v_m$$

Efektivna brzina (srednja vrijednost kvadrata brzine) dana je izrazom:

$$v_{ef}^2 = \overline{v^2} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v^2 dN$$

$$\text{uz } v^2 = 2 E/m$$

$$v_{ef}^2 = \frac{2}{m N} \int_0^{\infty} E dN = \frac{2}{m} \bar{E}$$

uz relaciju (3.21) dobiva se:

$$v_{ef}^2 = \frac{2}{m} \frac{3}{2} kT$$

$$v_{ef} = \left( \frac{3kT}{m} \right)^{1/2} = 1,25 v_m$$

## BOSE-EINSTEINOVA STATISTIKA

Bose-Einsteinova statistika je kvantna statistika. Ona vrijedi za identične čestice koje se ne mogu razlikovati i za koje ne vrijedi Paulijev princip (za njih nije ograničen broj čestica u kvantnom stanju). Bose-Einsteinovu statistiku "služaju" fotoni ( $s = 1$ ), fononi ( $s = 0$ ), alfa čestice,  $\pi$  mezoni ... sve čestice sa cjelobrojnim spinom i spinom nula. Nazivaju se bozoni po indijskom fizičaru Bose-u koje je prvi istraživao statistiku ovih čestica.

Po Heinsenbergovim relacijama neodređenosti umnožak neodređenosti koordinate i pripadnog impulsa ne može biti manji od  $h$ :

$$\Delta q_1 \Delta p_1 \geq h$$

$$\Delta q_2 \Delta p_2 \geq h$$

$$\Delta q_3 \Delta p_3 \geq h$$

Dakle, najmanji mogući volumni element faznog prostora u kojemu se može još raspoznati jedno određeno stanje jednak je:

$$\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \Delta p_1 \Delta p_2 \Delta p_3 = h^3$$

Ovaj najmanji mogući volumni element naziva se ćelija.

Neka se u  $i$ -tom području faznog prostora energije  $E_i$  nalazi  $N_i$  čestica i neka to  $i$ -to područje sadrži  $S_i$  faznih ćelija volumena  $h^3$ .

Na koliko se različitih način može rasporediti  $N_i$  čestica po faznim ćelijama  $i$ -tog područja?

Ukupni broj mogućih razmještaja čestica bio bi:

$$S_i (N_i + S_i - 1) !$$

Budući da se čestice ne mogu razlikovati, ne smiju se brojiti uzajamne permutacije čestica  $N_i$ . Ne smiju se računati ni permutacije ćelija međusobno. Dakle, treba gornji izraz podijeliti sa  $N_i!$  i sa  $S_i!$

Ukupni broj mogućih razmještaja  $N_i$  čestica po  $S_i$  ćelija bi bio:

$$\frac{S_i (N_i + S_i - 1)!}{N_i! S_i!} = \frac{(N_i + S_i - 1)!}{N_i! (S_i - 1)!} \quad (3.26)$$

Npr.  $N_i = 3$  čestice,  $S_i = 2$  ćelije (crtež 3.3):



Crt.3.3. Broj mogućih razmještaja  
(3 čestice u 2 ćelije)

Relacija (3.26) odnosi se na  $i$ -to područje faznog prostora. Ukupni broj raspodjela za područja 1, 2, 3 ... na koja su porazdjeljene čestice  $N_1, N_2, N_3 \dots$  energija  $E_1, E_2, E_3 \dots$  jednak je umnošku raspodjela na pojedinim područjima:

$$B = \prod_i \frac{(S_i + N_i - 1)!}{(S_i - 1)! N_i!}$$

Najvjerojatnija raspodjela može se naći tražeći maksimum od  $B$ , odnosno  $\ln B$  kao kod Maxwell-Boltzmannove statistike primjenjujući Stirlingovu formulu  $N! \approx (N/e)^N$  uz uvjete:

$$\left\{ N_i = \text{konst} \right. , \quad \left. \left\{ N_i E_i = \text{konst} \right. \right.$$

Rješenje ovog vezanog ekstrema daje za najvjerojatniju raspodjelu izraz:

$$N_i = \frac{S_i}{e^{a+bE_i} - 1} \quad (3.27)$$

Ovu raspodjelu izveo je indijski fizičar Bose 1924. g. a godinu kasnije diskutirao i primijenio Einstein.

Iz relacije (3.27) dobiva se za srednji broj čestica u odredjenom kvantnom stanju  $N_i/S_i$ :

$$P_{BE}(E_i) = \frac{1}{e^{a+bE_i} - 1} \quad (3.28)$$

Konstante „a” i „b” mogu se odrediti iz ukupnog broja čestica i energije. Konstanta „b” povezana je s temperaturom kao i u Maxwell-Boltzmannovoj statistici:  $b = 1/kT$ .

U slučaju da broj čestica nije konstantan (npr. fotoni i fononi mogu biti apsorbirani i emitirani), uvjet  $\Sigma N_i = \text{konst}$  otpada a s njim i parametar „a” te relacija (3.28) prelazi u oblik:

$$P_{BE}(E_i) = \frac{1}{e^{E_i/kT} - 1} \quad (3.29)$$

a u slučaju kontinuuma:

$$P_{BE}(E) = \frac{1}{e^{E/kT} - 1} \quad (3.29')$$

Kada je  $E \gg kT$ , tada se 1 u nazivniku relacije (3.29') može zanemariti te Bose-Einsteinova funkcija raspodjele (3.29') prelazi u Maxwell-Boltzmannovu.

Primjena Bose-Einsteinove statistike na fotonski plin.  
Zračenje crnog tijela

Neka u intervalu  $(E, E+dE)$  ima broj stanja  $dS$ , a neka je prosječni broj fotona u svakom od tih stanja  $P_{BE}$ . Tada je broj fotona u energijskom intervalu  $dE$  jednak:

$$dN = P_{BE} dS = P_{BE} \frac{dS}{dE} dE \quad (3.30)$$

Prosječni broj fotona u određenom kvantnom stanju energije  $E$  dan je relacijom (3.29'). Gustoća stanja  $g(E) = dS/dE$  (tj. broj stanja po jedinici energije koje može imati foton energije između vrijednosti  $E$  i  $E+dE$  u crnom tijelu volumena  $V$ ) može se izračunati iz relacije (2.27):

$$g(k) = \frac{dS}{dk} = \frac{dS}{dE} \frac{dE}{dk} = \frac{V}{2\pi^2} k^2$$

$$\frac{dS}{dE} = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \frac{dk}{dE}$$

$$\text{valni vektor } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2E\pi}{hc}$$

$$\frac{dS}{dE} = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} E^2 \quad (3.31)$$

Dobiveni izraz pomnožen je s faktorom 2 zbog dvije moguće polarizacije elektromagnetskog vala.

Uvrštavanjem relacije (3.29') i (3.31) u (3.30), dobiva se za broj fotona energije između  $E$  i  $E + dE$ :

$$dN = \frac{1}{e^{E/kT} - 1} \frac{8\pi V}{h^3 c^3} E^2 dE$$

Energija fotona  $E = h\nu$  te je:

$$dN = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (3.32)$$

Energija  $dN$  fotona po jediničnom volumenu crnog tijela jednaka je  $h\nu dN/V$ , a gustoća energije tj. energija po jediničnom volumenu i po jediničnoj frekvenciji:

$$E_\nu = \frac{h\nu}{V} \frac{dN}{d\nu}$$

uz relaciju (3.32) poprima oblik:

$$E_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (3.33)$$

Relacija (3.33) je Planckov zakon zračenja crnog tijela. Slaganje Planckova zakona s eksperimentalnim rezultatima bila je značajna podrška ideji da je zračenje sastavljeno od fotona - „čestica“ koje se vladaju po Bose-Einsteinovoj statistici.

Primjena Bose-Einsteinove statistike na fononski plin.  
Molarna specifična toplina čvrstog tijela

Atomi (ioni) u kristalnoj rešetki čvrstog tijela nisu nezavisni harmonički oscilatori. Titranje jednog izaziva titranje drugog - energija se prenosi od jednog atoma do drugog - kroz kristal se širi elastični val. Kao što su elektromagnetski valovi shvaćeni kao rojevi fotona, tako se i ovi valovi mogu smatrati rojevima kvanata energije tzv. fonona. Energija fonona je kvantizirana i iznosi  $h\nu$ .  $\nu$  je frekvencija elastičnog vala, odnosno fonona. Kristalna rešetka stvara i apsorbira fonone.

Broj fonona u intervalu energija između  $E$  i  $E + dE$ , odnosno u intervalu frekvencija između  $\nu$  i  $\nu + d\nu$  dan je sa:

$$dN = P_{BE} \frac{dS}{dE} dE = P_{BE} \frac{dS}{d\nu} d\nu$$

Ukupna toplinska energija kristala na temperaturi  $T$ :

$$U = \int_0^{\nu_{\text{maks}}} h\nu dN = \int_0^{\nu_{\text{maks}}} h\nu P_{BE} \frac{dS}{d\nu} d\nu \quad (3.34)$$

$\nu_{\text{maks}}$  je maksimalna moguća frekvencija. Izražava se preko tzv. Debyeve temperature  $\theta$ :

$$\nu_{\text{maks}} = k\theta/h$$

Iz relacije (3.34) dobiva se za toplinsku energiju kristala na temperaturi  $T$ :

$$U = 9 R \frac{T^4}{\theta^3} \int_0^{\theta/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (3.34')$$

$$x = \frac{h\nu}{kT} \quad R - \text{plinska konstanta}$$

Molarni toplinski kapacitet:

$$C_V = \frac{dU}{dT}$$

jednak je:

$$C_V = 9 R \left[ 4 \left( \frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{\theta}{T} \frac{1}{e^{\theta/T} - 1} \right] \quad (3.35)$$

Na visokim temperaturama ovaj izraz prelazi u:  $C_V = 3 R$  -  
Dulong-Petitov zakon, a na niskim temperaturama (znatno nižim od  
 $\theta$ ):

$$C_V = 234 R \left( \frac{T}{\theta} \right)^3$$

$C_V$  se mijenja kao  $T^3$ . To je u skladu s eksperimentom.

#### FERMI-DIRACOVA STATISTIKA

Fermi-Diracova statistika vrijedi za identične čestice koje se ne mogu razlikovati a koje se vladaju po Paulijevom principu (dvije čestice ne mogu biti u istom kvantnom stanju). Čestice koje ovo zadovoljavaju zovu se fermioni po fizičaru Fermiu koji je 1926.g. našao funkciju raspodjele za ove čestice. Fermioni su čestice s polucjelobrojnim spinom, npr. elektroni, protoni, neutroni koji imaju spin jednak  $1/2$ .

Općenito, energijsko stanje  $E_i$  može imati više kvantnih stanja npr.  $S_i$ . Broj čestica u energijskom stanju  $E_i$  neka je  $N_i$ . Pri raspodjeli  $N_i$  čestica na energijsku razinu  $E_i$  prvu česticu može se smjestiti na svih  $S_i$  raspoloživih kvantnih stanja, drugu na  $S_i - 1$  preostalih stanja, treću na  $S_i - 2$  itd. Ukupni broj različitih načina razmještaja  $N_i$  čestica između  $S_i$  stanja energija  $E_i$  je:  $S_i(S_i - 1) \dots (S_i - N_i + 1)$  odnosno

$$\frac{S_i!}{(S_i - N_i)!} \quad (3.36)$$

Budući da se čestice ne mogu razlikovati, to nije moguće prepoznati zamjenu čestica izmedju stanja koja zauzimaju u razini energije  $E_i$ . Stoga se može dobiti ukupni broj različitih razmještaja  $N_i$  čestica izmedju  $S_i$  stanja energije  $E_i$  ako se izraz (3.36) podijeli s  $N_i!$ :

$$B_i = \frac{S_i!}{N_i! (S_i - N_i)!} \quad (3.37)$$

Ukupni broj različitih načina raspodjele čestica  $N_1, N_2 \dots$  izmedju razina  $E_1, E_2 \dots$  može se dobiti množeći izraze dane relacijom (3.37) za svaku raspoloživu energijsku razinu:

$$B = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \dots B_n = \prod_i B_i = \prod_i \frac{S_i!}{N_i! (S_i - N_i)!} \quad (3.38)$$

Koja je od mogućih raspodjela najvjerojatnija?

Treba naći maksimalnu vrijednost  $B$  (odnosno  $\ln B$ ) uz uvjete:

$$\sum_i N_i = N = \text{konst} \quad \sum_i N_i E_i = U = \text{konst}$$

Rješenje ovog vezanog ekstrema daje za najvjerojatniju raspodjelu izraz:

$$P_{FD}(E_i) = \frac{1}{e^{a+b E_i} + 1} \quad (3.39)$$

Ovo je Fermi-Diracova funkcija raspodjele. U Fermi-Diracovoj statistici u jednom kvantnom stanju može biti samo jedna čestica, dakle  $P_{FD}$  može biti  $= 0$  (stanje je slobodno) ili  $P_{FD} = 1$  (stanje je popunjeno). Vrijednost funkcije  $P_{FD}$  izražava vjerojatnost da je čestica u određenom kvantnom stanju, tj. daje vjerojatnost da je određeno kvantno stanje zaposjednuto česticom.

Parametar „b“ isti je kao kod Maxwell-Boltzmannove raspodjele, te definira temperaturu sistema fermiona u termičkoj ravnoteži izrazom:  $b = 1/kT$ . Parametar „a“ određen je uvjetom  $\sum N_i = N$ . Uobičajeno je izraziti „a“ pomoću veličine  $E_F$  koja ima dimenziju energije:

$$a = - \frac{1}{kT} E_F$$

Energija  $E_F$  naziva se Fermieva energija .

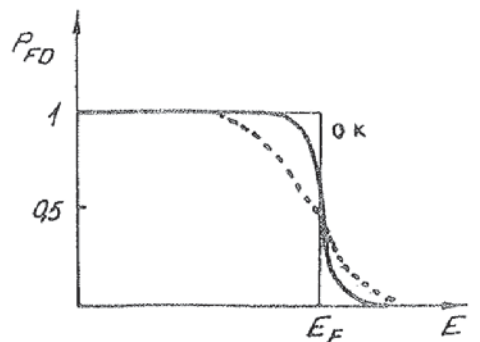
Relacija (3.39) uz navedene vrijednosti za „a“ i „b“ poprima oblik:

$$P_{FD}(E_i) = \frac{1}{e^{(E_i - E_F)/kT} + 1} \quad (3.39')$$

a u slučaju kontinuuma:

$$P_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1} \quad (3.39'')$$

Iz relacije (3.39'') slijedi da je  $E_F$  energija kod koje je vjerojatnost da je stanje popunjeno  $= 1/2$ .



Crt. 3.4. Fermi-Diracova funkcija raspodjele

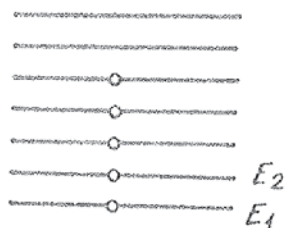
Pri apsolutnoj nuli sva energijska stanja do  $E = E_F$  popunjena su (crtež 3.4)

$$\left(\lim_{T \rightarrow 0} e^{-(E-E_F)/kT} = 0 \quad \text{za} \quad E - E_F < 0, \quad \text{te je } P_{FD} = 1\right),$$

a sva stanja za koje  $E > E_F$  prazna su

$$\left(\lim_{T \rightarrow 0} e^{-(E-E_F)/kT} = \infty, \quad \text{te je } P_{FD} = 0\right). \quad \text{Dakle, kod apsolutne}$$

nule  $N$  fermiona zauzet će  $N$  najnižih energijskih stanja (crtež 3.5), a sva ostala viša bit će prazna. Kod viših temperatura stanja s energijom većom od  $E_F$  počinju biti zauzeta.



Crt.3.5. Raspodjela fermiona pri 0 K

Kod nižih temperatura oblik funkcije  $P_{FD}$  neznatno se mijenja (krivulja „—“ na crtežu (3.4)). Kod temperatura  $kT \ll E_F$  samo elektroni energije u blizini  $E_F$  mogu prijeći u nezauzeta stanja više energije. Kod vrlo visokih temperatura (npr. 5000 K) energija  $E_F$  se pomiče ulijevo (krivulja „---“ na crtežu 3.4).

Temperatura  $\theta_F$  za koju vrijedi da je  $k\theta_F = E_F$  naziva se Fermieva temperatura.

#### 4. PRIMJENA FERMI-DIRACOVE STATISTIKE. ČVRSTA TIJELA

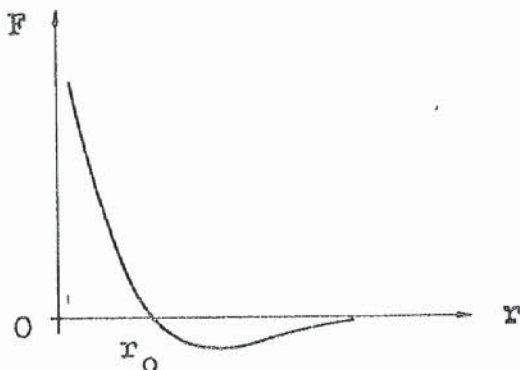
##### Kristali

Kristali su čvrsta tijela u kojima su atomi (ioni, molekule) pravilno raspoređeni i tvore tzv. kristalnu rešetku - mrežu linija koja dijeli kristal na identične volumene (ćelije). Presjeci ovih linija čvorovi su rešetke.

Ako se pravilni prostorni razmještaj čestica (atoma, iona ili molekula) javlja u velikom dijelu čvrstog tijela (makroskopske dimenzije) kristal se naziva monokristal. Ako pravilni prostorni razmještaj čestica obuhvaća samo male dijelove tvari (područja atomskih dimenzija) naziva se polikristal. Tijela u kojima čestice nisu pravilno raspoređene nazivaju se amorfna tijela.

Veze medju česticama (atomi, ioni, molekule) kristalne rešetke uglavnom su ionske, van der Waalsove, kovalentne i metalne, pa odatle slijedi podjela kristala na metale i nemetale, a nemetala na ionske, kovalentne i molekularne kristale.

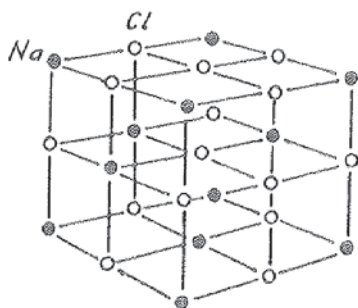
Zajednička karakteristika za sve kristale je da su sile izmedju čestica u čvorovima kristalne rešetke sastavljene od privlačne i odbojne komponente. Na crtežu 4.1. prikazana je sila izmedju atoma kristalne rešetke u zavisnosti o njihovoj udaljenosti. Na malim udaljenostima čestice se odbijaju, a na veli-



Crt.4.1. Sila izmedju atoma kristalne rešetke u zavisnosti o njihovoj udaljenosti

kim udaljenostima one se privlače. Na ravnotežnoj udaljenosti  $r = r_0$  odbojna i privlačna sila su jednake.

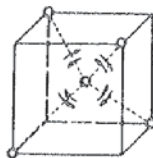
Ionski kristali sastoje se od periodički rasporedjenih pozitivnih i negativnih iona koji titraju oko položaja ravnoteže kao harmonički oscilatori. Ovi ioni nastaju prijelazom



Crt.4.2. Čelija kristala natrijeva klorida (kubična rešetka s plošnim centrima)

tali su slabi vodiči topline i elektriciteta budući da nemaju vodljivih („slobodnih“) elektrona za prijenos energije i naboja.

Kod kovalentnih kristala imaju dva susjedna atoma zajednička dva elektrona suprotnog spina. Svaki atom daje po jedan



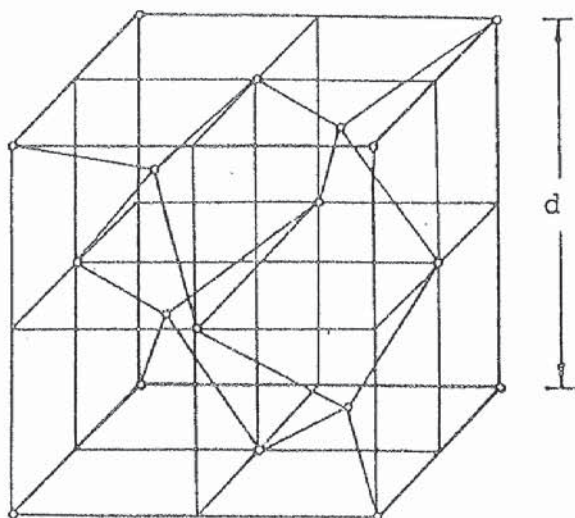
Crt.4.3. Kovalentna veza u dijamantu

${}^6\text{C}$  ima 2 elektrona u 1s ljusci  
2 elektrona u 2s ljusci  
2 elektrona u 2p ljusci

Za popunjenje 2p podljuske manjkaju 4 elektrona. Oko svakog ugljikovog atoma u kristalu dijamanta pravilno su rasporedjena 4 atoma ugljika koji s njim podijele po 1 elektron i tako se uzajamno povezuju.

jednog ili više elektrona iz atoma elektropozitivnog u atom elektronegativnog elementa. Energija vezanja proizlazi iz elektrostatiskog privlačenja suprotno nabijenih iona. Ioni su tako rasporedjeni da su elektrostatske privlačne sile medju suprotno nabijenim ionima veće nego odbojne sile medju istovrsno nabijenim ionima. Na crtežu 4.2. dan je primjer natrijeva klorida. Najslabije vezani elektron natrija privučen je od klora i vezan u atom klora tvoreći ion  $\text{Cl}^-$ . Preostali dio atoma natrija je ion  $\text{Na}^+$ . Ionski kris-

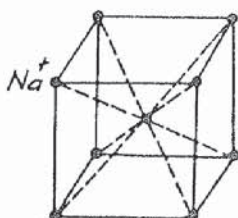
Kristali germanij i silicij imaju sličnu kovalentnu vezu kao i dijamant (crtež 4.4.). Kovalentni kristali su slabi vodiči topline i elektriciteta.



Crt.4.4. Struktura kristala dijamanta

U molekularnim kristalima osnovne jedinice su molekule npr. kruti vodik, kisik, ugljični dioksid i većina organskih kristala. Sile kojima se molekule privlače su van der Waalsove sile. One su mnogo slabije od sila u ionskim i kovalentnim vezama i stoga molekularni kristali imaju znatno niže talište i vrelište te manju mehaničku čvrstoću.

Metali su elementi koji imaju jedan ili više slabo vezanih elektrona u vanjskoj nepopunjenoj ljusci. Ovi elektroni su



Crt.4.5. Čelija natrija (kubična rešetka s prostornim centrom)

gotovo slobodni. Oni pripadaju čitavoj rešetki a ne pojedinim ionima. Tvore „elektronski plin“. U čvorovima kristalne rešetke nalaze se pozitivni ioni. Uzajamno djelovanje „elektronskog plina“ i pozitivnih iona uvjetuje stabilnost metalne rešetke. Na crtežu 4.5. dan je primjer metala: osnovna čelija natrija. Svaki atom nat-

rija daje po jedan vodljivi („slobodni“) elektron kristalnoj rešetki (3s elektron). Metali su dobri vodiči topline i električnosti jer vodljivi elektroni lako apsorbiraju energiju vibracije kristalne rešetke ili elektromagnetskog zračenja.

Kristali sa savršeno pravilnom rešetkom su idealizacija. U realnoj kristalnoj rešetki geometrijska pravilnost narušena je raznim utjecajima. Pod utjecajem toplinskog gibanja nastaju defekti praznog čvora tzv. vakancije. Izbačeni atom može izići iz kristala ili se smjestiti u prostor između atoma rešetke. Poremećaj može nastati i klizanjem jednog sloja kristala na drugi tako da se u dijelu kristala pojavi suvišan sloj atoma. Takav poremećaj pravilnosti rešetke naziva se dislokacija. Atomi primjese izazivaju promjene kristalne strukture i proizvode nastajanje dodatnih energijskih razina u kristalu. Fononi, fotoni i elementarne čestice također mogu izazvati znatne poremećaje prolazom kroz kristal. Promjene strukture kristala utječu na mehanička, toplinska, električna i magnetska svojstva kristala.

### Energijske vrpce

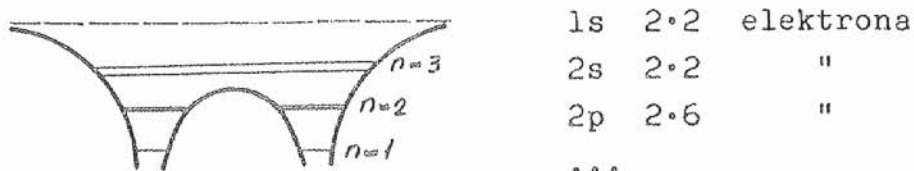
Ako se elektron giba u blizini izoliranog iona pripadna potencijalna energija je Coulombska energija (crtež 4.6.). U potencijalnoj jami takvih iona elektroni mogu zauzimati energijska stanja:



Crt.4.6. Potencijalna energija elektrona u blizini izoliranog iona

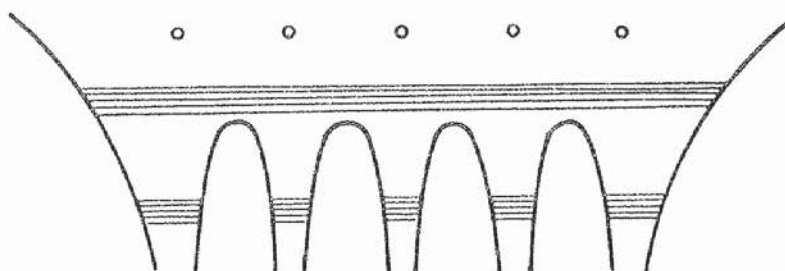
Kada se dva atoma približe tako da je razmak između njih usporediv s razmakom atoma u kristalu doći će do prilično jakog međudjelovanja. Posljedica toga je širenje energijske razine ta-

ko da one stanja koja su ranije bila degenerirana (s istom energijom) sada imaju različite energije. Prikaz potencijalne energije dan je na crtežu 4.6. Umjesto jedne energijske razine nastaju dvije bliske razine. Dopustiva stanja su:



Crt.4.7. Potencijalna energija elektrona u polju dvaju iona

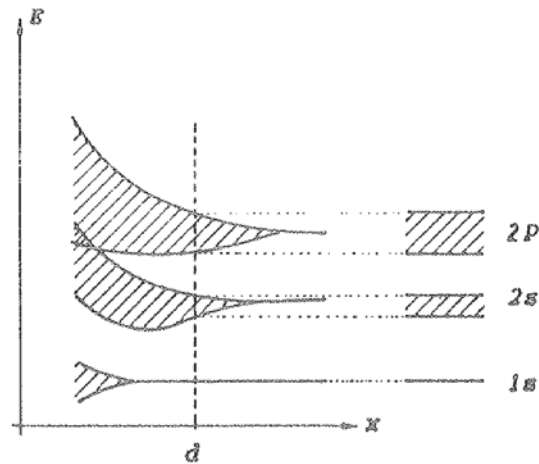
U slučaju da su ioni smješteni kao u jednodimenzionalnoj kristalnoj rešetki nastaje periodični potencijal (crtež 4.8), i umjesto jedne energijske razine javlja se niz bliskih energijskih razina grupiranih u vrpcu (pojas).  $2N$  raspoloživih stanja



Crt.4.8. Potencijalna energija elektrona u jednodimenzionalnoj kristalnoj rešetki

za 1s energijsku razinu ne koincidiraju nego su grupirani u 1s energijsku vrpcu. Slična  $2N$  stanja od 2s energijske razine grupirana su u 2s energijsku vrpcu,  $6N$  u 2p energijsku vrpcu itd. Kada je broj atoma velik energijske razine unutar vrpce vrlo su blizu i može se reći da su kontinuirano rasporedjene.

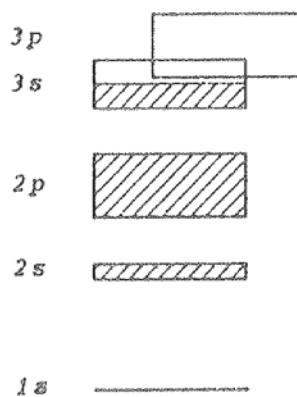
Na crtežu 4.9. prikazane su energijske vrpce u slučaju da su ioni kristalne rešetke međusobno udaljeni za veličinu  $d$ . Energijska vrpca koja odgovara najgornjoj atomskoj ljusci (u kojoj se nalaze elektroni) naziva se valentna vrpca (valentni pojas) ako je potpuno zauzeta elektronima, a ako nije potpuno zauzeta (ili ako je prazna) zove se vodljiva vrpca (vodljivi po-



Crt. 4.9. Energijske vrpce

jas). Energijska područja između dopuštenih vrpca zovu se zabranjene vrpce (zabranjeni pojasovi).

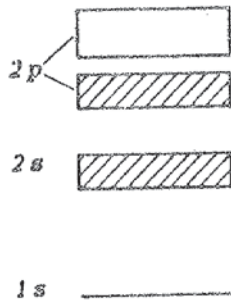
Energijske vrpce (pojasovi) kristalne rešetke odgovaraju energijskim razinama atoma koji tvore rešetku. Promotrimo slučaj natrija. Elektronska konfiguracija izoliranog atoma Na u njegovom osnovnom stanju je:  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ . Ljuska 3s sadrži 1 elektron, a ostale su popunjene. U kristalu natrija energijske vrpce 1s, 2s, 2p popunjene su s  $2N$ ,  $2N$ ,  $6N$  elektrona, a u 3s vrpici polovina raspoloživih stanja je popunjena.



energijska vrpca .....	1s	2s	2p	3s
broj raspoloživih stanja .....	$2N$	$2N$	$6N$	$2N$
broj elektrona .....	$2N$	$2N$	$6N$	$1N$

U činjenici da je energijska vrpca 3s samo djelomično popunjena može se naći odgovor za veliku električnu vodljivost natrija. Kada se primijeni električno polje elektroni mogu primiti energiju tj. mogu biti prebačeni iz djelomično popunjene vrpce u kontinuum raspoloživih stanja koja „leže“ neposredno iznad. Broj nezauzetih razina raspoloživih za 3s elektrone je povećan i sa stanjima u 3p vrpci te ovo vodi do vrlo velike električne vodljivosti.

Elektronska konfiguracija izoliranog atoma ugljika u njegovom osnovnom stanju je:  $1s^2 2s^2 2p^2$ . U dijamantu 2p



energijska vrpca .....	1s	2s	2p	
broj raspoloživih stanja .....	2N	2N	2N	4N
broj elektrona .....	2N	2N	2N	0

energijska vrpca ima 6N raspoloživih stanja a samo 2N elektrona. Između najviše popunjene vrpce i prazne je zabranjeno područje širine oko 6 eV. Termičko pobudjenje pri sobnoj temperaturi nije dovoljno za prijelaz elektrona u energijsku višu 2p vrpcu. Do temperature od nekoliko stotina kelvina sve vrpce su potpuno pune ili potpuno prazne. Dijamant se ponaša kao loš vodič odnosno kao dobar izolator.

I u slučaju da je širina zabranjene vrpce oko 1 eV (kao što je kod germanija i silicija) pri vrlo niskim temperaturama termička energija neće biti dovoljna za pobudjivanje valentnih elektrona. Ali već kod sobnih temperatura neki će

elektroni uspjeti prijeći iz valentne u vodljivu vrpcu. Vođenje postaje moguće. Ovakvi materijali nazivaju se poluvodiči. Razlika između njih i izolatora je samo u širini zabranjenog pojasa.

### Model elektronskog plina. Proračun Fermijeve energije

Sommerfeld je 1928. g. primijenio Fermi-Diracovu statistiku na model elektronskog plina i postigao velike uspjehe. Prema tom modelu elektroni se gibaju u trodimenzionalnoj potencijalnoj jami konstantnog potencijala. „Stijene“ jame, koje su na beskonačno visokom potencijalu, odgovaraju površini metala gdje je potencijalna energija toliko visoka da elektroni pri sobnim temperaturama ne mogu izaći iz metala.

Fermijeva energija može se izračunati iz izraza za ukupni broj slobodnih (vodljivih) elektrona metala. Ukupni broj vodljivih elektrona u volumenu  $V$  metala dan je relacijom:

PRI OK

$$N = \int_0^{E_F} \frac{dN}{dE} dE \quad (4.1)$$

gdje je energijska raspodjela fermiona:

$$\frac{dN}{dE} = P_{FD} \frac{dS}{dE} \quad (4.2)$$

vjerojatnost zaposjednuća stanja energije  $E$  (relacija 3.39):

$$P_{FD} = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$$

a gustoća stanja (relacija 2.28)

$$g(E) = \frac{dS}{dE} = 8\pi V \sqrt{2} \frac{m^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \quad (4.3)$$

Izraz je pomnožen s faktorom 2 zbog dvije moguće projekcije spina.

Uvrštavanjem relacija (4.3) i (3.39") u (4.2) dobiva se za energijsku raspodjelu elektrona:

$$\frac{dN}{dE} = P_{FD} g(E) = C \frac{\sqrt{E}}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (4.4)$$

gdje je  $C = \frac{8\pi V \sqrt{2} m^{3/2}}{h^3}$

Iz relacije (4.4) dobiva se za ukupni broj vodljivih elektrona u volumenu  $V$  metala pri apsolutnoj nuli:

$$N = \int_0^{E_F} \frac{8\pi V m^{3/2} \sqrt{2}}{h^3} E^{1/2} dE = \frac{16\pi V m^{3/2} \sqrt{2}}{3 h^3} E_F^{3/2} \quad (4.5)$$

a odatle Fermieva energija :

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \quad (4.6)$$

$\frac{N}{V}$  je broj vodljivih elektrona po jedinici volumena metala. Može se izračunati iz izraza:

$$\frac{N}{V} = n \frac{N_A \rho}{A}$$

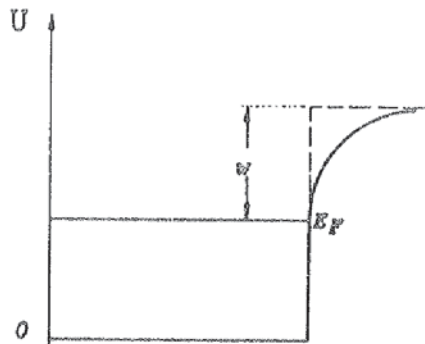
gdje je  $N_A$  - Avogadrov broj,  $\rho$  - gustoća metala,  $A$  - atomska masa metala,  $n$  - broj vodljivih elektrona po atomu metala.

Vrijednosti  $E_F$  pri 0 K za neke metale: Li ... 4,72 eV, Na ... 3,12 eV, Cu ... 7,04 eV.

Relacije (4.5) i (4.6) vrijede pri apsolutnoj nuli. Odstupanja su zanemariva pri sobnim temperaturama, te se mogu i u tim slučajevima primjenjivati.

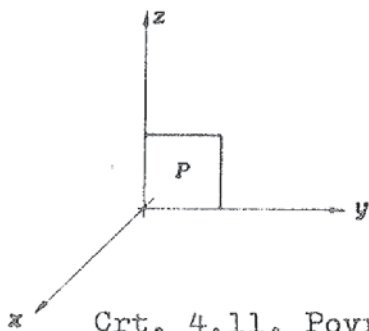
Termionska emisija

Potrebnu energiju za izlaz iz metala mogu dobiti elektroni zagrijavanjem metala. Nastala emisija naziva se termionska emisija. Da bi došlo do termionske emisije elektron mora imati energiju (crtež 4.9.)  $E \geq E_F + W$  ( $E_F$  - Fermijeva energija,  $W$  - izlazna radnja metala) te količinu gibanja povoljno usmjerenu.



Crt. 4.10. Potencijalna jama

Za izlaz iz površine smještene u ravnini  $x = 0$  (crtež 4.10)  $x$ -komponenta količine gibanja elektrona  $P_x$  mora biti jednaka ili veća od kritične količine gibanja  $P_{x_c}$ :



$$P_x \geq P_{x_c} = \sqrt{2m (E_F + W)}$$

Crt. 4.11. Površina metala

Termionska gustoća struje  $j_t$  može se izračunati iz broja vodljivih elektrona po jedinici volumena metala koji imaju

$$P_x \geq P_{x_c}$$

Broj elektrona s količinom gibanja između  $p$  i  $p+dp$  jednak je:

$$dN = P_{FD} dS$$

gdje je vjerojatnost zaposjednuća stanja energije E dana relacijom (3.39"):

$$P_{FD} = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$$

a broj stanja u energijskom intervalu (E, E+dE) relacijom (4.3):

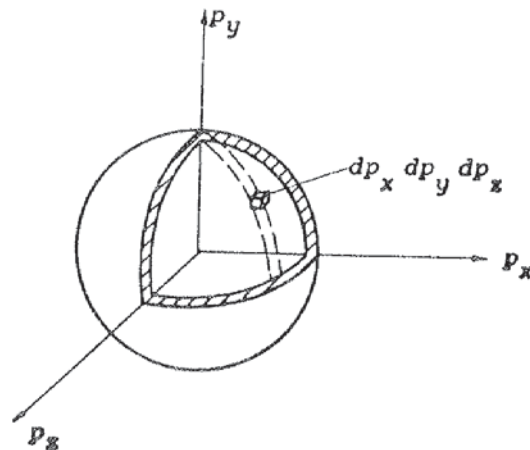
$$dS = 8\pi V \sqrt{2} \frac{m^{3/2}}{h^3} \sqrt{E} dE = \frac{8\pi V}{h^3} p^2 dp$$

odnosno

$$dN = \frac{8\pi V}{h^3} \frac{p^2 dp}{e^{(p^2/2m - E_F)/kT} + 1} \quad (4.7)$$

Broj elektrona s komponentama količine gibanja izmedju  $p_x$  i  $p_x + dp_x$ ,  $p_y$  i  $p_y + dp_y$ ,  $p_z$  i  $p_z + dp_z$  jednak je broju  $dN$  (relacija 4.7) pomnoženom sa omjerom volumena  $dp_x dp_y dp_z$  i volumena sferne ljuske  $4\pi p^2 dp$  (crtež 4.12):

$$\frac{8\pi V}{h^3} \frac{p^2 dp}{e^{(p^2/2m - E_F)/kT} + 1} \frac{dp_x dp_y dp_z}{4\pi p^2 dp}$$



Crt. 4.12. "p" prostor

a broj elektrona s komponentama količine gibanja između  $p_x$  i  $p_x + dp_x$ ,  $p_y$  i  $p_y + dp_y$ ,  $p_z$  i  $p_z + dp_z$  u jedinici volumena metala jednak je:

$$dn = \frac{2}{h^3} \frac{dp_x dp_y dp_z}{e^{(p^2/2m - E_F)/kT} + 1}$$

te je termionska gustoća struje jednaka:

$$j_{tx} = \int_{p_x=p_{xc}}^{\infty} \int_{p_y=-\infty}^{\infty} \int_{p_z=-\infty}^{\infty} \frac{2 e v_x}{h^3} \frac{dp_x dp_y dp_z}{e^{(p^2/2m - E_F)/kT} + 1} \quad (4.8)$$

Budući da samo elektroni energije  $E > E_F + W$  mogu biti emitirani, a  $W$  je nekoliko puta veća od  $kT$ , može se zanemariti jedinica u nazivniku integranda, pa relacija (4.8) poprima oblik:

$$j_{tx} = \frac{2 e}{h^3 m} e^{E_F/kT} \int_{p_{xc}}^{\infty} p_x e^{-p_x^2/2mkT} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p_y^2/2mkT} dp_y \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p_z^2/2mkT} dp_z = \frac{4\pi m e k^2 T^2}{h^3} e^{E_F/kT} e^{-p_{xc}^2/2kTm}$$

a uz supstituciju  $p_{xc} = \sqrt{2m(E_F + W)}$

$$j_{tx} = \frac{4\pi m e k^2 T^2}{h^3} e^{-W/kT} \quad \text{ili}$$

$$j_{tx} = A T^2 e^{-W/kT} \quad \text{gdje je } A = \frac{4\pi e m k^2}{h^3} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ A m}^{-2} \text{ K}^2$$

Ovo je Richardson-Dushmanova jednačba.

Za mnoge metale teorijska vrijednost za  $A$  veća je od vrijednosti određene eksperimentom budući da svi elektroni sa  $p_x > p_{x_c}$  ne izidju iz metala, neki se i reflektiraju.

Primijenjeno električno polje utječe na emisiju elektrona. Ono snižava visinu potencijalne barijere i smanjuje efektivnu izlaznu radnju te omogućava većem broju elektrona izlaz iz metala.

Ova pojava poznata je pod imenom Schottkyev efekt.

U slučaju da se na metal primijene vrlo jaka električna polja debljina barijere može se toliko smanjiti da je moguća pojava tunel-efekta. Nastala emisija nazvana je hladna emisija.

#### Krönig-Penneyev model

U modelu elektronskog plina pretpostavljeno je da se elektroni gibaju u potencijalnoj jami konstantnog potencijala  $V_0$ . Gibanje elektrona može biti opisano Schrödingerovom jednačbom koja u jednodimenzionalnom slučaju glasi:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} + (E - U_0) u = 0 \quad (4.9)$$

Rješenje jednačbe (4.9) su ravni valovi:

$$u(x) = A e^{\pm ikx} \quad (4.10)$$

$k$  je valni broj ( $k = 2\pi/\lambda = p/\hbar$ )

Stvarni kristal je trodimenzionalna rešetka. Potencijalna energija elektrona koji se giba kroz kristalnu rešetku ima trodimenzionalnu periodičnost (ponavlja se od ćelije do ćelije kristala).

Poboljšanje ovog modela je uzimanje u obzir efekta periodične strukture kristalne rešetke.

Razmotrimo Schrödingerovu jednažbu u slučaju gibanja elektrona u jednodimenzionalnom periodičnom potencijalu oblika:

$$V(x) = V(x+d)$$

gdje je  $d$  period kristalne rešetke. Schrödingerova jednažba je tada:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} + [E - U(x)] u = 0 \quad (4.11)$$

a rješenja jednažbe:

$$u(x) = \phi(x) e^{\pm ikx} \quad (4.12)$$

gdje  $\phi(x)$  zadovoljava uvjet:  $\phi(x) = \phi(x+d)$ .

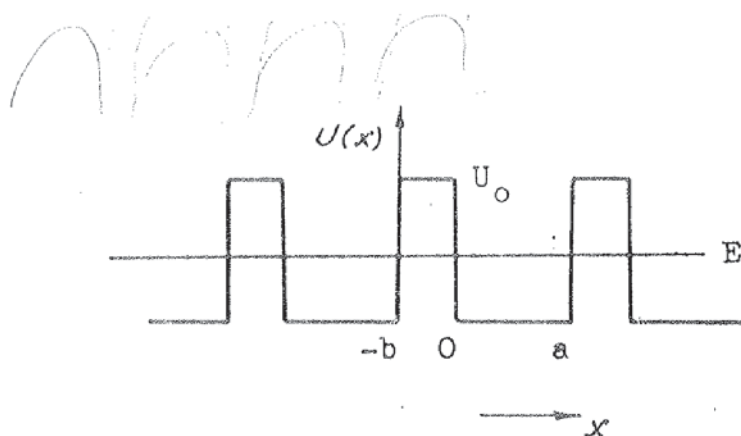
Rješenja (4.12) su ravni valovi modulirani funkcijom  $\phi(x)$  koja ima isti period kao kristalna rešetka. Ovo je Blochov teorem [F. Bloch, Z. Physik, 52 (1928) 555]. Funkcije (4.12) zovu se Blochove funkcije. Za njih vrijedi:

$$u(x+d) = \phi(x+d) \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \downarrow & \downarrow \\ e^{ik(x+d)} & e^{ikd} \\ \uparrow & \uparrow \\ u(x) & \end{matrix} = u(x) e^{ikd}$$

Matematička razrada problema gibanja elektrona u periodičnom potencijalu kristalne rešetke vrlo je složena. Problem se pojednostavnjuje ako se umjesto periodičnog potencijala kristalne rešetke (crtež 4.7) upotrebi aproksimacijski Krönig-Penneyev potencijal [R. de L. Krönig, W.G. Penney, Proc. Roy. Soc. (London), A 130 (1930) 499]. Pretpostavljeno je da potencijal ima oblik periodičnog niza pravokutnih jama konačne dubine (crtež 4.13).

U područjima jama (npr.  $0 < x < a$ ) potencijalna energija elektrona jednaka je nuli, a u područjima potencijalnih bedema (npr.  $-b < x < 0$ ) potencijalna energija poprima vrijednost  $U_0$ .

Energija elektrona  $E$  manja je od visine potencijalnog bedema  $U_0$ .



Crt. 4.13. Krönig-Penneyev potencijal

Vremenski nezavisna Schrödingerova jednađba za područje unutar jame:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} = E u \quad (4.13)$$

a u području potencijalnog bedema:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} + U_0 u = E u \quad (4.14)$$

Rješenja jednađbi (4.13) i (4.14) Blochove su funkcije:

$$u(x) = \phi(x) e^{ikx} \quad (4.15)$$

Funkcija  $e^{ikx}$  opisuje gibanje slobodnih elektrona po osi  $x$ , a  $\phi(x)$  je periodična funkcija s periodom kristalne rešetke. Ona vrši amplitudnu modulaciju ravnog vala  $e^{ikx}$ .

Supstitucijom rješenja (4.15) u (4.13) i (4.14) dobivaju se jednađbe:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + 2ik \frac{d\phi}{dx} + (\alpha^2 - k^2) \phi = 0 \quad 0 < x < a \quad (4.16)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + 2ik \frac{d\phi}{dx} - (\beta^2 + k^2) \phi = 0 \quad -b < x < 0 \quad (4.17)$$

gdje je

$$\alpha^2 = 2mE/\hbar^2 \qquad \beta^2 = 2m(U_0 - E)/\hbar^2$$

Rješenja jednažbi (4.16) i (4.17) su:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= A e^{i(\alpha-k)x} + B e^{-i(\alpha+k)x} & 0 < x < a \\ \phi_2 &= C e^{(\beta-ik)x} + D e^{-(\beta+ik)x} & -b < x < 0 \end{aligned} \qquad (4.18)$$

Konstante A, B, C i D mogu se odrediti iz graničnih uvjeta:

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= \phi_2(0) & \phi_1(a) &= \phi_2(-b) \\ \left(\frac{d\phi_1}{dx}\right)_{x=0} &= \left(\frac{d\phi_2}{dx}\right)_{x=0} & \left(\frac{d\phi_1}{dx}\right)_{x=a} &= \left(\frac{d\phi_2}{dx}\right)_{x=-b} \end{aligned} \qquad (4.19)$$

Primjena uvjeta (4.19) na rješenja (4.18) daje 4 linearne homogene jednažbe koje imaju rješenje samo ako determinanta koeficijenata A, B, C i D iščezava a to vodi do jednažbe:

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \operatorname{sh} \beta b \sin \alpha a + \operatorname{ch} \beta b \cos \alpha a = \cos k(a+b) \qquad (4.20)$$

Krönig i Penney razmatrali su slučaj kada potencijalni bedem postaje delta funkcija tj. kada visina potencijalnog bedema  $U_0$  teži u beskonačnost a širina  $b$  poprima vrijednost nula tako da umnožak  $U_0 b$  ostaje konačan. Tada jednažba (4.20) poprima oblik:

$$\frac{m U_0 b}{\hbar^2} \sin \alpha a + \cos \alpha a = \cos ka$$

ili uz uvođenje veličine :

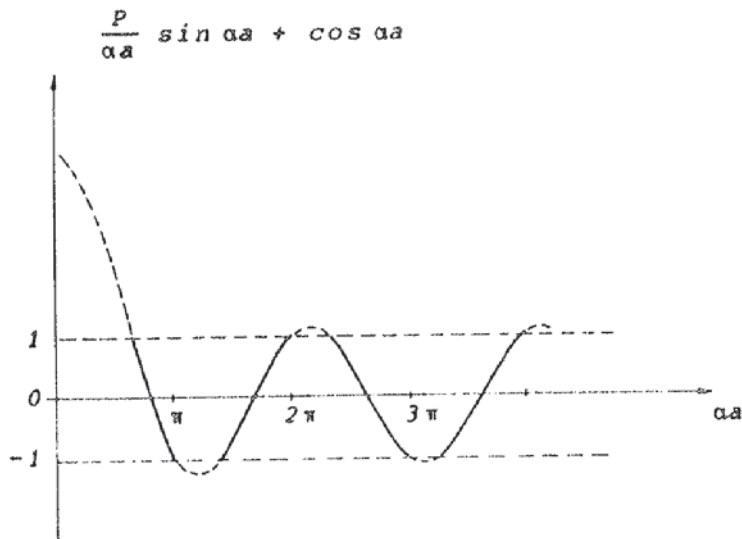
$$P = \frac{m U_0 b a}{\hbar^2}$$

$$P, \frac{\sin \alpha a}{\alpha a} + \cos \alpha a = \cos k a \quad (4.21)$$

gdje je veličina  $P$  mjerna „površina“ potencijanog bedema  $U_0 b$  i ukazuje na jakost vezanja elektrona u potencijalnoj jami.

U jednadžbi (4.21) desna strana može imati samo vrijednosti između  $\pm 1$ . To uvjetuje ograničenje mogućih vrijednosti veličine  $\alpha$  odnosno energije elektrona  $E$ .

Na crtežu 4.14. prikazana je lijeva strana jednadžbe (4.21) u zavisnosti od  $\alpha a$  za vrijednost  $P = 3\pi/2$ .



Crta. 4.14. Lijeva strana jednadžbe (4.21) u zavisnosti od  $\alpha a$  (za vrijednost  $P = 3\pi/2$ )

Ako  $P \rightarrow \infty$  tada  $\sin \alpha a \rightarrow 0$  odnosno  $\alpha a = n\pi$  te energija elektrona postaje jednaka:

$$E = \frac{n^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

$n$ -cijeli broj

Ako se vrijednost  $P$  smanji i teži nuli tada iz jednadžbe (4.21) slijedi da je:  $\cos \alpha a = \cos ka$  odnosno  $\alpha = k$  a odatle :

$$k^2 = \frac{8\pi^2 mE}{h^2}$$

odnosno

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

U ovom slučaju nema ograničenja - elektron može poprimiti sve energije (može se slobodno gibati kroz kristalnu rešetku).

Između ova dva ekstremna slučaja nalaze se svi ostali. Energija vrpčastih struktura mijenja se s vrijednošću  $P$ -a.

Iz jednadžbe (4.21) može se dobiti energija  $E$  u zavisnosti od valnog broja  $k$ . Diskontinuiteti u energiji  $E$  pojavljuju se kada  $\cos ka$  poprima maksimalnu vrijednost tj. kada je

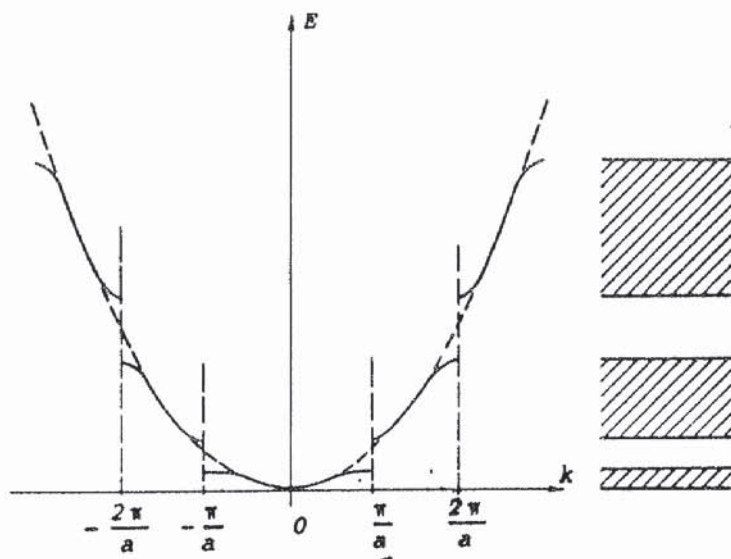
$$\cos ka = \pm 1 \quad \text{ili}$$

$$k = \frac{n\pi}{a} \quad \text{gdje je } n = \pm 1, 2, 3, \dots$$

Kod ovih vrijednosti  $k$  i mali porast u količini gibanja elektrona (odnosno u vrijednosti  $k$ ) izazvat će skok energije elektrona od vrha jedne od dopustivih vrpca na dno slijedeće. Područja između vrijednosti  $k$ -ova za koje se pojavljuju ovi diskontinuiteti zovu se Brillouinove zone (crtež 4.15).

Prva Brillouinova zona proteže se od  $k = -\pi/a$  do  $k = \pi/a$ , druga se sastoji od dva dijela koji se protežu od  $\pi/a$  do  $2\pi/a$  te od  $-\pi/a$  do  $-2\pi/a$ .

Unutar svake zone odnos izmedju energije  $E$  i valnog broja  $k$  dan je jednađbom (4.21).



Crt. 4.15. Energija u zavisnosti o valnom broju  $k$

### Efektivna masa elektrona

Promotrimo slučaj kada je na kristal primijenjeno električno polje jakosti  $E$ . Ako to polje djeluje na elektron kroz vrijeme  $dt$ , energija elektrona će se promijeniti za  $dE$ :

$$dE = e \xi v dt \quad (4.22)$$

gdje je  $v$  brzina gibanja elektrona (grupna brzina):

$$v = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \quad (4.23)$$

Iz relacija (4.22) i (4.23) slijedi:

$$dE = e\mathcal{E} \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} dt$$

a odatle se dobiva za promjenu valnog vektora:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{e\mathcal{E}}{\hbar} \tag{4.24}$$

Akceleracija elektrona može se izračunati iz relacije (4.23):

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} \left( \frac{dE}{dk} \right) = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2E}{dk^2} \frac{dk}{dt}$$

ili uz relaciju (4.24):

$$a = \frac{e\mathcal{E}}{\hbar^2} \frac{d^2E}{dk^2}$$

Iz usporedbe ove akceleracije sa akceleracijom slobodnog elektrona mase  $m$ :

$$a = \frac{e\mathcal{E}}{m}$$

slijedi da se elektron ponaša kao da ima efektivnu masu  $m^*$  jednaku:

$$m^* = \frac{\hbar^2}{d^2E/dk^2} \tag{4.25}$$

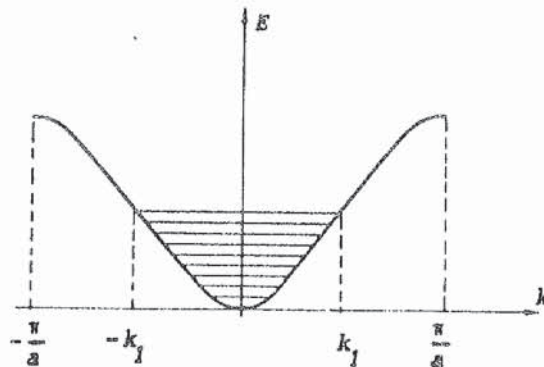
Pogodno je uvesti faktor:

$$f_k = \frac{m}{m^*} = \frac{m}{\hbar^2} \frac{d^2E}{dk^2} \tag{4.26}$$

koji je mjera stupnjeva „slobode“ elektrona u  $k$  stanju. Kada je  $f_k=1$  elektron se ponaša kao slobodni elektron.

Izolatori, vodiči i poluvodiči

Promotrimo određenu energijsku vrpca koja je pri 0 K zauzeta do vrijednosti  $k_1$  (crtež 4.16). Efektivni broj  $N_{ef}$  "slobodnih"



Crt. 4.16. Djelomično popunjena energijska vrpca pri  $T=0K$

(vodljivih) elektrona u toj vrpca, može se izraziti preko broja stanja  $dn$  u intervalu  $dk$  i faktora  $f_k$ . Faktor  $f_k$  dan je relacijom (4.26) a broj stanja  $n$  može se izračunati iz graničnog uvjeta za (jednodimenzionalni) kristal duljine  $L$ :

$$u(x+L) = u(x)$$

Taj uvjet primijenjen na Blochove funkcije vodi do izraza:

$$e^{ik(x+L)} \phi(x+L) = e^{ikx} \phi(x) \quad (4.27)$$

Budući da je:

$$\phi(x+L) = \phi(x)$$

to iz (4.27) slijedi da je

$$k = \frac{2 \pi n}{L} \quad \text{gdje je} \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

odnosno broj mogućih  $k$  vrijednosti (broj mogućih stanja) u intervalu  $(k, k+dk)$  :

$$dn = L \frac{dk}{2\pi} \quad (4.28)$$

Koristeći relacije (4.26) i (4.28) i uzevši u obzir da se u jednom stanju mogu nalaziti dva elektrona, dobiva se za efektivni broj „slobodnih“ elektrona u energijskoj vrpci (pojasu) koja je zauzeta do vrijednosti  $k_1$  pri 0 K:

$$N_{\text{ef}} = \frac{L}{\pi} \int_{-k_1}^{+k_1} f_k dk = \frac{2Lm}{\pi \hbar^2} \int_0^{k_1} \frac{d^2 E}{dk^2} dk$$

$$N_{\text{ef}} = \frac{2Lm}{\pi \hbar^2} \left( \frac{dE}{dk} \right)_{k=k_1} \quad (4.29)$$

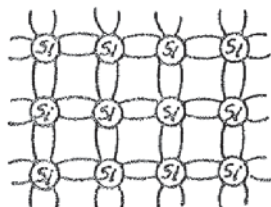
Iz relacije (4.29) slijedi da efektivni broj „slobodnih“ elektrona iščezava u potpuno popunjenoj vrpci budući da  $dE/dk$  iščezava pri vrhu vrpce, a postizava maksimum kod točke infleksije krivulje  $E(k)$  jer tada  $dE/dk$  ima maksimalnu vrijednost. Čvrsta tijela čije su energijske vrpce potpuno zauzete elektronima ili potpuno prazne ponašaju se kao izolatori odnosno poluvodiči a oni s djelomično popunjenim vrpcama kao vodiči.

## POLUVODIČI

### Čisti poluvodiči

Poluvodiči koji se sastoje samo od atoma jednog elementa (bez ikakvih primjesa) ili koji sadrže tako malo primjesa (nečistoća), da one ne utječu na njegove karakteristike, nazivaju se čisti (intrinzični) poluvodiči.

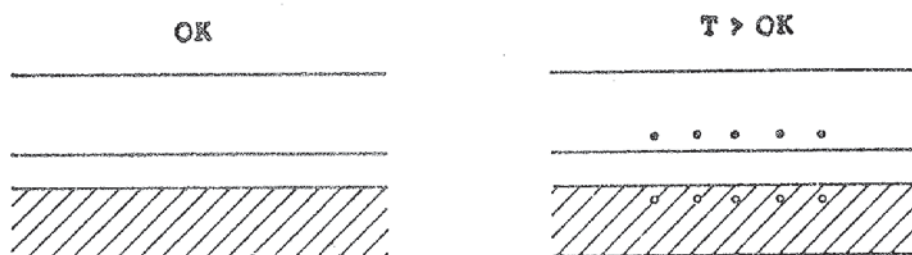
Atomi u kristalnoj rešetki poluvodiča vezani su medjusobno kovalentnom vezom. Na crtežu 4.17. prikazana je dvodimenzionalna slika rešetke silicija u kojoj svaki silicijev atom ima zajedničke parove elektrona s četiri susjedna silicijeva atoma.



Crt.4.17. Dvodimenzionalna slika kristalne rešetke silicija

Silicijev atom  ${}_{14}\text{Si}$  ( $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$ ) ima 2 elektrona u prvoj (K) ljusci, 8 elektrona u drugoj (L) i 4 elektrona u trećoj, vanjskoj (M) ljusci. Ta 4 valentna elektrona raspoređena su tako da se 2 nalaze u  $3s$ , a 2 u  $3p$  stanju. Da bi  $3p$  podljuska bila popunjena manjkaju još 4 elektrona. Oko svakog atoma silicija u kristalnoj rešetki pravilno su raspoređena 4 atoma silicija koji s njim podijele po jedan elektron i tako se uzajamno povezuju. Sličnu kovalentnu vezu imaju atomi germanija  ${}_{32}\text{Ge}$  ( $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^2$ ). U  $4p$  podljusci nedostaju 4 elektrona da bi podljuska bila popunjena.

Na crtežu 4.18. prikazan je energijski dijagram čistog poluvodiča. Na apsolutnoj nuli valentna je vrpca popunjena elektro-



Crt.4.18. Energijski dijagram čistog poluvodiča

nima, a vodljiva vrpca je prazna. Između valentne i vodljive vrpce nalazi se zabranjena vrpca. O širini te vrpce  $E_g$  zavise mnoga svojstva poluvodiča. Porastom temperature može doći do pobudjivanja valentnih elektrona. Pri sobnoj temperaturi toplinska uzbuda je dovoljna za prijelaz elektrona iz valentne u vodljivu vrpcu ( $E_g$  za poluvodiče je oko 1 eV). Pri prijelazu elektrona u vodljivu vrpcu ostaju šupljine u valentnoj vrpci.

vodljivu vrpcu ( $E_g$  za poluvodiče je oko 1 eV). Pri prijelazu elektrona u vodljivu vrpcu ostaju šupljine u valentnoj vrpici. U čistom poluvodiču broj šupljina u valentnoj vrpici jednak je broju elektrona u vodljivoj vrpici. Osim toplinskom uzbuđenom (apsorpcija fonona kristalne rešetke) elektroni mogu dobiti energiju za prijelaz u valentnu vrpcu ozračivanjem elektromagnetskim valovima (apsorpcija fotona), radioaktivnim zračenjem ...

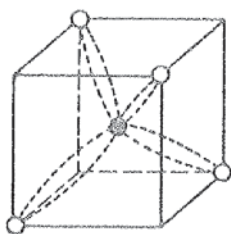
Električna vodljivost poluvodiča zavisi o broju elektrona koji su iz valentne vrpce prešli u vodljivu. Električnoj vodljivosti ne doprinose samo elektroni nego i šupljine. Šupljine u valentnoj vrpici mogu primiti elektrone, i to popunjavanje šupljina ekvivalentno je gibanju naboja. Električna vodljivost poluvodiča  $\kappa$  jednaka je:

$$\kappa = \kappa_n + \kappa_p = ne\mu_n + pe\mu_p$$

gdje je  $\kappa_n$  i  $\kappa_p$  <sup>specifični</sup> vodljivost elektrona odnosno šupljina,  $n$  koncentracija elektrona u vodljivoj vrpici,  $p$  koncentracija šupljina u valentnoj vrpici,  $\mu_n$  pokretljivost elektrona a  $\mu_p$  pokretljivost šupljina.

#### Poluvodiči s primjesama

Dodaju li se poluvodiču primjese, može se od čistog poluvodiča dobiti n-tip odnosno p-tip poluvodiča. Promotrimo slučaj da se germaniju (četverovalentni element) doda primjesa arsena (peterovalentni element). Kristalna rešetka sadržavat će atom dopiranog elementa u nekoj ćeliji na mjestu koje bi bilo zauzeto atomom germanija (crtež 4.19.).



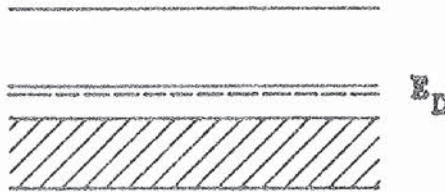
$$Z_{\text{Ge}} = 32 \quad Z_{\text{As}} = 33$$

„o“ Ge jezgra + 28 elektrona (2+8+18).  
U vanjskoj ljusci Ge ima 4 elektrona:  $4s^2 4p^2$

„●“ As jezgra + 28 elektrona (2+8+18).  
U vanjskoj ljusci As ima 5 elektrona:  $4s^2 4p^3$

Crt.4.19. Dio ćelije germanija s primjesom arsena

Od ovih 5 elektrona arsena 4 elektrona sudjeluju u kovalentnim vezama sa susjednim Ge atomima, a peti elektron slabo je vezan za jezgru As. Energija ove veze leži u zabranjenom području - oko 0,013 eV ispod dna vodljive vrpce (crtež 4.20.) te se elektron lako može osloboditi i prijeći u vodljivu vrpcu.



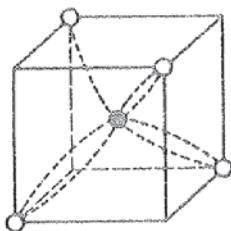
Crt. 4.20. Energijski dijagram n-tipa poluvodiča

Već kod sobnih temperatura većina elektrona prelazi iz ovih slabo vezanih stanja u vodljivu vrpcu ostavljajući područje oko atoma primjese s pozitivnim nabojem  $+e$ .

Primjesa As povećava broj vodljivih elektrona. Takve primjese zovu se donori. Primjesa djeluje kao „darivalac“ elektrona. Ionizacija atoma primjese (donorskog atoma) daje jedan elektron bez istovremene proizvodnje šupljine. Ovakav poluvodič nazvan je n-tip. On sadrži mnogo više negativnih nosilaca naboja nego pozitivnih. U n-tipu poluvodiča elektroni su većinski a šupljine manjinski nosioci naboja.

Na niskim temperaturama ( $\sim 0$  K) poluvodič n-tipa je izolator, a već pri sobnim temperaturama elektroni iz donorskih razina lako prelaze u vodljivu vrpcu. Tada se u vodljivoj vrpce nalaze elektroni iz valentne vrpce i iz donorskih razina. Elektrona iz donorskih razina ima znatno više nego elektrona iz valentne vrpce te je vodljivost n-tipa poluvodiča mnogo veća nego čistog poluvodiča.

Ako se kristalu Ge ili Si dodaju primjese trovalentnog elementa kao B, Ga, In ... , u kristalu će nastati šupljine bez istovremenog stvaranja elektrona u vodljivoj vrpce analogno kao kod n-tipa poluvodiča. Promotrimo slučaj kada se germaniju doda galij (crtež 4.21.).



Crt.4.21. Dio ćelije germanija s primjesom galijsa

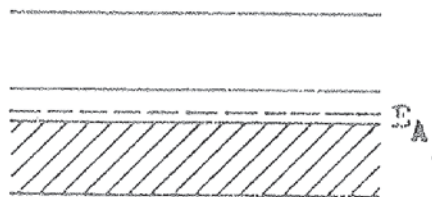
„o” - jezgra Ge + 28 elektrona, ostala 4 elektrona Ge su u vanjskoj ljusci ( $4s^2 4p^2$ )

„●” - jezgra Ga + 28 elektrona, ostala 3 elektrona Ga su u vanjskoj ljusci ( $4s^2 4p$ )

Ako se atom Ge zamijeni s atomom Ga, tada su samo 3 elektrona Ge vezana u kovalentnoj vezi. Četvrto kovalentno vezano stanje ostaje prazno - četvrta veza je nepotpuna - i popunjava se elektronom iz valentne vrpce. U valentnoj vrpci ostaje šupljina.

Atom primjese, koji prihvaća elektron za upotpunjavanje veze, nazvan je akceptor (akceptorski ion), a poluvodič koji sadrži takve primjese p-tip poluvodiča. On sadrži više pozitivnih nosilaca naboja nego negativnih. Šupljine su većinski nosioci naboja.

Akceptorska razina vrlo je blizu valentnoj vrpci ( $\sim 0,01$  eV), zato elektroni lako prelaze iz valentne vrpce u akceptorsku razinu (crtež 4.22.), te se povećava vodljivost poluvodiča.



Crt.4.22. Energijski dijagram p-tipa poluvodiča

Što je veći broj šupljina u valentnoj vrpci, to je vodljivost veća. Kada se primijeni električno polje, p-poluvodič će voditi struju gibanjem šupljina (koje može biti zamišljeno kao retrogradno gibanje elektrona).

Koncentracija elektrona i šupljina

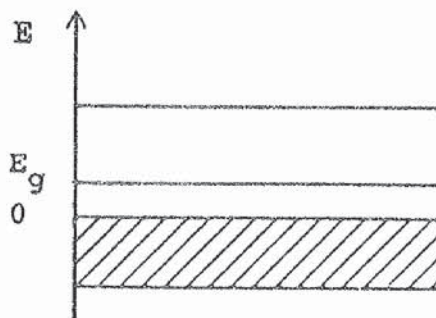
Broj elektrona po jedinici volumena vodljive vrpce (koncentracija elektrona) pri temperaturi  $T$  može se izračunati iz relacije:

$$n = \frac{N}{V} = \int_{E_g}^{\infty} \frac{1}{V} \frac{dN}{dE} dE = \int_{E_g}^{\infty} \frac{1}{V} P_{FD} \frac{dS}{dE} dE \quad (4.30)$$

gdje je vjerojatnost zaposjednuća stanja energije  $E$  dana relacijom (3.39):

$$P_{FD} = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$$

Granice integrala uzete su od dna vodljive vrpce do najviših energija elektrona (crtež 4.19). Budući da  $P_{FD}$  teži nuli za  $E \gg E_F$  to pomicanje gornje granice integrala do beskonačnosti neće znatnije utjecati na koncentraciju  $n$ .



Crt.4.23. Energijski dijagram poluvodiča

Za proračun gustoće stanja može se koristiti relacija (3.36) budući da je u vodljivoj vrpci relativno mali broj elektrona:

$$\frac{dS}{dE} = 8\pi \sqrt{2} V \frac{m_e^*{}^{3/2}}{h^3} \cdot (E-E_g)^{1/2}$$

uz označivanje dna vodljive vrpce sa  $E_g$  umjesto sa 0, te zamjenom mase slobodnog elektrona  $m$  sa efektivnom masom  $m_e^*$ .

Koristeći navedene relacije dobiva se za koncentraciju elektrona (4.30):

$$n = \frac{8\pi\sqrt{2} m_e^*{}^{3/2}}{h^3} \int_{E_g}^{\infty} \frac{(E-E_g)^{1/2}}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} dE$$

Uz pretpostavku da je  $E_g - E_F \gg kT$  može se zanemariti 1 u nazivniku integranda:

$$n = \frac{8\pi\sqrt{2} m_e^*{}^{3/2}}{h^3} e^{-(E_g - E_F)/kT} \int_{E_g}^{\infty} \frac{(E-E_g)^{1/2}}{e^{(E-E_g)/kT}} dE$$

$$n = 2 \left( \frac{2\pi m_e^* kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(E_g - E_F)/kT} \quad (4.31)$$

odnosno

$$n = N_c e^{(E_F - E_g)/kT} \quad (4.31')$$

gdje je  $N_c = 2 \left( \frac{2\pi m_e^* kT}{h^2} \right)^{3/2}$ .

Ako je  $m_e^* = m$  dobiva se za  $n$  vrijednost:

$$n = 4,8 \cdot 10^{21} T^{3/2} e^{-(E_g - E_F)/kT} \quad [m^{-3}]$$

Slično se može izračunati i broj šupljina u jedinici volumena valentne vrpce tj. koncentracija šupljina  $p$ :

$$p = \frac{N_g}{V} = \int_{-\infty}^{E_V} \frac{1}{V} \frac{dN_g}{dE} dE = \int_{-\infty}^{E_V} \frac{1}{V} (1 - P_{FD}) \frac{dS_g}{dE} dE$$

gdje je  $N_g$  broj šupljina u volumenu  $V$  valentne vrpce, a  $E_V$  energija vrha valentne vrpce. Ako se energiji  $E_V$  pripiše vrijednost 0 (crtež 4.23) izraz za koncentraciju poprima oblik:

$$p = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^0 (1 - P_{FD}) \frac{dS_g}{dE} dE \quad (4.32)$$

Vjerojatnost da dopustivo stanje energije  $E$  nije zauzeto elektronom (odnosno da se tu nalazi šupljina),  $1 - P_{FD}$ , jednaka je (prema relaciji 3.39"):

$$1 - P_{FD} = 1 - \frac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{(E_F - E)/kT} + 1}$$

a gustoće stanja prema relaciji (4.3) ako se energija mjeri od vrha valentne vrpce (crtež 4.23):

$$\frac{dS_g}{dE} = 8\pi\sqrt{2} \frac{m_g^{*3/2}}{h^3} (0 - E)^{1/2} = 8\pi\sqrt{2} \frac{m_g^{*3/2}}{h^3} (-E)^{1/2}$$

gdje je  $m_g^*$  efektivna masa šupljina.

Uz navedene relacije dobiva se za koncentraciju šupljina u valentnoj vrpci:

$$p = \frac{8\pi\sqrt{2} m_g^{*3/2}}{h^3} \int_{-\infty}^0 \frac{(-E)^{1/2}}{e^{(E_F - E)/kT} + 1} dE$$

$$p = 2 \left( \frac{2\pi m_s^* kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-E_F/kT} \quad (4.33)$$

odnosno

$$p = N_v e^{-E_F/kT} \quad (4.33')$$

gdje je

$$N_v = 2 \left( \frac{2\pi m_s^* kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

Umnožak koncentracije elektrona i šupljina (relacije 4.31. i 4.33.) u uvjetima toplinske ravnoteže:

$$np = \text{konst } T^3 e^{-E_g/kT} \quad (4.34)$$

konstantan je za danu temperaturu i širinu zabranjene vrpce  $E_g$ , te ne zavisi o položaju Fermieve razine .

### Fermijeva razina

U čistim (intrinzičnim) poluvodičima koncentracija elektrona u vodljivoj vrpći jednaka je koncentraciji šupljina u valentnoj vrpći:

$$n = p$$

odnosno

$$m_s^*{}^{3/2} e^{-E_F/kT} = m_e^*{}^{3/2} e^{-(E_g - E_F)/kT} \quad (4.35)$$

Iz relacije (4.35) može se izračunati Fermieva energija:

$$E_F = \frac{E_g}{2} + \frac{3kT}{4} \ln \frac{m_s^*}{m_e^*} \quad (4.36)$$

Za silicij, germanij i mnoge druge poluvodiče drugi član relacije (4.36) mnogo je manji od prvog te se može zanemariti, pa slijedi da je:

$$E_F \approx E_g/2$$

Fermieva razina nalazi se na sredini zabranjene vrpce širine  $E_g$ .

Položaj Fermieve razine u poluvodičima s primjesama može se odrediti iz uvjeta za električnu neutralnost unutar kristala:

$$n + n_A^- = p + n_D^+ \quad (4.37)$$

gdje su  $n$  i  $p$  koncentracije elektrona i šupljina dane s relacijom (4.31) odnosno (4.33),  $n_D^+$  je koncentracija donorskih iona, a  $n_A^-$  koncentracija akceptorskih iona u kristalu.

Koncentracija akceptorskih iona  $n_A^-$  može se izračunati preko koncentracije atoma akceptora  $n_A$  i Fermieva faktora  $P_{FD}(E_A)$  koji daje vjerojatnost da je stanje zauzeto elektronom:

$$n_A^- = n_A P_{FD}(E_A) = \frac{n_A}{e^{(E_A - E_F)/kT} + 1} \quad (4.38)$$

Analogno za koncentraciju donorskih iona:

$$n_D^+ = n_D (1 - P_{FD}(E_D)) = \frac{n_D}{e^{(E_F - E_D)/kT} + 1} \quad (4.39)$$

gdje je  $E_A$  energija akceptorskih stanja, a  $E_D$  energija donorskih stanja.

Uvjet (4.37) uz relacije (4.31<sup>o</sup>), (4.33<sup>o</sup>), (4.38) i (4.39) poprima oblik:

$$N_c e^{(E_F - E_g)/kT} + \frac{n_A}{1 + e^{(E_A - E_F)/kT}} =$$

$$= N_v e^{-E_F/kT} + \frac{n_D}{e^{(E_F - E_D)/kT} + 1} \quad (4.40)$$

Da bi se iz relacije (4.40) dobila Fermieva energija trebalo bi poznavati sve parametre relacije. Problem bi se mogao riješiti aproksimacijski za određena područja.

Npr. za slučaj n-tipa kristala kod kojega je  $n_D \gg n_A$  jednadžba (4.37) postaje:

$$n = p + n_D^+ \quad (4.41)$$

Ako su temperature niske može se očekivati da će vrlo malo elektrona biti pobudjeno iz valentne vrpce u vodljivu pa bi se u relaciji (4.41) veličina  $p$  mogla zanemariti te bi:

$$n = n_D^+ \quad (4.42)$$

$$N_c e^{(E_F - E_g)/kT} = \frac{n_D}{e^{(E_F - E_D)/kT} + 1} \quad (4.42')$$

Ovo područje niskih temperatura naziva se ekstrinzično područje. Proračun Fermieve razine jednostavan je za sljedeće temperaturne intervale:

a) ako su vrlo niske temperature (reda veličine 10 K) samo mali dio donorskih atoma su ionizirani tako da većina donorskih stanja još sadrži elektrone. U nazivniku može se zanemariti 1 u odnosu na eksponencijalni član te relacija (4.42') postaje:

$$N_c e^{(E_F - E_g)/kT} = n_D e^{(E_D - E_F)/kT}$$

ili

$$2 E_F - E_g - E_D = kT \ln \frac{n_D}{N_c} \quad (4.43)$$

b) za nešto više temperature, kod kojih skoro svi atomi primjesa postaju ionizirani, može se pisati:

$$n_D^+ = n_D$$

U ovoj aproksimaciji potpune ionizacije jednadžba (4.42) postaje:

$$n = n_D \quad \text{ili}$$

$$N_c e^{(E_F - E_g)/kT} = n_D$$

odnosno

$$E_F - E_g = kT \ln \frac{n_D}{N_c} \quad (4.44)$$

Ako temperatura raste, dostići će se točka u kojoj će broj elektrona pobudjenih iz valentne u vodljivu vrpce biti veći od broja pobudjenih iz donorskih stanja u vodljivu vrpce (koji može biti najviše jednak broju donorskih atoma  $n_D^+ = n_D$ ).

Za ovo područje koncentracija šupljina  $p \gg n_D^+$ , te se jednačba (4.41) reducira na:

$$n = p \quad (4.45)$$

Poluvodič je u intrinzičnom području:

Relacija (4.45) uz (4.31) i (4.33) poprima oblik:

$$N_c e^{(E_F - E_g)/kT} = N_v e^{-E_F/kT}$$

odnosno

$$2 E_F - E_g = kT \ln \frac{N_v}{N_c}$$

te je

$$E_F = \frac{E_g}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_v}{N_c}$$

Fermieva razina leži skoro u sredini zabranjene vrpce.

LITERATURA

- M. Alonso, E.J. Finn ..... "Fundamental University Physics",  
Vol. III, Addison-Wesley, Reading,  
1969.
- A. Beiser ..... "Concepts of Modern Physics", Mc  
Graw-Hill Book Co., New York, 1967.
- M. Born ..... "Einstein's Theory of Relativity",  
Dover Publ., New York, 1962.
- D.A. Davies ..... "Waves, Atoms and Solids", Longman,  
London, 1978.
- A.J. Dekker ..... "Solid State Physics", Prentice-Hall
- A. Einstein ..... "Zur Elektrodynamik bewegter Körper",  
Annalen der Physik, 17, 1905.
- A. Einstein..... "Die Grundlage der allgemeinen Re-  
lativitätstheorie", Annalen der  
Physik, 49, 1916.
- A. Einstein..... "Relativity", Methuen, London, 1964.
- A.P. French ..... "Principles of Modern Physics",  
John Wiley, New York, 1962.
- C.L. Hemenway, R.W. Henry,  
M. Caulton ..... "Physical Electronics" , John Wiley,  
New York, 1967.
- T.S. Hutchison, D.C. Baird "The Physics of Engineering Solids",  
John Wiley, New York, 1963.
- D.M. Ivanović, V.M. Vučić „Atomska i nuklearna fizika", Naučna  
knjiga, Beograd, 1967.
- C. Kittel ..... "Thermal Physics", John Wiley, New  
York, 1976.
- V. Knapp ..... „Fizika materijala", Elektrotehnički  
fakultet, Zagreb, 1978.
- P. Kulišić ..... „Predavanja iz fizike", Fakultet elek-  
trotehnike, strojarstva i brodogradnje,  
Split, 1973.

- P. Kulišić ..... „Predavanja iz Fizike IV“, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split, 1975.
- L.D. Landau, E.M. Lifšic ..... „Teorija polja“, Naučna knjiga, Beograd, 1952.
- L.D. Landau, E.M. Lifšic ..... „Kvantna mehanika“, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1966.
- H. Minkowski ..... "Space and Time" , Address delivered at the 80th Assembly at Cologne, 1908.
- D. Mušicki ..... „Uvod u teorijsku fiziku“ I i II dio, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1965.
- O. Oldenberg, N.C. Rasmussen .. "Modern Physics for Engineers", Mc Graw Hill Book Co., New York, 1966.
- R. Resnick ..... "Relativity and Early Quantum Theory", John Wiley, New York, 1972.
- F.K. Richtmyer, E.H. Kennard, J.N. Cooper ..... "Introduction to Modern Physics", Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1969.
- I. Supek ..... "Teorijska fizika i struktura materije", I i II dio, Školska knjiga, Zagreb, 1977.
- R.L. Sproull ..... "Modern Physics", John Wiley, New York, 1966.
- R.T. Weidner, R.L. Sells ..... "Elementary Modern Physics", Allyn and Bacon, Boston, 1972.
- H.D. Young ..... "Fundamentals of Optics and Modern Physics", Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1968.