

Dr. Ante Maletić
Fakultet elektrotehnike,
strojarstva i brodogradnje

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Udžbenici Sveučilišta u Splitu

Split, 1993

Recezent
Prof. dr. MARTIN JADRIĆ
Prof. dr. BOŽO SKALICKI

Lektor
Dr. ZDRAVKO MUŽINIĆ

Grafička obrada
ŽELJKO GLADINA

Izdavač
FESB Split • ELMAP Podstrana

Tisak: SPIRIDON BRUSINA - Donja Lomnica

Naklada: 700 primjeraka

Odobreno odlukom Sveučilišta u Splitu
broj: 02-484/3-93

ISBN: 953-6114-03-08

PREDGOVOR

Osnova su za ovaj udžbenik predavanja koja već dugo održavam studentima strojarstva na FESB-u u Splitu, a u okviru programa ELEKTROTEHNIKA koji sadrži:

- Osnove elektrotehnike
- Električne strojeve
- Osnove elektronike

Ovaj sadržaj pokriva samo Osnove elektrotehnike. Prvo izdanje tiskano je 1987. godine pod nazivom: OSNOVE ELEKTROTEHNIKE za studente strojarstva. Iako je udžbenik namijenjen studentima strojarstva, u ovom izdanju izostavio sam u naslovu to naglasiti jer vjerujem da udžbenik može poslužiti svim studentima kojima elektrotehnika nije glavni studij.

Uz manje razlike u tekstu, izdanja se razlikuju i po tome što su tu na kraju svakog poglavlja dodani zadaci za vježbu s rješenjima s ciljem da se olakša usvajanje gradiva.

Prilikom odabira slovnih simbola pridržavao sam se IEC standarda, publikacija 27-4 iz 1983. god.

U stručnoj literaturi na našem jeziku često se susrećemo s različitim nazivima za jednu veličinu, npr. *elektromotorna sila* (EMS, E) u literaturi iz električnih strojeva najčešće se naziva *inducirani napon*, a kod kemijskih izvora *unutarnji napon*. Spomenuo bih i naziv *protjecanje* koji je uobičajen u nas a fizikalno je ipak zorniji naziv *magnetnomotorna sila* (MMS). Slično vrijedi i za *magnetski napon* itd. U navedenim primjerima nisam se dosljedno pridržavao jednog naziva u uvjerenju da će time čitatelj biti bolje pripremljen za literaturu koja ga poslije očekuje.

Zahvaljujem svima koji su pomogli pri izradi ovog udžbenika: Ivanki Bonači na istipkanom tekstu, Željku Gladini na grafičkoj obradi, mr. Slavku Vujeviću na korisnim primjedbama, dr. Mariji Višić na savjetima vezanim za treće poglavlje i lektoru dr. Zdravku Mužiniću. Posebno zahvaljujem recenzentima prof. dr. Martinu Jadriću i prof. dr. Boži Skalickom čije su mi sugestije bile dragocjene.

Ipak, sav bi uloženi trud bio uzaludan, da nije bilo onih koji su novčano pomogli tiskanje. To su u prvom redu:

- HRVATSKA ELEKTROPRIVREDA
- KONČAR - Elektroindustrija, d.d. Zagreb
- KONČAR - ELEKTRIČNI UREĐAJI, d.o.o. Split

na čemu im izražavam iskrenu zahvalnost.

SADRŽAJ

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE	ix
1. ELEKTROSTATIKA	1
1.1. Elektricitet i struktura tvari	1
1.2. Coulombov zakon	2
1.3. Električno polje	3
1.3.1. Tok električnog polja	5
1.4. Gaussov zakon	6
1.4.1. Primjeri primjene Gausova zakona	7
1.5. Rad u električnom polju	9
1.5.1. Električni potencijal	9
1.5.2. Primjeri izračunavanja potencijala	11
1.5.3. Električni napon	12
1.6. Polje između ravnih ploča. Električni kapacitet	14
1.7. Spajanje kondenzatora	16
1.7.1. Serijski spoj kondenzatora	16
1.7.2. Paralelni spoj kondenzatora	18
1.8. Materija u električnom polju	20
1.8.1. Vodič u električnom polju	20
1.8.2. Izolator u električnom polju	22
1.8.3. Polarizacija dielektrika	23
1.9. Ukapčanje kondenzatora na istosmjerni napon	25
1.10. Energija nabijenog kondenzatora	28
1.11. Stvaranje statičkog elektriciteta	29
1.11.1. Opasnost od statičkog elektriciteta	32
1.12. Statički elektricitet u Zemljinoj atmosferi	33
1.12.1. Zaštita od groma	33
Zadaci	34
2. ELEKTRIČNE STRUJE	39
2.1. Strujni krug	41
2.1.1. Dogovor o smjeru električne struje	42
2.2. Specifična električna vodljivost	43
2.3. Električna vodljivost i električni otpor	43
2.4. Ohmov zakon	45
2.5. Izračunavanje električnog otpora	47
2.5.1. Specifični otpor vodljivih materijala	47
2.5.2. Utjecaj temperature na električni otpor	49
2.6. Prazni hod i kratki spoj	51
2.7. Spajanje električnog otpora	52

2.7.1. Serijski spoj otpornika	52
2.7.2. Paralelno spajanje otpornika	53
2.8. I. Kirchhoffov zakon	56
2.9. Serijski spoj više izvora	58
2.10. Paralelno spojeni izvori	59
2.11. II. Kirchhoffov zakon	60
2.12. Snaga i energija električne struje	61
2.12.1. Električna energija	62
2.12.2. Još jedan osvrt na električnu snagu	63
2.12.3. Korisnost	64
2.13. Prilagođavanje	64
2.14. Neke primjene osnovnih zakona elektrotehnike	66
2.14.1. Proširenje mjernog opsega ampermetra, voltmetra i vatmetra	66
2.14.2. Ommetar	67
2.14.3. Wheatstoneov most	68
2.14.4. Potenciometar	70
2.15. Rješavanje mreža istosmjerne struje	71
2.16. Transfiguracija zvijezde i trokuta	72
Zadaci	74
3. ELEKTROLIZA I KEMIJSKI IZVORI ELEKTRIČNE ENERGIJE	79
3.1. Elektrolitička disocijacija	79
3.2. Elektroliza	80
3.3. Faradayevi zakoni elektrolize	81
3.4. Napon polarizacije	83
3.5. Primarni kemijski izvori električne energije	84
3.5.1. Voltin članak	84
3.5.2. Leclancheov članak	86
3.5.3. Alkalno-MnO ₂ članak	87
3.5.4. Članak cink-zrak	87
3.5.5. Živin oksid-cink članak	88
3.5.6. Srebro oksid-cink članak	88
3.5.7. Magnezijev članak	88
3.5.8. Litijev članak	88
3.6. Sekundarni izvori ili akumulatori	90
3.6.1. Olovni akumulator	90
3.6.2. Čelični akumulator	92
3.6.3. Nikal-kadmij akumulator	92
3.6.4. Srebro-cink akumulator	93
3.6.5. Srebro-kadmij (Ag-Cd) akumulator	93
4. MAGNETIZAM	95
4.1. Magnetsko polje	96
4.1.1. Magnetski tok	96
4.1.2. Magnetska indukcija	98

4.1.3. Jedinice magnetskog toka i indukcije	98
4.2. Zakon elektromagnetske indukcije	99
4.3. Djelovanje magnetskog polja na naboj u gibanju	101
4.4. Djelovanje magnetskog polja na vodič kroz koji protječe struja	102
4.5. Biot-Savartov zakon	103
4.6. Polje ravnog vodiča	104
4.7. Sila između dva paralelna vodiča kroz koje protječe struja	105
4.7.1. Utvrđivanje iznosa struje jakosti 1A	106
4.8. Linijski integral magnetske indukcije. Zakon protjecanja	106
4.9. Magnetski krug	109
4.10. Samoindukcija	113
4.11. Medusobna indukcija	115
4.11.1. Rasipni magnetski tok	116
4.12. Uspostavljanje struje u strujnom krugu s induktivitetom	117
4.12.1. Energija strujnog kruga s induktivitetom	118
4.13. Otvaranje sklopke u strujnom krugu s induktivitetom	118
4.14. Magnetske osobine materije	120
4.14.1. Indukcija u svitku s materijom	121
4.15. Feromagnetizam	123
4.15.1. Histereza	125
4.16. Magnetski krug s feromagnetom	128
4.17. Energija magnetskog polja	130
4.18. Elektromagnetska sila	132
4.19. Vrtložne struje	133
Zadaci	134
5. IZMJENIČNE STRUJE	139
5.1. Definicija	139
5.2. Karakteristične vrijednosti izmjenične struje	141
5.2.1. Srednja vrijednost izmjenične struje	141
5.2.2. Efektivna vrijednost izmjenične struje	142
5.2.3. Međusobni odnosi srednje, efektivne i maksimalne vrijednosti	143
5.2.4. Fazni kut	144
5.3. Nastajanje izmjeničnog napona	145
5.4. Prikazivanje izmjeničnih veličina	147
5.5. Radni otpor, induktivitet i kaacitet u krugu izmjenične struje	148
5.5.1. Radni otpor	149
5.5.1.1. Površinski ili skin-efekt	149
5.5.2. Induktivitet u strujnom krugu izmjenične struje	151
5.5.3. Kondenzator u strujnom krugu izmjenične struje	153
5.6. Snaga i energija izmjenične struje	154
5.7. Kombinacija elemenata R,L,C u strujnom krugu izmjenične struje	159
5.7.1. Serijski spoj elemenata R,L,C	159
5.7.2. Paralelni spoj elemenata R,L,C	161
5.8. Primjena simboličke metode u rješavanju mreža izmjenične struje	163

5.8.1.	Nekoliko napomena o kompleksnim brojevima	163
5.8.2.	Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva	165
5.8.3.	Množenje kompleksnih brojeva	165
5.8.4.	Dijeljenje kompleksnih brojeva	165
5.8.5.	Potenciranje i korjenovanje kompleksnog broja	165
5.8.6.	Logaritam kompleksnog broja	166
5.8.7.	Primjena na serijski spoj R,L,C. Kompleksna impedancija	166
5.8.8.	Primjena na paralelni spoj R,L,C. Kompleksna vodljivost	168
5.9.	Rezonancija u strujnim krugovima izmjenične struje	171
5.10.	Višefazne struje	173
5.10.1.	Trofazne struje	173
5.10.2.	Odnos napona i struja za spoj namota u zvijezdu	177
5.10.3.	Spoj trofaznog namota u trokut	178
5.11.	Snaga trofaznog sustava	180
	Zadaci	181
6.	PRILOG	187
6.1.	Grčki alfabet	187
6.2.	Međunarodno usvojene mjerne jedinice	187
6.3.	Elektronska konfiguracija elemenata	190
	UPOTRIJEBLJENE OZNAKE	192
	LITERATURA	197
	ABECEDNO KAZALO	198

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Vječno ljudsko nastojanje da objasni uzroke prirodnih pojava i sila, te volja čovjeka da ih podvrgne svojoj kontroli i korisno ih upotrijebi u svladavanju teških i napornih fizičkih poslova, razvilo je niz grana znanosti. Jedna od tih grana je elektrotehnika.

Pod nazivom elektrotehnika podrazumijevamo onaj dio znanosti i tehnike koji se bavi primjenom elektriciteta u rješavanju tehničkih zadataka.

Klasična podjela elektrotehnike na jaku i slabu struju više ne odgovara; nema jasne granice koja bi dijelila ova dva područja. Jedinственu elektrotehniku danas čini niz područja kao što su:

- proizvodnja i prijenos električne energije
 - elektrostrojarstvo,
 - informacijska elektronika,
 - industrijska elektronika i sl.,
- a izuzetno veliku primjenu nalazi u:
- upravljačkoj i regulacijskoj tehnici,
 - informatički, itd.

Osnovne značajke elektrotehnike manifestiraju se time što se električna energija može proizvesti u velikim količinama na jednom mjestu gdje se razni vidovi energije pretvaraju u električnu. Električna energija lako se prenosi vodovima na velike daljine, od izvora do mjesta gdje se koristi za obavljanje najrazličitijeg rada pri čemu se pokazala prikladnom u svim granama ljudske djelatnosti.

$1/4 \pi \epsilon_0$ 9×10^9
 $= 9 \times 10^9$

1. ELEKTROSTATIKA

1.1. Elektricitet i struktura tvari

Da bi se saznalo nešto više o elektricitetu, treba poći od strukture tvari, od građe atoma. Postoje tri vrste čestica od kojih su građeni atomi svih kemijskih elemenata. To su elektroni, protoni i neutroni. Prema Bohrovu modelu atoma, elektroni kruže oko jezgre po kružnim ili eliptičkim putanjama, kojih promjeri (koji određuju veličinu atoma) iznose 2 do 3×10^{-10} m. To je oko deset tisuća puta više od promjera jezgre. Bohr je model atoma zamislio kao minijaturni Sunčev sustav.

Masa protona određuje se iz atomske mase, odnosno mola vodika (1,008) i Avogadrova broja ($6,022 \times 10^{23}$), jer se od svih elemenata u prirodi jedino vodik sastoji od samo dvije čestice: jednog protona i jednog elektrona. Iz toga izlazi da masa atoma vodika iznosi:

$$\frac{1,008}{6,022 \times 10^{23}} = 1,67 \times 10^{-24} \text{ g} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Utvrđeno je da je masa protona 1840 puta veća od mase elektrona. To praktično znači da je masa atoma vodika približno jednaka masi protona. Masa neutrona približno je jednaka masi protona:

$$\left. \begin{array}{l} \circ \text{ masa elektrona iznosi } 1,67/1840 \cdot 10^{-27} = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \\ \circ \text{ masa protona kao i masa neutrona iznosi } 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{array} \right\}$$

Osim takvog vodika, postoje i njegovi izotopi, tzv. "teški vodik". To je vodik kojega jezgra sadrži, uz proton i jedan ili dva neutrona (deuterij ili tricij). Koncentracija deuterija u običnom vodik u iznosi 1:5000, a koncentracija tricija znatno je manja. U normalnom stanju atoma broj elektrona uvijek je jednak broju protona, i taj broj određuje mjesto atoma u periodičkom sustavu elemenata. Iza vodika drugi element u periodičkom sustavu je helij (${}^2\text{He}^4$). Njegova jezgra ima 2 protona i 2 neutrona i naziva se α -čestica. Izotop helija u jezgri ima 2 protona i jedan neutron. U prirodnom stanju helija koncentracija izotopa je 1:100.000. Slijedeći element je litij, u oblicima ${}^6\text{Li}$ i ${}^7\text{Li}$. U prirodnom obliku koncentracija ova dva izotopa je 92:8.

Porastom broja mjesta u sustavu elemenata raste složenost atoma. Najsloženiji je atom u prirodi uran, mješavina tri izotopa: ${}_{92}\text{U}^{238}$, ${}_{92}\text{U}^{235}$, ${}_{92}\text{U}^{234}$ (99,28%, 0,71%, 0,006%). U razvoju atomske bombe proizvedeni su i složeniji atomi: neptunij ${}_{93}\text{Np}^{239}$ i plutonij ${}_{94}\text{P}^{239}$.

U raspravu o strukturi materije upustili smo se zbog toga što elektroni i protoni međusobno ispoljavaju, pored gravitacijske, još jednu privlačnu silu. Ta je sila posljedica činjenice da su elektroni i protoni nosioci električnog naboja. Proton je nosilac pozitivnog (+), a elektron negativnog (-) električnog naboja. Svi elektroni imaju jednak negativni, a svi protoni

jednak pozitivni električni naboj. Budući da nijedan normalan sustav, npr. normalni atom, koji sadrži jednak broj elektrona i protona, ne ispoljava električnost, zaključuje se da su naboji protona i elektrona jednaki po iznosu. Proton i elektron nosioci su najmanjeg električnog naboja što predstavlja osnovne prirodne jedinice električnog opterećenja. Električni naboj elektrona iznosi:

$$\left[-Q_0 = -0,16 \times 10^{-18} \text{ As} = \text{C, kulon.} \right]$$

Isti iznos naboja pozitivnog predznaka ima proton, odnosno ion vodika. Izlazi da je za realizaciju 1 As potrebno $6,25 \times 10^{18}$ elektrona.

Za neko tijelo kažemo da je naelektrizirano ako ima višak ili manjak elektrona. Količina električnog naboja označava se s q ili Q .

1.2. Coulombov zakon

Charles Augustin Coulomb prvi se bavio istraživanjem zakona sile između dva električna naboja i utvrdio da ona iznosi:

$$\left[F = k \frac{QQ'}{r^2} \right], \quad (1)$$

gdje su:

Q i Q' - količine električnog naboja
 r - udaljenost između naboja Q i Q' .

Coulombov zakon vrijedi za točkaste naboje u vakuumu (praktično i za zrak). Izraz "točkasti naboj" znači da su dimenzije tijela, na kome se nalazi naboj, zanemarive u odnosu na udaljenost r . Konstanta k ovisi o jedinicama u kojima su izražene sila, naboj i udaljenost. Te jedinice mogu biti tako izabrane, da konstanta k bude jednaka jedinici. Utvrdit ćemo kolika je vrijednost te konstante u Internacionalnom sistemu mjernih jedinica (SI) koji je u službenoj upotrebi. Prema ovom sistemu, jedinica za električni naboj je kulon (C) i definira se preko struje jakosti 1A. Naime, to je ona količina elektriciteta koja prođe kroz presjek vodiča za jednu sekundu, ako jakost struje iznosi 1A. Jedinica za duljinu je metar, a za silu njutn (vidi 6.2.).

Budući da su jedinice za silu, električni naboj i duljinu određene nezavisno od Coulombova zakona, brojčanu vrijednost ove konstante trebalo bi odrediti eksperimentalno, mjereći silu, naboj i duljinu. U SI brojna vrijednost konstante k u vakuumu iznosi približno:

$$\left[k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right]$$

Da bi se izbjegla pojava faktora 4π u drugim jednadžbama koje izlaze iz Coulombova zakona, uvedena je nova konstanta ϵ_0 :

$$\left[\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \text{ ili } k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \right]. \quad (2)$$

Sada je Coulombov zakon izražen relacijom:

$$\left[F = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} \right]. \quad (3)$$

Nova dimenzijska konstanta ϵ_0 ima vrijednost:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,85 \cdot 10^{-12},$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

Ova dimenzijska konstanta vrijedi za vakuum i za zrak. Za različite sredine ima druge iznose, i na taj način karakterizira sredinu, te predstavlja fizikalnu konstantu.

Primjer: Izračunajte elektrostatsku silu između dviju α -čestica na međusobnoj udaljenosti od 10^{-13} m. α -čestica sadrži naboj od $+2 \times 1,6 \times 10^{-19}$ As.

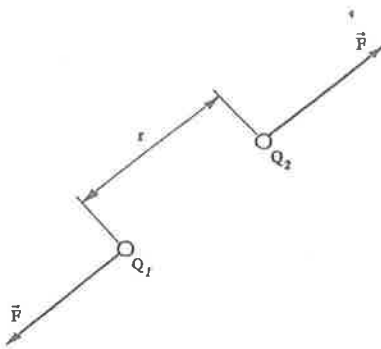
$$F = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(3,2 \cdot 10^{-19})^2}{(10^{-13})^2} = 9,2 \cdot 10^{-2},$$

$$F = 9,2 \times 10^{-2} \text{ N}.$$

Za iste čestice, gravitacijska sila iznosi: $F = 2,98 \times 10^{-37}$ N. Izlazi da je gravitacijska sila zanemariva u odnosu na električnu (Coulombovu).

1.3. Električno polje

Zamislimo dva pozitivna naboja Q_1 i Q_2 (slika 1) na međusobnoj udaljenosti r . Na oba naboja javlja se sila koja, kao i gravitacijska, djeluje na daljinu bez prisutnosti bilo kakve materijalne povezanosti između Q_1 i Q_2 . To je eksperimentalna činjenica. Jednostavno rečeno, znamo da se naboji tako ponašaju (Coulombov zakon). Ako bi postojao samo jedan naboj, npr. Q_1 , a zatim se bilo gdje u prostor na udaljenosti r od naboja Q_1 unese pokusni naboj Q' , na uneseni naboj djelovat će sila. Taj prostor, u kojem se manifestiraju električne sile, naziva se električno polje.



Slika 1. Sila na naboju prema Coulombovu zakonu

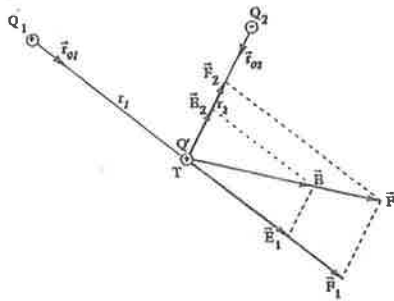
Jakost električnog polja određena je omjerom sile koja djeluje na pokusni naboj, i iznosom toga naboja:

$$E = \frac{F}{Q'} \quad \left[\frac{N}{C} \right] = \left[\frac{V}{m} \right] \quad (4)$$

Jakost električnog polja jednaka je, dakle, sili po jedinici naboja i ima isti pravac i smjer kao i sila koja djeluje na pozitivni pokusni naboj u promatranoj točki. Na osnovi gornje relacije sila se može izraziti kao produkt jakosti električnog polja i naboja. Kako je sila vektor, a naboj skalar, i jakost električnog polja je vektor:

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad (5)$$

Iz ovoga izlazi, ako je pokusni naboj negativan, sila i jakost polja imaju suprotan smjer.



Slika 2. Zbrajanje sila uslijed djelovanja više naboja

Ako se u prostoru nalazi dva ili više točkastih naboja Q_1, Q_2, \dots na udaljenostima r_1, r_2, \dots od točke T u kojoj se nalazi pokusni naboj Q' , jakost električnog polja u točki T bit će određena vektorskim zbrojem svih

pojedinih djelovanja. Kao primjer određena je jakost električnog polja \vec{E} u točki T što ga stvaraju dva različita naboja (slika 2). Na osnovu:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

gdje je:

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q'}{r_1^2} \vec{r}_{01}; \quad \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q'}{r_2^2} \vec{r}_{02},$$

rezultantno električno polje u točki T ima jakost $\vec{E} = \vec{F}/Q'$, a pojedine komponente iznose:

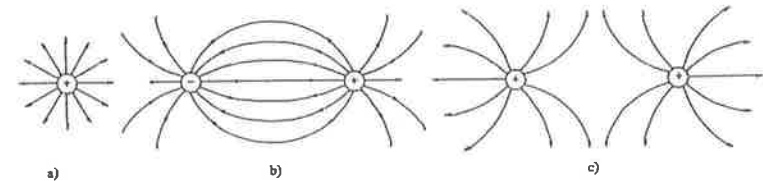
$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1^2} \vec{r}_{01}; \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2^2} \vec{r}_{02}.$$

Riječ "točkasti" opravdava pretpostavku da je cjelokupni naboj Q udaljen od točke T za iznos r. Međutim, ako je promatrani naboj smješten na tijelu konačnih dimenzija, proračun jakosti električnog polja u točki T se komplicira. Tijelo treba zamisliti podijeljeno na n elemenata volumena ΔV_i . Sada svaki element ΔV_i ima svoj naboj Q_i i udaljenost r_i od točke T u kojoj se želi odrediti vektor jakosti električnog polja. Za vektor \vec{E} izlazi:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q_i}{r_i^2} \vec{r}_{0i} \quad (6)$$

1.3.1. Tok električnog polja

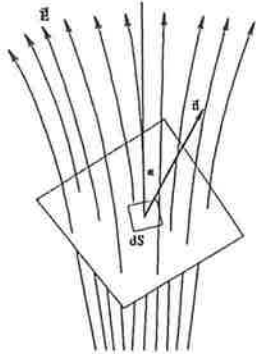
Električno polje se zamišlja kao skup silnica koje se u svakoj točki poklapaju s vektorom jakosti električnog polja (slika 3).



Slika 3. Silnice električnog polja: a) pozitivnog naboja, b) pozitivnog i negativnog naboja, c) dvaju pozitivnih naboja

Električno polje može biti homogeno i nehomogeno. Homogeno je kada u svim točkama vektor E ima istu jakost i smjer. Prikazuje se paralelnim, jednoliko raspoređenim silnicama. U sva tri primjera na slici 3. polje je nehomogeno.

Skup silnica kroz promatrane površine predstavlja tok električnog polja Ψ_E . Ako vektor jakosti električnog polja i normala promatrane površine (slika 4) zatvaraju kut α i ako polje nije homogeno, treba promatrati



Slika 4. Tok električnog polja

diferencijal površine dS i diferencijal toka kroz tu površinu. Tada vrijedi:

$$\Psi_E = \int_S E \cos \alpha \, dS \quad \text{ili vektorski} \quad \Psi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (7)$$

1.4. Gaussov zakon

Proračun električnog polja u nekoj točki prema onome što smo do sada vidjeli kompliciran je i za jednostavnije slučajeve raspodjele naboja. Zbog toga se u svrhu proračuna jakosti električnog polja najčešće koristi Gaussov zakon.

Ako se traži jakost električnog polja \vec{E} na zatvorenoj površini S , koje je posljedica naboja Q smještenog u toj zatvorenoj površini, te ako silnice polja i normala zatvaraju kut α prema normali, vrijedi relacija:

$$\oint_S E \cos \alpha \, dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (8)$$

ili u vektorskom obliku:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (9)$$

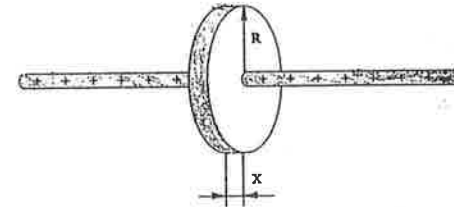
što predstavlja Gaussov zakon.

Ako se u električno polje postavi zatvorena površina bilo kakvog oblika, Gaussov zakon kaže da je ukupan tok kroz tu površinu, u smjeru od te površine, jednak $1/\epsilon_0$ puta iznos pozitivnog naboja unutar te površine.

1.4.1. Primjeri primjene Gaussova zakona

Polje ravnog nabijenog vodiča

Zamislimo zatvorenu površinu, kao na slici 5, u obliku valjka polumjera R i duljine X . U osi tog valjka nalazi se ravni pozitivno naelektrizirani vrlo dugački i vrlo tanki vodič. Silnice oko vodiča su okomite na vodič i na zakrivljenu površinu valjka pri čemu je jakost električnog polja jednaka u svim točkama zakrivljene površine plašta valjka. Ni jedna silnica ne prolazi kroz baze (bočne strane) valjka. Zbog toga, od površine valjka treba uzeti



Slika 5. Uz proračun jakosti električnog polja usljed naboja raspodijeljenog uzduž tankog vodiča

samo plašt. Ako se sada primijeni Gaussov zakon, vrijedi relacija:

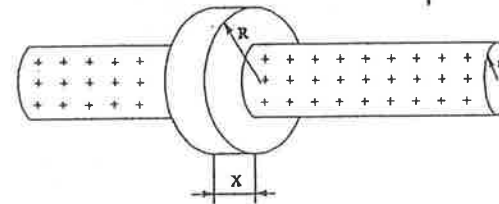
$$E 2\pi R X = \frac{1}{\epsilon_0} Q' X,$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{R},$$

gdje je Q' iznos naboja po jedinici duljine vodiča.

Polje izvan naelektriziranog cilindra

Na slici 6. prikazan je dugi cilindar polumjera r , kojeg je površinska gustoća naboja σ . To je iznos naboja po jedinici površine. Jedinica za σ je

Slika 6. Uz proračun jakosti električnog polja usljed naboja raspodijeljenog po površini cilindra polumjera r

kulon po metru kvadratnom:

$$[\sigma] = \left[\frac{C}{m^2} \right] \frac{As}{m^2}$$

Promatramo polje na udaljenosti R od osi naelektriziranog cilindra. Kao i u prethodnom primjeru, jedino kroz plašt cilindra prolaze silnice polja, pa treba uzeti samo površinu $2\pi R X$. Naboj se nalazi na površini $2\pi r X$, i ako ga izrazimo kroz površinsku gustoću naboja σ , Gaussov zakon daje:

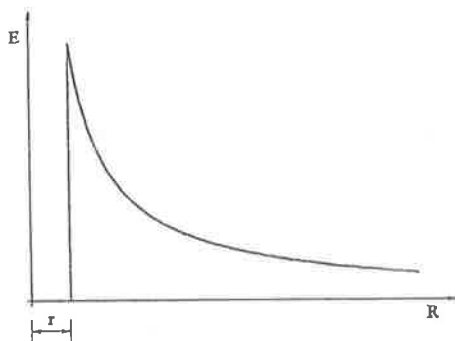
$$E 2\pi R X = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma 2\pi r X,$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma r}{R}$$

Ako se umjesto površinske gustoće naboja σ uvede naboj po jedinici duljine $Q' = 2\pi r \sigma$, ili $r\sigma = Q'/2\pi$, za jakost električnog polja dobije se ista relacija kao u prethodnom primjeru:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{R}$$

Dakle, naelektrizirani cilindar na udaljenosti R od svoje osi ($R > r$) stvara polje istog iznosa kao i vrlo tanka ravna naelektrizirana žica koja bi bila smještena u osi promatranog cilindra. Unutar cilindra jakost polja jednaka je nuli što daje Gaussov zakon i što je prikazano dijagramom na slici 7.



Slika 7. Jakost električnog polja naelektriziranog cilindra u točki udaljenoj R od njegove osi

Polje izvan naelektrizirane kugle polumjera r

Traži se jakost električnog polja na sferi polumjera $R > r$. Uz pretpostavku da je površinska gustoća naboja ravnomjerno raspoređena po površini kugle, Gaussov zakon daje:

$$E 4\pi R^2 = \frac{4\pi r^2}{\epsilon_0} \sigma \quad \text{ili}$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{r^2 \sigma}{R^2}$$

Ako se jakost polja izrazi preko ukupnog naboja kugle, tada vrijedi:

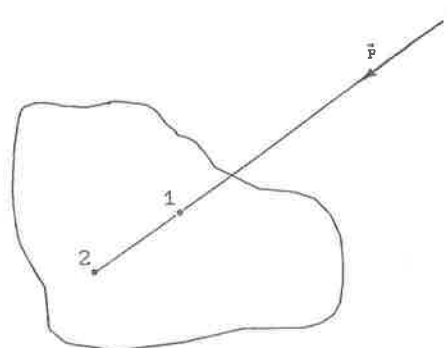
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

Polje unutar kugle jednako je nuli.

1.5. Rad u električnom polju

1.5.1. Električni potencijal

Iz činjenice da se u električnom polju naboj kreće uslijed djelovanja sile, zaključujemo da električno polje sadrži potencijalnu energiju.



Slika 8. Vanjska sila svladavajući silu električnog polja mijenja iznos potencijalne energije naboja

Zamislimo da se kao na slici 8, jednom vanjskom silom \vec{F} naboj Q prenese iz neke točke izvan električnog polja u točku 1 u električnom polju. Pri tome sila \vec{F} izvrši rad svladavajući reakciju sile električnog polja. Uslijed toga naboj Q primi potencijalnu energiju brojčano jednaku radu koji je

izvršila vanjska sila \vec{F} . Taj rad je određen izrazom:

$$A = -\int_{\infty}^R F \cos \alpha \, dl = -Q \int_{\infty}^R E \cos \alpha \, dl = -Q \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

gdje je dl element puta kojim se giba naboj, a α kut koji zatvara taj element i vektor jakosti električnog polja u promatranoj točki. Predznak minus ukazuje na to da se rad vrši u smjeru suprotnom smjeru električnog polja.

Posebno je značajna energija koju primi jedinični pozitivni naboj, što je u stvari električni potencijal u toj točki.

Potencijal električnog polja u nekoj točki brojčano je jednak radu A koji izvrši vanjska sila prilikom prijenosa jediničnog pozitivnog naboja iz nješta u prostoru izvan električnog polja u tu točku.

Ako se sa φ označi električni potencijal, za točku 1 na slici 8, vrijedi:

$$\varphi_1 = \frac{A_1}{Q} = -\int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Isto vrijedi za svaku točku električnog polja, čime se očituje potencijalno polje.

Jedinica za mjerenje potencijala naziva se, po talijanskom fizičaru Alessandru Volti, volt i označava se slovom V .

Električni potencijal ima iznos 1V, ako se izvana unese u električno polje naboj iznosa +1C i pri tome izvrši rad od 1J.

Granice integrala znače da je naboj krenuo iz točke u beskonačnosti i stigao u točku na udaljenosti R od središta izvora električnog polja. Budući da u polaznoj točki nema električnog polja, u toj točki nema ni potencijalne energije. Nadalje, točka R je bilo koja točka potencijalnog polja. Radi toga u integralu za potencijal ne treba pisati granice. Na taj način izraz za potencijal glasi:

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (10)$$

Ako je električno polje stvoreno pozitivnim nabojem, u točkama tog polja potencijal je pozitivan. Prilikom unosa pozitivnog naboja energija električnog polja povećava se za veličinu izvršenog rada.

Ako je električno polje stvoreno negativnim nabojem u točkama tog polja potencijal je negativan. Prilikom unosa pozitivnog naboja, sada se pod djelovanjem sile električnog polja energija električnog polja smanji za veličinu rada koji izvrši polje. Potencijal, vidimo, može biti pozitivan, negativan i nulti s tim da nulti nije nužno posebno definirati. U svakodnevnoj praksi za nulti potencijal ($\varphi=0$) uzima se potencijal Zemlje.

Ako je u promatranoj točki potencijal nastao iz više izvora, ukupni potencijal se dobije kao suma potencijala svih izvora:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

1.5.2. Primjeri izračunavanja potencijala

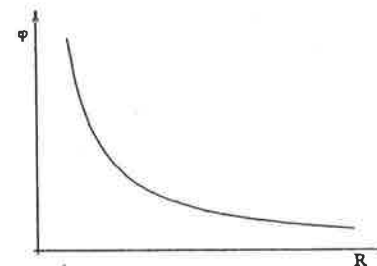
Potencijal u polju točkastog naboja

Izraz za jakost polja stvorenog točkastim nabojem glasi:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2},$$

a na osnovu (10) potencijal je:

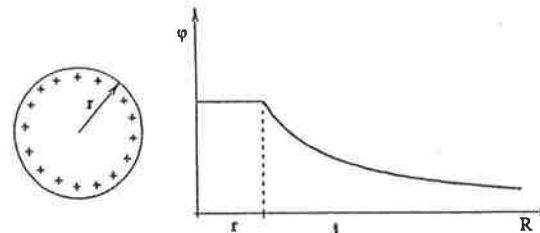
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}.$$



Grafički prikaz raspodjele potencijala prikazan je na slici.

Potencijal ostvaren nabojem na metalnoj kugli

Za slučaj kada je polje nastalo uslijed naboja raspoređenog na površini metalne kugle polumjera r vrijedi isti izraz za potencijal kao u prethodnom primjeru. Naime, isti izraz vrijedi samo za točke izvan kugle. Unutar kugle potencijal je konstantan i to upravo onog iznosa koliki je na površini kugle. To je posljedica činjenice da je unutar kugle jakost električnog polja jednaka nuli. Raspodjela ovog potencijala prikazana je na slijedećoj slici:



Potencijal dvaju točkastih naboja

Zadana su dva točkasta naboja, suprotnih predznaka, na međusobnoj udaljenosti d . Treba odrediti potencijal u točki T koja je od pozitivnog naboja udaljena $4/5 d$, a od negativnog $3/5 d$.

Potencijal u točki T uslijed pozitivnog naboja je:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{5Q}{4d},$$

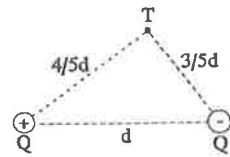
a potencijal u istoj točki uslijed negativnog naboja je:

$$\varphi_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{5Q}{3d}.$$

Ukupni potencijal u točki T iznosi:

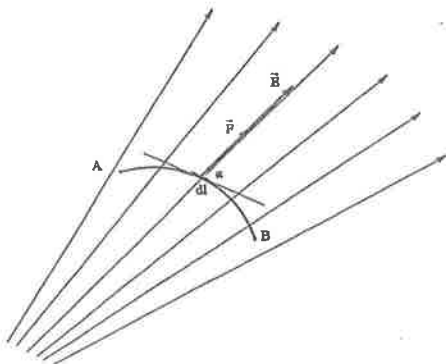
$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{5}{4(4\pi\epsilon_0)} \frac{Q}{d} - \frac{5}{3(4\pi\epsilon_0)} \frac{Q}{d},$$

$$\varphi = -\frac{5}{12} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d}.$$



1.5.3. Električni napon

Zamislimo ponovno električno polje jakosti \vec{E} u kojem treba iz točke A u točku B prenijeti pozitivni električni naboj Q (slika 9). Vektori jakosti



Slika 9. Definiranje napona kao razlike potencijala u točkama A i B

električnog polja \vec{E} i sile \vec{F} koja djeluje na naboj Q usmjereni su u svakoj točki puta kao tangenta u toj točki na silnicu polja.

Ako sa $d\vec{l}$ označimo vektor elementa puta koji je orijentiran u smjeru pomaka naboja nekom vanjskom silom, tada je α kut koji zatvaraju vektori \vec{E} i $d\vec{l}$. Prilikom pomaka naboja na putu dl izvrši se rad:

$$dA = -F \cos \alpha dl = -QE \cos \alpha dl = -Q\vec{E} d\vec{l},$$

a na cijelom putu od A do B rad će iznositi:

$$A = -\int_A^B F \cos \alpha dl = -Q \int_A^B E \cos \alpha dl = -Q \int_A^B \vec{E} d\vec{l}, \quad (11)$$

Izvršeni rad koji se ostvari prilikom pomaka naboja Q na putu od A do B jednak je umnošku iznosa naboja i linijskog integrala jakosti električnog polja na zadanom putu. Budući da je riječ o potencijalnom polju, taj će rad imati uvijek isti iznos, neovisno o putu koji je odabran. Iz te činjenice možemo zaključiti da je taj rad brojčano jednak razlici onih iznosa rada koje smo imali prilikom definicije potencijala u točkama 1 i 2, (slika 8):

$$A = A_{12} = A_2 - A_1 = Q \int_2^1 \vec{E} d\vec{l}.$$

Ako se rad odnosi na jedinični naboj, on predstavlja napon između točaka 1 i 2:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{Q} = \frac{A_2 - A_1}{Q} = \frac{A_2}{Q} - \frac{A_1}{Q} = \int_2^1 \vec{E} d\vec{l}. \quad (12)$$

Izlazi da je linijski integral jakosti električnog polja jednak električnom naponu između promatranih točaka.

Napon između dviju točaka u električnom polju brojčano je jednak radu koji se izvrši prilikom pomaka jediničnog pozitivnog naboja između tih točaka.

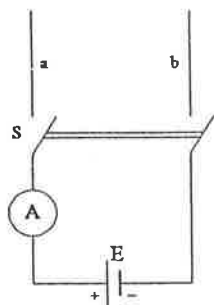
Na osnovi definicije potencijala slijedi:

$$U_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (13)$$

Izlazi da je razlika potencijala dviju točaka u električnom polju jednaka električnom naponu između tih točaka.

1.6. Polje između ravnih ploča. Električni kapacitet

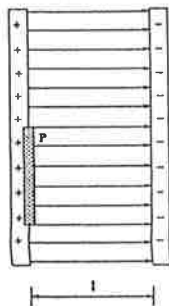
Razmotrimo shemu na slici 10. Izvor napona na jednom kraju ima manjak, a na drugom višak elektrona. Na taj način obje točke izvora su na različitim potencijalima. Ako se uključi sklopka S, vodiči a i b će doći pod napon. Vodič a treba doći na isti potencijal na kojemu se nalazi + kraj izvora. Vodič b će doći na potencijal negativne točke izvora. Da bi se to ostvarilo, neophodno je da dio elektrona s vodiča a prijeđe na vodič b. Taj



Slika 10. Uz objašnjenje pojave pozitivnog i negativnog naboja na vodičima voda pod djelovanjem elektromotorne sile

će proces registrirati ampermetar kao tok električne struje. Pri tome su vodiči a i b primili na sebe $+Q$ i $-Q$ količinu naboja. Kaže se da vod na sebi ima Q količinu elektriciteta. Ako se sklopka S isključi, stanje se neće promijeniti.

Zamislimo da su umjesto dva vodiča a i b upotrijebljene dvije metalne ravne ploče, postavljene paralelno na međusobnoj udaljenosti l . Neka je površina ploča S velika u odnosu na udaljenost l . Očito, između tih ploča postojat će električno polje, koje se očituje djelovanjem sile na pokusni naboj Q' koji bi se unosio u prostor među pločama. To je polje homogeno što znači da je jednake jakosti i smjera u svim točkama prostora $S \times l$ (slika 11). Kolika je jakost tog polja?



Slika 11. Električno polje između dvije ravne i paralelne naelektrizirane ploče koje su međusobno izolirane

Tražena jakost polja najlakše se određuje Gausovim zakonom (9). Radi primjene Gaussova zakona zamislimo jednu zatvorenu površinu u obliku okrugle pločice P . Neka se jedna strana pločice površine dS nalazi u jednoj nabijenoj ploči, a druga u prostoru između ploča. Silnice kroz zamišljenu pločicu prolaze samo kroz površinu dS u prostoru između ploča s nabojem, jer je električno polje u vodiču jednako nuli.

Ako je gustoća naboja na ploči σ , naboj na pločici je σdS , pa se može napisati:

$$EdS = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma dS,$$

ili

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma. \quad (14)$$

U tehničkoj praksi često se susrećemo s pojavom naelektriziranih metalnih ploha koje su međusobno izolirane. Na taj način se dolazi do pojma kapacitivnosti. Ako se jakost električnog polja koje vlada između paralelnih ravnih ploha supstituira sa $E=U/l$, a gustoća naboja supstituira sa $\sigma=Q/S$, dobije se:

$$\frac{U}{l} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{S}.$$

Ova relacija se može i ovako napisati:

$$Q = \epsilon_0 \frac{S}{l} U \quad \text{ili} \quad Q = CU, \quad (15)$$

gdje je:

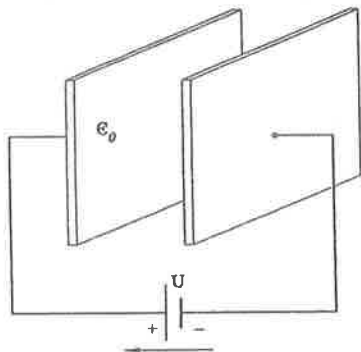
$$C = \epsilon_0 \frac{S}{l}, \quad (16)$$

faktor proporcionalnosti između količine naboja Q i narinutog napona U koji se još naziva kapacitet. Jedinica za kapacitet je, u počast blistavom geniju Michaelu Faradeyu, nazvana farad i označava se slovom F :

$$[C] = \left[\frac{Q}{U} \right] = \frac{As}{V} = \Omega^{-1} s = F.$$

Iz navedenih primjera može se zaključiti da svi metalni dijelovi koji su međusobno izolirani imaju kapacitet. Ta pojava se ne može mimoći. Kapaciteti su često u tehničkoj praksi potrebni. Stoga se izrađuju elementi s točno određenim kapacitetom C . Takvi elementi nazivaju se kondenzatori.

Slika 12 prikazuje jedan pločasti kondenzator koji se sastoji od dvije međusobno paralelne metalne ploče na koje se narine napon U uslijed čega se prikupi naboj Q . Između ploča se nalazi izolator, dielektrik. Kod



Slika 12. Pločasti kondenzator

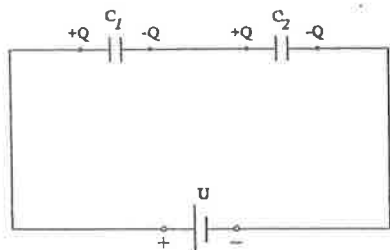
pločastog kondenzatora, u našem primjeru, to je zrak. Sredinu karakterizira konstanta ϵ , koja za zrak, znamo od ranije, iznosi:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

1.7. Spajanje kondenzatora

Budući da je kondenzator jedan od osnovnih elemenata elektrotehničkih uređaja, nameće se potreba međusobnog spajanja tih elemenata s ciljem da se dođe do kapaciteta potrebnog iznosa. To spajanje može biti serijsko i paralelno, ili pak kombinacija tih spojeva. Tada govorimo o mješovitom spoju.

1.7.1. Serijski spoj kondenzatora



Slika 13. Dva serijski spojena kondenzatora

Kao primjer uzmimo dva kondenzatora C_1 i C_2 spojena u seriju. Potrebno je odrediti ukupni kapacitet. Oba kondenzatora primit će na sebe određenu količinu elektriciteta. Koliku? Ploča kondenzatora 1 koja je spojena s plus stezaljkom izvora, primit će naboj iznosa $+Q$, a ploča kondenzatora 2, koja je spojena s minus stezaljkom izvora, primit će naboj iznosa $-Q$. Oba naboja jednaka su po iznosu, ali suprotna po predznaku. Međutim, logično je da će se na drugoj ploči prvog kondenzatora naći naboj iznosa $-Q$ upravo onoga iznosa koji se nakupio na prvoj ploči, ali opet suprotnog predznaka. Na unutarnjoj ploči kondenzatora 2 isto tako nakupit će se jednaka količina naboja kao na vanjskoj ploči, ali suprotnog predznaka. Dopunimo ovo razmatranje činjenicom da se na unutarnjoj ploči prvog kondenzatora može imati naboj samo onih elektrona koji nedostaju na unutarnjoj ploči drugog kondenzatora. Na osnovi ovog izlaganja nameće se zaključak da oba kondenzatora sadrže naboj istog iznosa:

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

a napon izvora će se raspodijeliti na oba kondenzatora:

$$U = U_1 + U_2$$

Iz relacije $Q=CU$ izlazi $U=Q/C$, što vrijedi za svaki kapacitet, pa se relacija za napone može pisati kao:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

Budući da su naboji jednaki, vrijedi:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Da smo promatrali n kondenzatora spojenih u seriju, dobili bismo sumu od n recipročnih vrijednosti. Stoga se može pisati:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (17)$$

Pri serijskom spoju dvaju kondenzatora ukupni kapacitet iznosi:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

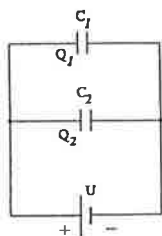
Ako je $C_1 = C_2$, tada je $C = C_1/2$.

Međusobnim dijeljenjem relacija $U_1 = Q/C_1$ i $U_2 = Q/C_2$, dobije se:

$$U_1 : U_2 = C_2 : C_1 \quad (18)$$

Kod serijski spojenih kondenzatora pripadajući naponi odnose se obrnuto nego njihovi kapaciteti.

1.7.2. Paralelni spoj kondenzatora



Slika 14. Dva paralelno spojena kondenzatora

Za spoj na slici 14. vrijedi:

$$U_1 = U_2 = U,$$

i

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Isto tako vrijedi:

$$Q_1 = C_1 U_1 = C_1 U \quad i \quad Q_2 = C_2 U_2 = C_2 U,$$

Iz toga slijedi:

$$Q = C_1 U + C_2 U.$$

Ako se gornja jednačba podijeli s naponom izvora, dobije se:

$$\frac{Q}{U} = C = C_1 + C_2,$$

ili općenito:

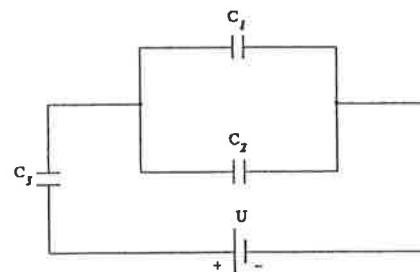
$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (19)$$

Kod paralelno spojenih kondenzatora ukupni kapacitet se dobije kao suma svih paralelno spojenih kondenzatora.

Ukupni kapacitet mješovito spojenih kondenzatora izračunava se kroz nekoliko koraka na način da se pri svakom koraku shema dalje pojednostavi.

Primjer izračunavanja kapaciteta mješovitog spoja kondenzatora

Za spoj prema slici 15. i zadane kapacitete $C_1 = 2\mu\text{F}$, $C_2 = 3\mu\text{F}$ i $C_3 = 5\mu\text{F}$ odredite ukupni kapacitet!



Slika 15. Mješovito spojeni kondenzatori

Najprije treba odrediti kapacitet grupe paralelno spojenih kondenzatora C_1 i C_2 , $C_{12} = C_1 + C_2$, a potom C_{12} i C_3 spojiti u seriju:

$$C = \frac{C_{12} C_3}{C_{12} + C_3} = \frac{(C_1 + C_2) C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{25}{10} \mu\text{F} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{F}.$$

Radi toga što 1 farad predstavlja veliki kapacitet upotrebljavaju se u praksi manje jedinice:

$$1\mu\text{F} = 10^{-6} \text{F} \text{ (mikrofarad)}$$

$$1\text{nF} = 10^{-9} \text{F} \text{ (nanofarad)}$$

$$1\text{pF} = 10^{-12} \text{F} \text{ (pikofarad)}$$

Da bismo dobili osjećaj za veličinu kapaciteta 1 farad, odredimo površinu ploča pločastog kondenzatora tđga kapaciteta, ako su ploče u zraku međusobno udaljene 1 mm!

$$S = \frac{C l}{\epsilon_0} = \frac{10^{-3}}{8,85 \cdot 10^{-12}} = 1,13 \cdot 10^8 \text{ m}^2.$$

Ako bi takva površina bila u obliku kvadrata, njegova stranica bi imala duljinu 10 630m.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q. \quad (24)$$

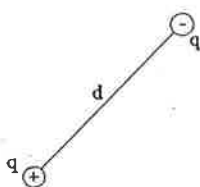
Možda će sada biti jasniji pojam toka. U stvari, riječ je o toku vektora \vec{D} . Za homogeno električno polje vrijedi:

$$\psi = \vec{D}\vec{S} = DS \cos \alpha. \quad (25)$$

1.8.2. Izolator u električnom polju

Izolacijski materijali one su tvari koje nemaju slobodnih elektrona, pa se stoga u izolatorima ne može ostvariti provodna struja. Idealnih izolatora nema, ali je električna vodljivost dobrih izolatora tako mala, da se u praksi zanemaruje. Ipak, prilikom promatranja izolatora u električnom polju pretpostavit ćemo da je izolator idealan. To znači da su sve naelektrizirane čestice međusobno tako povezane silom, da ni jedan elektron ne izlazi iz svoje elementarne strukture.

U normalnom stanju, sve se tvari prema vani očituju kao neelektrične - imaju jednak broj čestica s negativnim i pozitivnim nabojem. Izolacijski materijali se dijele na dvije vrste: nepolarne i polarne, one kod kojih centar djelovanja elektrona pada u centar djelovanja pozitivnih naboja jezgre i one kod kojih se centar djelovanja negativnih naboja nalazi razmaknut od centra djelovanja pozitivnih naboja za iznos d .



Slika 18. Električni dipol

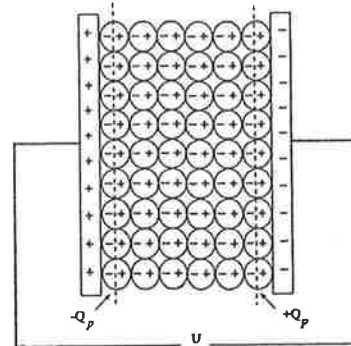
Dva jednaka električna naboja, suprotnih predznaka, međusobno razmaknuta za duljinu d nazivaju se električni dipol. Produkt iznosa naboja i njihovog razmaka naziva se moment dipola:

$$p = qd. \quad (26)$$

Molekule druge vrste, zbog prirode sastava, već su polarizirane, ali se to prema vani ne manifestira zbog kaotičnih termičkih oscilacija.

1.8.3. Polarizacija dielektrika

Ako se izolator unese u vanjsko električno polje pod djelovanjem sile polja, pozitivni će se naboji u izolatoru pomaknuti u smjeru električnog polja, a elektroni će se pomaknuti u suprotnom smjeru. To znači, da je izolator polariziran. Osi dipola obiju vrsta izolatora postaviti će se u smjeru jakosti električnog polja \vec{E} s tim što će se onima, koji su po prirodi polarizirani, povećati razmak d . Električna polarizacija dielektrika zorno je prikazana na slici 19.



Slika 19. Polarizacija dielektrika u električnom polju

Električno polje usmjerava osi dipola u smjeru vektora \vec{E} , pa će se tako na strani ploče izolatora, uz negativnu ploču kondenzatora, pojaviti pozitivni polovi dipola, a uz pozitivnu ploču kondenzatora negativni polovi dipola. Za takav izolator kaže se da je električki polariziran. Stupanj električne polariziranosti nekog dielektrika mjeri se gustoćom stvorenog naboja na plohi polariziranog dielektrika σ_p . Ako je površina polarizirane plohe S , a stvoreni naboj Q_p , vrijedi relacija:

$$\sigma_p = \frac{Q_p}{S}. \quad (27)$$

Pri normalnoj jakosti električnog polja polariziranost σ_p proporcionalna je jakosti polja E :

$$\sigma_p = \alpha E. \quad (28)$$

Kod vrlo velikih jakosti polja \vec{E} ova proporcionalnost ne vrijedi. Ako su svi dipoli usmjereni, više se ne može povećavati polariziranost ako se povećava jakost polja. Pri određenoj jakosti polja dolazi do proboja dielektrika. Ona vrijednost jakosti električnog polja pri kojoj dolazi do proboja naziva se dielektrična čvrstoća.

Ovdje se javljaju slobodni i vezani naboji. Naboji su na plohama izolatora vezani, dok su naboji na pločama kondenzatora slobodni. Razlika je u tome što se slobodni naboji pod djelovanjem električnog polja mogu kretati, dok se vezani mogu tek malo električno pomaknuti.

Pojavom vezanih naboja na izolatoru, zbog suprotnih predznaka, kompenzira se dio slobodnih naboja na kondenzatoru. Stoga će prisutnost dielektrika bitno promijeniti električno polje koje je postojalo u vakuumu ili u zraku.

Sada pretpostavimo da su ploče kondenzatora spojene trajno na izvor konstantnog istosmjernog napona U . Time će električno polje $E=U/l$ biti konstantno, bez obzira na pojavu kompenziranih naboja. Naime, izvor će pločama kondenzatora dodati upravo onoliko naboja, koliko ih je kompenzirano. Sada je iznos slobodnog naboja veći:

$$Q = Q_0 + Q_p .$$

Koeficijent α u (28) ima istu dimenziju kao dielektrična konstanta za vakuum ili zrak ϵ_0 (As/Vm) s tim što je α različitog iznosa za različite materijale: $\alpha = \chi \epsilon_0$, gdje je χ bezdimenzijski broj i naziva se *susceptibilnost* (propustljivost) izolacijskog materijala.

Tablica 1: Relativna dielektrična konstanta i dielektrična čvrstoća za neke izolatore

Naziv	Relativna dielektrična konstanta ϵ_r	Dielektrična čvrstoća kV/mm
Azbest cement	6 ... 10	2 ... 3
Beton normalni	3 ... 3,6	1
Drvo impregnirano u ulju	3,3... 4	2,5... 14
Gume:		
prirodna, tvrda	2,5... 5	15 ... 40
prirodna, meka	2,1... 2,9	16 ... 15
umjetna	15 ... 25	23
silikonska	2,5... 4	15 ... 40
Impregnirana tkanina uljna	5 ... 7	30 ... 50
Izolacijski lak	3,5	>30
Kvarc taljeni	3,2... 3,9	12 ... 15
Mramor	8,3... 10,3	20 ... 50
Papir u ulju	4	50 ... 60
Porculan	2,3... 2,5	2,5... 3,8
Prešpan	2 ... 4	8 ... 11
Polivinil klorid	3,4	40 ... 60
Staklo, alkalično	4 ... 12	10 ... 45
Tinjac	6 ... 7	25 ... 200
Ulje, transformatorsko	2,4	8 ... 20

Sada za gustoću slobodnog naboja vrijedi:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_p = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 (1 + \chi) E . \quad (29)$$

Veličina $1+\chi$ naziva se *relativna dielektrična konstanta* i označava se s ϵ_r , pa vrijedi:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad \text{ili} \quad \epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0 . \quad (30)$$

Izraz za ϵ_r je omjer dielektrične konstante promatranog materijala i vakuuma. Sada se može reći da je izraz za kapacitet pločastog kondenzatora isti za bilo koju vrstu dielektrika s tim što umjesto ϵ_0 treba pisati ϵ :

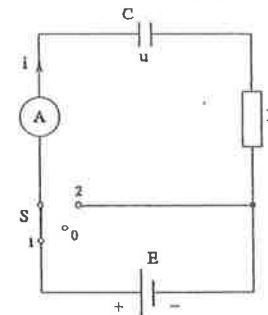
$$C = \epsilon \frac{S}{l} . \quad (31)$$

Pored dielektrične konstante ϵ , za izolator je važna i dielektrična čvrstoća. U tablici 1. navedene su vrijednosti relativne dielektrične konstante i dielektrične čvrstoće za nekoliko različitih materijala.

1.9. Ukapčanje kondenzatora na istosmjerni napon

Radi lakšeg razumijevanja ovog teksta, bilo bi korisno da se čitalac informira o strujnom krugu i II. Kirchhoffovu zakonu (2.1. i 2.11.).

Zadan je strujni krug istosmjerne struje koji sadrži radni otpor R i kapacitet C (slika 20). Sklopka S postavi se u položaj 1. Iako dielektrik kondenzatora predstavlja prekid strujnog kruga, kratkotrajno će poteći



Slika 20. Nabijanje i izbijanje kondenzatora

struja, što će registrirati ampermetar. Ta je pojava već prije objašnjena. Od trenutka uključivanja vrijedi jednadžba naponske ravnoteže. Pri tome u strujnom krugu postoji elektromotorna sila izvora E , napon na radnom otporu iR i napon u stvorenu prisutnošću naboja na pločama kondenzatora:

Iznos naboja q na pločama raste od nule do konačnog iznosa Q . U svakom trenutku vrijedi relacija [vidi II. Kirchhoffov zakon (66)]:

$$E - u = i \cdot R,$$

a od prije znamo da je:

$$q = Cu, \quad dq = Cdu, \quad u = \frac{q}{C}.$$

Količina promjenljivog naboja vezana je za tok struje:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{pa je} \quad i = C \frac{du}{dt}.$$

Kada se uvrsti ovo u naponsku jednadžbu, dobije se diferencijalna jednadžba:

$$E - u = C \frac{du}{dt} R, \quad \text{odnosno} \quad E - u = CR \frac{du}{dt}.$$

Umnožak konstanti CR ima za jedinicu sekundu, pa se naziva *vremenska konstanta* i označava se sa T .

Sada diferencijalna jednadžba glasi:

$$\frac{du}{E-u} = \frac{dt}{T}.$$

Rješenje gornje diferencijalne jednadžbe glasi:

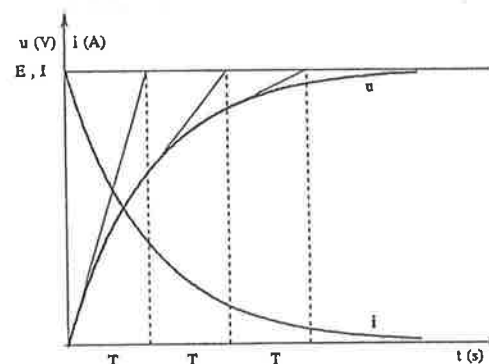
$$u = E(1 - e^{-t/T}). \quad (32)$$

Uvrštenjem (32) u relacije za naboj i struju dobije se:

$$q = Q(1 - e^{-t/T}), \quad (33)$$

$$i = I e^{-t/T}. \quad (34)$$

Ova rješenja pokazuju da se sve tražene veličine mijenjaju po eksponencijalnom zakonu. Veličina se ne mijenja skokovito, nego je potrebno neko vrijeme (teoretski ∞) da dostigne stacionarnu vrijednost. Ovakve promjene vrijednosti nazivaju se prijelaznom pojavom. Te su promjene prikazane na slici 21. Vremenska konstanta predstavlja vrijeme za koje bi promatrana veličina dostigla stacionarnu vrijednost kada bi se mijenjala po tangenti na krivulji u promatranoj točki.



Slika 21. Promjena napona i struje kondenzatora nakon ukapčanja kondenzatora na izvor elektromotorne sile E

Eksponencijalna krivulja ima svojstvo da za nekoliko vremenskih konstanti dođe praktički na puni iznos. Ako se u izraz za napon unese određeno vrijeme, dobit će se brzina njegove promjene (tablica 2.).

Tablica 2. Brzina promjene veličina u prijelaznoj pojavi

$t = 0$	$1 - e^{-0}$	$= 0$
$t = T$	$1 - e^{-1}$	$= 0,632$ (63,21%)
$t = 2T$	$1 - e^{-2}$	$= 0,865$ (86,47%)
$t = 3T$	$1 - e^{-3}$	$= 0,9502$ (95,02%)
$t = 4T$	$1 - e^{-4}$	$= 0,9817$ (98,17%)
$t = 5T$	$1 - e^{-5}$	$= 0,9933$ (99,33%)
$t = 6T$	$1 - e^{-6}$	$= 0,9975$ (99,75%)

Trajanje prijelazne pojave je vrijeme nabijanja kondenzatora. Iz tablice 2. vidi se da prijelazna pojava praktično prestaje nakon 4-5 vremenskih konstanti. Iz $T = RC$ slijedi da je vremenska konstanta veća, što su veći iznosi za R i C .

Ako se preklopka S (slika 20) postavi na položaj 2, nastupit će pražnjenje kondenzatora. Pri tome će napon kondenzatora mijenjati iznos od $U=E$ do nule, struja će promijeniti smjer, a iznos će joj se mijenjati po istom zakonu:

$$u = U e^{-t/T}, \quad (35)$$

$$i = -\frac{U}{R} e^{-t/T}. \quad (36)$$

1.10. Energija nabijenog kondenzatora

Energija koja se sakupi u nabijenom kondenzatoru može se odrediti iz ukupne energije koju preda izvor elektromotorne sile. Vratimo se jednadžbi naponske ravnoteže:

$$E = iR + u .$$

Jednadžba energetske ravnoteže dobit će se iz naponske ako se ova pomnoži s iznosom idt :

$$Eidt = i^2 Rdt + uidt .$$

Napon i struju kondenzatora može se zamijeniti na osnovi $u=q/C$ i $dq=idt$:

$$Eidt = i^2 Rdt + \frac{1}{C} q dq .$$

Lijeva strana jednadžbe predstavlja utrošenu energiju izvora (vidi 2.12) za vrijeme dt , pa je:

$$dW_{izv} = i^2 Rdt + \frac{1}{C} q dq ,$$

ili

$$W_{izv} = R \int_0^{\infty} i^2 dt + \frac{1}{C} \int_0^Q q dq . \quad (37)$$

Prvi član na desnoj strani predstavlja gubitke u radnom otporu (vidi 2.12), a drugi je član energija akumulirana u električnom polju kondenzatora koja se sakupi prilikom nabijanja kondenzatora na iznos Q :

$$W_{el} = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} . \quad (38)$$

Uzevši u obzir (15), može se pisati:

$$W_{el} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} = C \frac{U^2}{2} . \quad (39)$$

Jedinica za energiju nazvana je, prema engleskom fizičaru Jamesu Joullu, džul i označava se slovom J :

$$[W_{el}] \quad V A s = J .$$

Gustoća energije homogenog polja za volumen dielektrika $V=Sl$ primjenom (31) iznosi:

$$w = \frac{W_{el}}{V} = \frac{\epsilon \frac{S}{l} U^2}{2Sl} = \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{U}{l} \right)^2 ,$$

odnosno, prema (23):

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon} . \quad (40)$$

Budući da se iznosi veličina E i D odnose na pojedine točke dielektrika, ove formule se mogu iskoristiti i za proračun energije nehomogenog električnog polja. Gustoća energije u elementu volumena iznosi:

$$w = \frac{dW_{el}}{dV} = \frac{DE}{2} = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon} ,$$

a za cijeli će volumen energija biti:

$$W_{el} = \int_V \frac{ED}{2} dV . \quad (41)$$

1.11. Stvaranje statičkog elektriciteta

Sve su stvari u prirodi u normalnom stanju električki uravnotežene. Ako se ova ravnoteža poremeti, tijelo postaje naelektrizirano, tj. nabijeno statičkim elektricitetom. Statički elektricitet nastaje na tri načina:

- ako se dvije međusobno izolirane elektrode priključe na izvor istosmjernog napona, što smo donekle razradili,
- ako se dvije različite stvari taru jedna o drugu i potom razdvoje, i
- električnom influencijom.

Kada se međusobno trljaju dvije različite izolacijske stvari (ili jedna vodljiva, a druga izolator), time se približe jedna drugoj na razmak reda veličine dimenzije molekula (10^{-8} cm), pri čemu dolazi do djelovanja među nabojima njihovih atoma i do stvaranja tzv. kontaktnog napona. Tada je električno polje između atomskih naboja toliko jako, da dolazi do čupanja i privlačenja elektrona i iz nevodljivih stvari. Pri tome, elektroni izlaze iz onih stvari u kojima je za njihov izlazak potreban manji rad. Materije se tada nabijaju pozitivno. Veću sposobnost nabijanja imaju materijali s većom

relativnom dielektričnom konstantom ϵ_r . Ako se dvije tvari nabiju električnošću (Q), a potom razdvoje, dolazi do smanjenja kapaciteta, a time i do povećanja napona. Kod strojeva, koji prerađuju izolacijske materijale, ovi naponi dostižu i nekoliko desetaka tisuća volti. Električni naboji u svakodnevnoj praksi nastaju uglavnom zbog trenja, udaranja ili stiskanja različitih materijala i njihovog naknadnog razdvajanja.

Statički električnost susrećemo u svakodnevnom životu i on može biti i koristan i štetan. Koristi se u proizvodnji prilikom nanošenja premaza, pri odvajanju dima i prašine, pri doradbi tekstila, pri obradi papira itd. Na djelovanju statičkog električnosti zasniva se rad električne leće, elektronskog mikroskopa i generatora vrlo visokih napona. Ali njegova pojava može biti i štetna. Statički električnost uzrok je privlačenja električno nabijenih čestica prašine na filmove, gramofonske ploče i mjerne aparate. Posebno teške posljedice mogu imati električna pražnjenja iskrom koja se javljaju pri dodiru nabijenih tijela. To može biti uzrok požara ili eksplozije lako zapaljivih predmeta. Grom je također posljedica statičkog električnosti. Udar groma može izazvati teške ozljede i smrt, oštećenja objekata pa i požar, a na električnim postrojenjima i vodovima može izazvati i prekid napajanja električnom energijom.

U svakodnevnom životu često se susreću primjeri pojave statičkog električnosti.

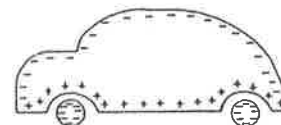
Tekstilna vlakna od perlona, najlona, vune, pamuka itd. nabijaju se električnošću uslijed trenja prilikom proizvodnje, a i prilikom odvajanja od podloge. Nadalje, tu pojavu imamo pri proizvodnji papira i na roto tisku. Naboj je veći, što se proces brže odvija.

Vrlo opasan slučaj elektrostatičkog naboja javlja se prilikom strujanja nevodljivih i zapaljivih tekućina. Tada se naboji jednog predznaka skupljaju na zidovima, cijevima, spremištima i drugdje, a naboji drugog predznaka otječu s tekućinom. Kada se tekućina smiri, nastaje naboj. Česti nosioci naboja su eter, sumporouglik, benzol i benzin. Naboj može nastati i kad plinovi izlaze pod tlakom, ako sa sobom nose različite nečistoće (rde, kapljice vode itd.).

Događa se da se i prah nabije električnošću što može prouzročiti požar. Naročito je zapaljiv prah organskog porijekla: brašno, ugljena prašina, prah gume, plastičnih masa, tekstilnih materijala, eksploziva, lijekova ... Zapaljive mogu biti i prašine anorganskog porijekla: sumpor, magnezij, aluminij. Ova se prašina nabija pri gibanju u proizvodnom procesu: pri mljevenju, drobljenju, miješanju, transportiranju u cijevima, ako prolaze uređajima za filtriranje i prilikom pakiranja.

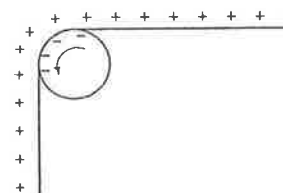
Prilikom kretanja automobila elektriziranje nastaje zbog trenja automobilskih guma po asfaltu i udaranja zrna pijeska i prašine o metalne

dijelove automobila. Uslijed toga može doći do sitnog iskrenja, kao i do radio smetnji. Često je električni potencijal karoserije toliki, da se prilikom izlaska iz automobila osjeti mali električni udar.



Slika 22. Sakupljanje naboja na automobilu prilikom vožnje kroz suhi zrak

Sakupljanje električnog naboja na avionu nastaje iz dva razloga. Uslijed udaranja vodenih kapljica ili pahuljica snijega po površini aviona, površina aviona se pri tome nabije negativno, a čestice pozitivno. Drugi razlog može biti djelovanje munje pri čemu se na površini aviona javljaju pozitivni i negativni naboji. Naboj nastaje i prilikom kretanja nevodljivog materijala preko valjka, npr. remena i remenice prilikom odvajanja transportnih traka od valjka koji im služi kao vodilica.



Slika 23. Sakupljanje naboja na pokretnoj traci i remenici prilikom vrtnje

Statički naboj se javlja i na ljudima koji nose npr. gumene cipele, a hodaju po podu od plastične mase. Naboj na čovjeku se javlja i ako dolazi do trenja između odjeće od vune i sintetičkih vlakana. Provlačenje češlja kroz kosu također izaziva stvaranje naboja. U praksi je zanimljiv slučaj kada negativno nabijeni oblak prikupi pozitivan naboj na jednom dijelu voda. Ako dođe do pražnjenja oblaka ili zemlje, oslobodi se nakupljena količina naboja i kao prenaponski val se rasprostire vodom pri čemu može oštetiti uređaje, iako u vod nije udario grom.

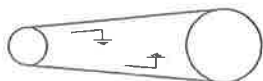
Napon koji se pojavljuje na različitim tijelima zbog statičkog naboja bit će veći ili manji u ovisnosti o mnogim faktorima. U tablici 3. navedeni su izmjereni naponi za neke slučajeve.

Tablica 3. Naponi koji mogu nastati elektrostatičkim nabijanjem. Preuzeto iz Tehničke enciklopedije JLZ III svezak

Slučaj nabijanja	Napon prema zemlji V
Čovjek koji hoda na gumenim potplatima	1.000
Vuna pri preradbi	3.000
Sintetska vlakna pri preradbi	9.000
Papir u strojevima za duboki tisak	30.000
Guma u strojevima za rezanje	150.000
Celuloid pri trenju	40.000
Pogonsko remenje pri brzini kretanja	
3m/s	25.000
10m/s	50.000
15m/s	80.000
Benzol pri strujanju kroz željeznu cijev pod 1,5 at	3.500
Benzin pri slobodnom padu	4.000
Plinovi pri strujanju iz plinskih boca	9.000

1.11.1. Opasnost od statičkog elektriciteta

Statički naboj koji susrećemo svakodnevno ne predstavlja neposrednu opasnost za ljude, jer je energija, koju naboj redovno sadrži, osim udara groma, vrlo mala. Naboj postaje opasan ako izbija putem iskre. Ova iskra može dovesti do eksplozije i zapaliti eksplozivne smjese plinova, para i prašine ako se njihova koncentracija nalazi unutar granice eksplozivnosti i ako se zagrije na dovoljno visoku temperaturu. Pri tome, iskra treba prenijeti dovoljno veliku energiju. Teško je reći koja je količina energije dovoljna za paljenje, ali se zna da je energija veća od 10^{-6} Js opasna. Kao mjera za sprečavanje opasnih posljedica od izbijanja naboja je odvođenje



Slika 24. Oduzimanje naboja s remena za vrijeme rada

naboja, odnosno izbijanje naboja na bezopasan način. Odvođenje naboja može se postići uzemljenjem, pražnjenjem preko šiljaka, okruživanjem naelektriziranih tijela vodljivom trakom. Naboj se može djelomično odvoditi pomoću šiljaka i s predmeta u kretanju (slika 24) koristeći influenciju. Ovo je pražnjenje djelomično jer šiljci počinju djelovati tek kod određene jakosti električnog polja.

1.12. Statički elektricitet u zemljinoj atmosferi

Postojanje statičkog elektriciteta na površini Zemlje i u njezinoj atmosferi tumači se djelovanjem kozmičkih zračenja i radioaktivnošću. Uslijed toga postoje i električna polja u atmosferi. Jakost ovih polja manja je za mirne atmosfere, dok u nevremenu poprma velike vrijednosti.

U elektrotehnici se uzima da je potencijal Zemlje jednak nuli pa se svi potencijali uspoređuju s potencijalom Zemlje. Mjerenja su pokazala da Zemlja nije bez naboja. Njen naboj negativan je i njeno električno polje je usmjereno prema Zemlji.

Prosječna jakost električnog polja Zemlje u srednjoj Evropi za mirna vremena je ≈ 130 V/m. Ono varira prema godišnjem dobu i dobu dana između ≈ 60 i 500 V/m.

Pokazalo se da je dnevna varijacija električnog polja ≈ 40 V/m s minimumom oko 5 sati i s maksimumom oko 19 sati (po Greenwichu). Smatra se da postoji veza između grmljavine i električnog polja Zemlje. Naime, najveće polje pada u vrijeme kad na Zemlji vlada najveća grmljavina (to je vrijeme oko podneva ekvatorijalne Afrike i Južne Amerike). Mjerenja su pokazala da jakost polja brzo pada s visinom - na 2 km iznosi 20% jakosti na Zemlji, a na 10 km svega nekoliko V/m.

Zemlja prema svemirskom prostoru djeluje kao neelektrično tijelo, jer u višim slojevima postoje polja neznatne jakosti koja su zaštićena s nekoliko stotina kilometara debelim slojem ionosfere koja okružuje Zemlju.

Za vrijeme trajanja nevremena poremećuje se ravnoteža statičkog elektriciteta, i u atmosferi se javljaju veći naboji s jačim električnim poljima koji narastu na više stotina kilovolta po metru, a razlike potencijala između naboja dostignu u vrijednost od više stotina milijuna volti. Nevrijeme izaziva, nakon nagomilavanja većih količina elektriciteta u oblacima, atmosferska pražnjenja unutar i između oblaka (munja), te između oblaka i površine Zemlje (grom).

1.12.1. Zaštita od groma

Gromobranska zaštita ima za cilj obranu ljudi i objekata od posljedica atmosferskog pražnjenja. Uređaj za ovu zaštitu naziva se gromobran. Gromobran nije apsolutna zaštita od udara groma, ali se njime štetne posljedice svode na najmanju moguću mjeru. Propisima je određeno koji se objekti moraju štiti od udara groma i tada se izvodi tzv. gromobranska instalacija. Smisao postavljanja gromobrana ogleda se u činjenici da je objekt sigurniji, što je gušća mreža vodiča postavljenih po njegovoj površini. To je, u stvari, princip Faradayeva kaveza.

ZADACI

1. Šuplja metalna kugla polumjera $R = 0,5 \text{ m}$ nabijena nabojem $Q = 500 \text{ nAs}$ nalazi se u prostoru sa $\epsilon_r = 1$. Izračunajte jakosti polja E_1 , E_2 i E_3 u točkama koje se od središta kugle nalaze na udaljenosti $r_1 = 0,25 \text{ m}$; $r_2 = 0,5001 \text{ m}$ i $r_3 = 2 \text{ m}$.

$$(E_1=0, E_2=18 \text{ kV/m}, E_3=1,125 \text{ kV/m}) \checkmark$$

2. Koliki je iznos električnog polja između dviju paralelnih ravnina ako su na njima raspoređeni naboji iste plošne gustoće $\sigma = 3,8 \cdot 10^7 \text{ As/m}^2$ istog predznaka.

$$(E = 0)$$

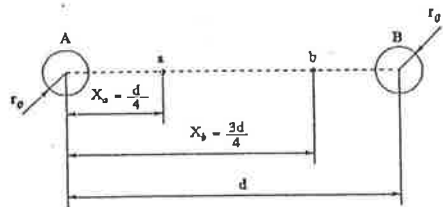
3. Vrlo dug okomito postavljeni štap nabijen je nabojem linijske gustoće $Q' = 3,93 \cdot 10^{-3} \text{ As/m}$. Za štap je pričvršćena preko tanke niti izolatora kuglica težine $G \text{ [N]}$ nabijena nabojem Q istog predznaka. Težina niti duljine $0,1 \text{ m}$ može se zanemariti. Koliki mora biti odnos Q/G da bi uslijed djelovanja gravitacijske i električne sile kut između štapa i niti bio 45° ?

$$(Q/G = 10^9 \text{ m/V})$$

4. Između dviju paralelnih metalnih ploča razmaknutih za $d=5 \text{ cm}$ i priključnih na izvor konstantnog napona $U = 120 \text{ V}$ nalazi se jedanput zrak, a drugi put dielektrik sa $\epsilon_r=2,5$. Odredite plošne gustoće naboja na njima u oba slučaja.

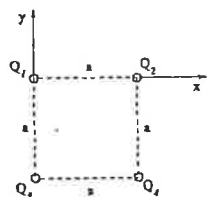
$$(\sigma_1=21,25 \text{ nAs/m}^2, \sigma_2=53,12 \text{ nAs/m}^2)$$

5. Središta dviju metalnih kugli A i B istog polumjera r_0 međusobno su razmaknuta za $d=21r_0$. Ako su kugle nabijene nabojem istog iznosa, ali različitog predznaka, tako da između njih vlada napon U_{AB} , odredite odnos U_{ab}/U_{AB} , gdje je U_{ab} napon između točaka a i b prema slici. Međusobni influencijski efekti na kuglama su zanemareni.



$$(0,133)$$

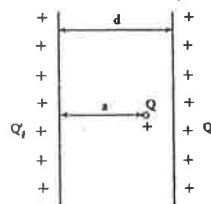
6. Četiri točkasta naboja leže u vrhovima zamišljenog kvadrata prema slici. Odredite iznos i smjer sile na naboj Q_1 .



$$\begin{aligned} Q_1 = Q_4 &= 5 \mu\text{C} \\ Q_2 = Q_3 &= -10 \mu\text{C} \\ a &= 1 \text{ m} \end{aligned}$$

$$(F = 0,524 \text{ N}; F_x = +0,37 \text{ N}; F_y = -0,37 \text{ N})$$

7. U istoj ravnini, prema slici, leže dva beskonačno duga međusobno paralelna pravca nabijena različitim nabojima konstantne linijske gustoće i točkasti naboj Q . Odredite iznos i smjer sile na točkasti naboj.



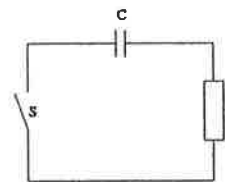
$$\begin{aligned} Q'_1 &= 10^{-9} \text{ C/m} & d &= 1 \text{ m} \\ Q'_2 &= 2 \cdot 10^{-9} \text{ C/m} & a &= 0,8 \text{ m} \\ Q &= 10^{-5} \text{ C} \end{aligned}$$

$$(F = -0,1575 \cdot 10^{-14} \text{ i N})$$

8. Koliki napon odgovarajućeg predznaka ima pločasti kondenzator s razmakom ploča $0,03 \text{ m}$ ako u njegovom polju lebdi kapljica mase 10^{-15} kg kojoj je izbijeno 5 elektrona. Pretpostaviti da su ploče kondenzatora paralelne površini tla.

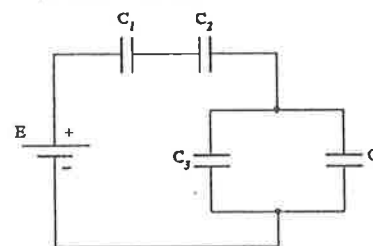
$$(U=368 \text{ V})$$

9. Kondenzator kapaciteta $C=2 \mu\text{F}$, prethodno je nabijen na napon $U = 500 \text{ V}$ i spojen prema slici. Otpor je $R = 10 \text{ M}\Omega$. Treba odrediti koliki je napon na pločama kondenzatora i struju izbijanja u trenutku $t = 5 \text{ s}$ nakon zatvaranja sklopke S. Kolika je početna struja izbijanja?



$$(389,4 \text{ V}; 38,94 \mu\text{A}; 50 \mu\text{A})$$

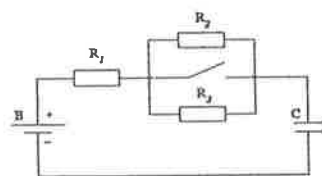
10. Za mješoviti spoj četiri kondenzatora i izvora elektromotorne sile E prema slici, treba odrediti rezultantni kapacitet i napon na pojedinom kondenzatoru.



$$\begin{aligned} C_1 &= 2 \cdot 10^6 \text{ F} & C_4 &= 5 \cdot 10^6 \text{ F} \\ C_2 &= 3 \cdot 10^6 \text{ F} & E &= 1500 \text{ V} \\ C_3 &= 10^5 \text{ F} \end{aligned}$$

$$(1,11 \cdot 10^6 \text{ F}; 833,3 \text{ V}; 555,6 \text{ V}; 111,1 \text{ V})$$

11. Kondenzator se nabija prema slici (sklopka S zatvorena). Nakon $t_1 = 10 \text{ s}$ sklopka S se otvori. Nabijanje se nastavlja. Odrediti napon kondenzatora nakon $t_2 = 50 \text{ s}$.



$$C = 10^{-5} \text{ F}$$

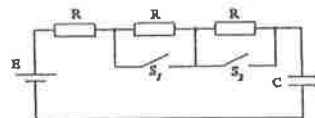
$$E = 500 \text{ V}$$

$$R_1 = 4 \text{ M}\Omega$$

$$R_2 = R_3 = 10 \text{ M}\Omega$$

(250,4 V)

12. Zadana je shema prema slici. Kondenzator se počinje nabijati s otvorenim sklopkama. Nakon 2s zatvori se sklopka S_1 , a nakon iduće 3s i sklopka S_2 . Odredite napon kondenzatora 10s od početka nabijanja.



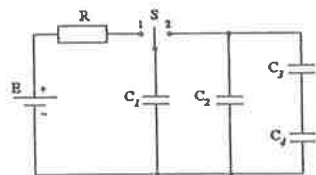
$$R = 10 \text{ M}\Omega$$

$$C_1 = 1 \mu\text{F}$$

$$E = 12 \text{ V}$$

(6,14 V)

13. Zadana je shema prema slici. Preklopka S najprije zauzima položaj 1. Nakon završene prijelazne pojave prebaci se u položaj 2. Odredite naboj pojedinog kondenzatora nakon završetka nove prijelazne pojave. Napomena: u početnom trenutku nema naboja na kondenzatorima.



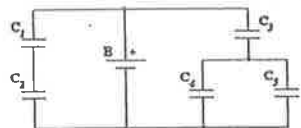
$$E = 12 \text{ V}$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1 \mu\text{F}$$

$$(Q_1=Q_2=4,8\mu\text{As}, Q_3=Q_4=2,4\mu\text{As})$$

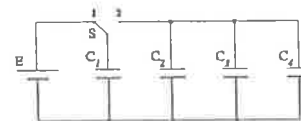
14. Načinite kondenzatorsku bateriju napona $U_b = 100\text{V}$ i kapaciteta $C_b = 50 \text{ pF}$ ako imate na raspolaganju dovoljan broj kondenzatora kapaciteta $C = 20 \text{ pf}$ i napona 50V.

15. Ako je poznat naboj na kondenzatoru kapaciteta C_5 , $Q_5=10^{-6} \text{ C}$, odredite elektromotornu silu izvora. Kapacitet kondenzatora $C_1=C_2=C_3=C_4=C_5 = 1 \mu\text{F}$



(3 V)

16. Kada je preklopka S u položaju 1, kondenzator kapaciteta $C_1 = 10^{-6} \text{ F}$ nabije se na napon $U = 100 \text{ V}$. Nakon toga sklopka se prebaci na položaj 2. Odredite naboje i naponne pojedinih kondenzatora nakon završetka prijelazne pojave.



$$C_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$C_3 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$C_4 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

(10^{-5} As ; $2 \cdot 10^{-5} \text{ As}$; $3 \cdot 10^{-5} \text{ As}$; $4 \cdot 10^{-5} \text{ As}$; 10V)

17. Kondenzator kapaciteta $1,6 \cdot 10^{-5} \text{ F}$ priključi se na izvor elektromotorne sile od 250 V i unutrašnjeg otpora od 50 Ω . Odrediti:
a) struju u trenutku ukapćanja ($t=0$),
b) struju i napon kondenzatora u trenutku $t=2 \text{ ms}$,
c) za koliko se vremena kondenzator nabije na napon od 220 V?

$$(i=5\text{A}; i=0,41\text{A}, 229,5\text{V}; t=1,7\text{ms})$$

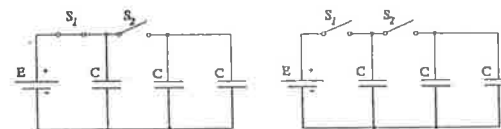
18. Kondenzator kapaciteta $20 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ nabija se strujom $i=10^{-2} e^{-10t} \text{ A}$. Odrediti:
a) napon kondenzatora nakon nabijanja u trajanju od 10T
b) prosječnu snagu koju bi ovako nabijeni kondenzator proizveo kad bi se izbio za 10^{-3} s .

$$(50\text{V}; 25\text{W})$$

19. Kondenzator kapaciteta $C_1 = 10^{-5} \text{ F}$ nabije se na napon iznosa 220 V. Ako se nakon toga kondenzator C_1 odspoji od izvora i paralelno spoji s nenabijenim kondenzatorom kapaciteta $C_2 = C_1$, odrediti napon na kondenzatorima. Za koliko se puta promijeni energija sustava?

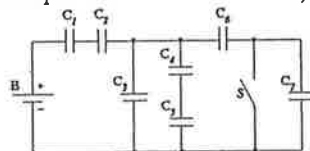
$$(110 \text{ V}; 0,5)$$

20. Kondenzator kapaciteta $C=10^{-5} \text{ F}$ nabije se na napon iznosa 220 V (sklopka S_1 uključena, S_2 isključena). Nakon toga kondenzator se odspoji od izvora, a paralelno se spoji s dva kondenzatora istog kapaciteta (sklopka S_1 isključena, sklopka S_2 uključena). Treba odrediti napon na kondenzatorima nakon završetka prijelazne pojave te omjer energije sustava prije i nakon paralelnog spajanja kondenzatora.



$$(73,3\text{V}; 1/3)$$

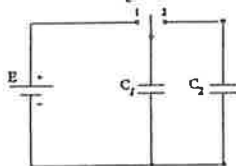
21. Treba odrediti omjer ukupne elektrostatske energije u slučaju kad je sklopka S zatvorena i u slučaju kada je sklopka S otvorena.



$$\begin{aligned} E &= 20 \text{ V} \\ C_1 &= C_2 = 10 \text{ } \mu\text{F} \\ C_3 &= C_4 = 20 \text{ } \mu\text{F} \\ C_5 &= C_6 = C_7 = 1 \text{ } \mu\text{F} \end{aligned}$$

(1,0043)

22. Nakon što se kondenzator kapaciteta $C_1 = 10^{-5} \text{ F}$ nabije na napon iznosa 220 V , odspoji se od izvora i paralelno se spoji s nenabijenim kondenzatorom kapaciteta $C_2 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ F}$. Odredite napon na kondenzatorima i omjer energije sustav prije i nakon što kondenzatoru C_1 paralelno spoji kondenzator C_2 .



(169.23V; 0.77)

23. Iz negativno nabijene ploče pločastog kondenzatora istrgnut je jedan elektron koji prijede na drugu ploču, udaljenu $2 \times 10^{-2} \text{ m}$, kroz vrijeme $t = 1.5 \times 10^{-8} \text{ s}$. Treba odrediti jakost električnog polja kondenzatora i brzinu elektrona kada prijede na drugu stranu.

(1012V/m; $2.67 \times 10^6 \text{ m/s}$)

2. ELEKTRIČNE STRUJE

U elektrostatici smo se bavili nabojem u mirovanju. Ako se električni naboj kreće, govori se o električnoj struji. Razlikujemo električnu struju u vodičima i električnu struju u tekućinama i plinovima. Za vodiče se električna struja definira kao usmjereno gibanje slobodnih elektrona kroz vodič. Ako je riječ o tekućinama i plinovima, govori se o struji naelektriziranih čestica.

Dopunimo prijašnju sliku o strukturi materije. Elektroni kruže oko jezgre po tzv. ljuskama koje se označavaju slovima K, L, M...Q. Svaka ljuska ima podljuske (s, p, d, f - vidi prilog 3). U prvoj ljusci može biti najviše 2 elektrona. Ako atom ima više od 2 elektrona, oni zauzimaju mjesto u drugoj ljusci koja može primiti 8 elektrona. Kada se popuni druga ljuska, formira se treća (18 elektrona) itd. Broj elektrona po ljuskama, od prve pa dalje može biti $2n$, gdje je n redni broj ljuske, što daje: 2, 8, 18, 32, 50... To pravilo vrijedi za prvih 18 elemenata periodičnog sustava. Za ostale elemente vidi prilog 3.

Između elektrona i protona u jednom atomu postoje električne sile. Za elektrotehniku je posebno zanimljivo da su ove sile kod metala, prema elektronima u posljednoj ljusci, slabe pa ih se naziva slobodnim elektronima. Slobodni elektroni imaju svojstvo da pod utjecajem vanjskog električnog polja lako prelaze s jednog atoma na drugi u smjeru suprotnom od smjera električnog polja. Upravo ovako usmjereno gibanje elektrona čini električnu struju kroz vodič.

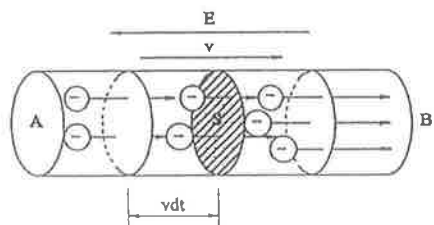
Time što se vodičem gibaju elektroni, giba se količina elektriciteta koja je definirana produktom jakosti struje i vremena, pa se može napisati:

$$dq = i dt, \quad (42)$$

iz čega slijedi jakost električne struje:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta s}{s} = A.$$

Jedinica za jakost električne struje u počast slavnom Andre Marie Ampèreu nazvana je amper i označava se slovom A. Na slici 25 prikazan je jedan metalni vodič u kojemu vlada električno polje jakosti \vec{E} . Uslijed toga događa se pomicanje slobodnih elektrona brzinom \vec{v} u suprotnom smjeru električnog polja. Pojednostavnimo ovo kretanje tako što ćemo reći da je brzina elektrona \vec{v} konstantna. Za vrijeme dt elektroni će prijeći put $v dt$. Broj elektrona koji za vrijeme dt prođu kroz iscrtkani poprečni presjek S



Slika 25. Prikaz električne struje kao pomak elektrona kroz presjek vodiča S, brzinom v

Jednak je broju slobodnih elektrona koje sadrži vodič duljine vdt ili volumena $Svdt$. Ako ima n slobodnih elektrona u jedinici volumena, ukupni električni naboj, koji bude prošao poprečnim presjekom S kroz vrijeme dt , će biti:

$$dq = neSv dt .$$

Iz toga slijedi jakost električne struje:

$$i = \frac{dq}{dt} = neSv . \quad (43)$$

Za određeni vodič jakost električne struje, koja je posljedica električnog polja, određena je brzinom usmjerenog pomicanja elektrona kroz vodič. Promotrimo na jednom primjeru kolika je brzina elektrona npr. kroz bakreni vodič presjeka 10 mm^2 kojim teče struja jakosti 25 A . Bakar zauzima 29. mjesto u periodičnom sustavu elemenata iz čega izlazi da posjeduje samo 1 slobodni elektron po atomu (vidi prilog 3). Nadalje, bakar u m^3 sadrži $8,5 \times 10^{28}$ atoma. Sada napišimo relaciju za brzinu elektrona:

$$v = \frac{I}{S} \frac{1}{ne} , \quad (44)$$

$$v = \frac{25}{10 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1}{8,5 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = \frac{25}{8,5 \cdot 1,6 \cdot 10^4} = 1,838 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} ,$$

$$v = 0,184 \text{ mm/s} .$$

Ovo je prosječna brzina slobodnih elektrona kroz vodič za promatrani slučaj i ne smije se miješati s brzinom prostiranja električnih pojava duž vodova koja iznosi $3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Električna struja se manifestira preko tri osnovna djelovanja (efekta).

Prvi efekt je toplinski. Prilikom gibanja elektrona kroz vodič dolazi do sudaranja s česticama materije. Pri tome elektroni predaju česticama svoju energiju gibanja i na taj način povećavaju toplinsku energiju materije. Ta

pojava se zamišlja kao da električna struja nailazi na otpor pri čemu se energija strujanja pretvara u toplinu. Bez otpora nema zagrijavanja, nema gubitaka.

Drugi osnovni efekt je kemijski. Prilikom prolaska struje kroz neka sredstva dolazi do kemijskog rastvaranja tog sredstva na sastavne dijelove - dolazi do pojave elektrolize.

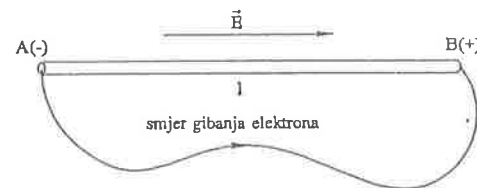
Treći osnovni efekt električne struje njezino je magnetsko djelovanje. Kada vodičem protječe električna struja, oko tog vodiča se javlja magnetsko polje. Taj efekt takve je prirode, da se može govoriti da je struja i njezino magnetsko polje jedinstvena pojava. Taj magnetski efekt toliko je značajan, da slobodno možemo kazati, da je za njega vezan napredak naše epohe.

Ponegdje se u literaturi govori i o četvrtom efektu - svjetlosnom, ali on je posljedica toplinskog ili kemijskog efekta električne struje.

Jedinica za jakost struje definira se preko magnetskog efekta električne struje. Prije se za to koristio kemijski efekt.

2.1. Strujni krug

Uzmimo metalni vodič duljine l i zamislimo da u vodiču između točaka A i B vlada električno polje jakosti \vec{E} . Uslijed djelovanja električnog polja u smjeru suprotnom od smjera električnog polja doći će do pomaka elektrona. Do prestanka pomicanja naboja došlo bi onda ako se izjednači jakost električnog polja prikupljenog naboja i vanjskog električnog polja koji je uzrok grupiranju naboja. Napravimo slijedeći korak. Spojimo novim metalnim vodičem točke A i B (slika 26). Na taj način omogućit će se elektronima, slikovito rečeno, da se drugim putem vrate tamo odakle su krenuli. To znači da je uspostavljena struja elektrona. Da bi protjecala struja, bilo je neophodno uspostaviti *strujni krug*. Prilikom zatvorenog strujnog kruga osnovni uzrok struje je električno polje, odnosno razlika potencijala (ili napon). Ako je električno polje konstantno, strujnim krugom teče

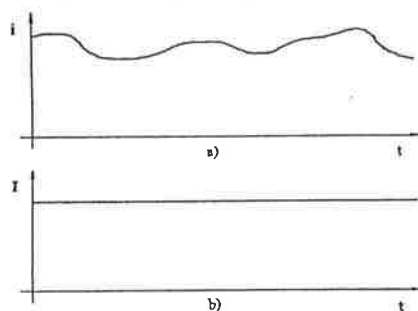


Slika 26. Električno polje kao uzrok "protoka" elektrona kroz zatvorenu petlju

istosmjerna struja koje je simbol slovo i ili I . Da bi električna struja, promatrana kao $i=f(t)$, bila istosmjerna, dovoljno je da ima uvijek isti

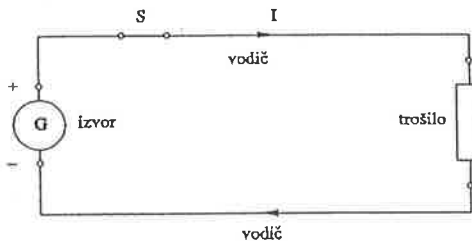
predznak (slika 27a). Ipak, ako se ne kaže drugačije, pod istosmjernom strujom podrazumijevat ćemo onu struju koja trajno ima isti iznos (slika 27b). Izmjenična struja nastaje u strujnom krugu u kojem vlada električno polje promjenljivog smjera. U elektrotehnici je običaj da se stalne vrijednosti označavaju velikim, a promjenljive malim slovom.

U ovom poglavlju upoznat ćemo zakone u obliku koji vrijede za istosmjernu struju. Izmjeničnim strujama je posvećeno posebno poglavlje.



Slika 27. Istosmjerna struja
a) vremenski promjenljiva struja
b) konstantna struja

U tehničkoj praksi shema kao na slici 26. nema smisla. To je kratki spoj. Realni strujni krug uvijek sadrži: izvor elektromotorne sile, trošilo i vodove koji spajaju izvor i trošilo. Vod se sastoji od dvije žice što omogućava da se uspostavi strujni krug (slika 28). Ako se u strujni krug ugradi sklopka S, dobije se mogućnost zatvaranja i otvaranja strujnog kruga.



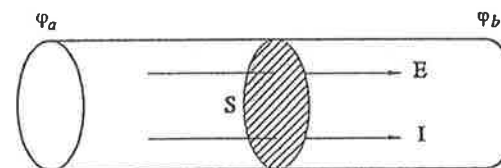
Slika 28. Zatvoreni strujni krug

2.1.1. Dogovor o smjeru električne struje

Ponovo pogledajmo sliku 28. Smjer struje je označen tako da struja kroz izvor (G) ide od stezaljke (-) ka stezaljci (+). Ali to nije u skladu s ranijom tvrdnjom da elektroni u strujnom krugu idu vanjskim putem od (-) ka (+). Naime, dogovor o smjeru struje napravljen je prije spoznaje o strukturi materije i prirodi elektriciteta. Budući da prvobitni dogovor o smjeru struje ne smeta egzaktnosti pri tumačenju električnih pojava, dogovor je ostao trajno na snazi.

2.2. Specifična električna vodljivost

Da bi u vodiču postojala električna struja, u njemu treba postojati električno polje, ili između njegovih krajeva treba vladati razlika potencijala $\varphi_a - \varphi_b$. Znamo da svi vodiči ne vode jednako dobro električnu struju. Za isto električno polje i poprečni presjek, kod različitih vodiča, imat će se različita



Slika 29. Izdvojeni dio vodiča zatvorenog strujnog kruga radi definicije vodljivosti

gustoća struje. Pod gustoćom struje podrazumijeva se omjer jakosti struje $I(A)$ i površine $S(m^2)$ poprečnog presjeka vodiča kojim protječe struja:

$$J = \frac{I}{S} \quad A/m^2 . \quad (45)$$

Zaključujemo da se materijali razlikuju po *vodljivosti*.

Zamislimo dio vodiča (slika 29) na krajevima kojega vlada razlika potencijala $U = \varphi_a - \varphi_b$. Izdvojimo jedan proizvoljni poprečni presjek S u kojem imamo homogeno električno polje E i struju I. Omjer gustoće struje i jakosti električnog polja naziva se *specifična električna vodljivost*:

$$\kappa = \frac{J}{E} \quad \text{ili} \quad J = \kappa E . \quad (46),(47)$$

Jedinica za mjerenje specifične vodljivosti je:

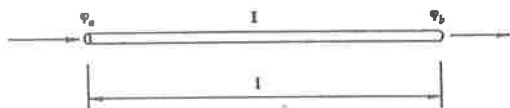
$$[\kappa] = \left[\frac{II}{SU} \right] = \frac{Am}{Vm^2} = \frac{A}{Vm} .$$

Napomena: U praksi se, prema tradiciji, za definiranje specifične vodljivosti koristi vodič duljine jednog metra i presjeka 1 mm^2 . Tako dobiveni iznos je 10^6 puta manji.

2.3. Električna vodljivost i električni otpor

Temeljna relacija $J = \kappa E$, koja povezuje gustoću struje i jakost električnog polja u vodiču, nije pogodna u praksi gdje se radije upotrebljava relacija koja povezuje jakost struje u vodiču i razliku potencijala na njegovim krajevima. Neka je zadan vodič duljine l i presjeka S (slika 30), kojim

protječe struja I . Na krajevima vladaju potencijali φ_a i φ_b .



Slika 30. Uvođenje nove veličine električnog otpora vodiča

Jakost električnog polja E u nekom presjeku vodiča možemo zamijeniti ekvivalentom $d\varphi/dx$. Tada je:

$$I = -\kappa S \frac{d\varphi}{dx}.$$

Uz pretpostavku da je κ konstanta i da je dx element duljine vodiča, vrijedi relacija:

$$I dx = -\kappa S d\varphi,$$

$$I \int_0^l dx = -\kappa S \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} d\varphi.$$

Rješenjem integrala dobije se:

$$I l = \kappa S (\varphi_a - \varphi_b).$$

Konačno:

$$I = \kappa \frac{S}{l} U_{ab}. \quad (48)$$

Faktor razmjernosti između struje i napona označava se slovom G i naziva električna vodljivost:

$$G = \kappa \frac{S}{l}. \quad (49)$$

Jedinica za mjerenje vodljivosti je simens i označava se slovom S :

$$[G] = \left[\frac{I}{U} \right] = \frac{A}{V} = S.$$

U praksi se redovno koristi recipročna vrijednost vodljivosti, koja se naziva električni otpor i označava se slovom R :

$$R = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{S}. \quad (50)$$

Recipročna vrijednost specifične vodljivosti naziva se *specifični otpor* i označava se slovom ρ . Iznos ρ karakterizira materijal od kojega je izrađen električni otpor. Sada je relacija za otpor:

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (51)$$

Jedinica za električni otpor, u slavu fizičaru Ohmu, naziva se om i označava slovom Ω .

Specifični otpor je definiran kao recipročna vrijednost specifične vodljivosti pa je njegova jedinica:

$$[\rho] = \left[\frac{1}{\kappa} \right] \frac{Vm}{A}.$$

Ako se ovo uvrsti u relaciju za otpor, dobit će se vrijednost jedinice om $[\Omega]$:

$$[R] = \frac{Vm}{A} \frac{m}{m^2} = \frac{V}{A} = \Omega.$$

2.4. Ohmov zakon

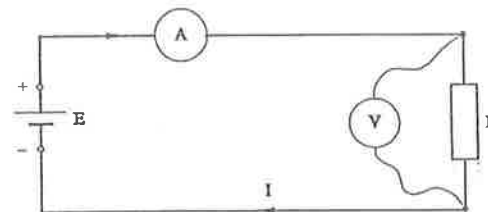
O električnom otporu bit će riječi kasnije, a sada se vratimo izrazu za struju vodiča koji prema (48) glasi:

$$I = GU, \quad (52)$$

ili:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (53)$$

Ova relacija naziva se Ohmov zakon i predstavlja temeljni zakon električnog strujanja. Ohmov zakon može se dokazati eksperimentalno (slika 31).



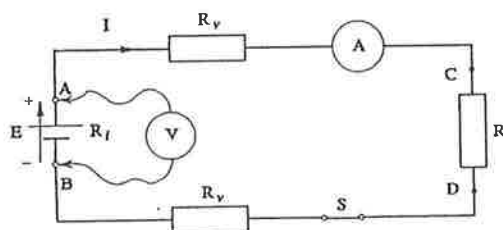
Slika 31. Provjera Ohmova zakona

Izvor elektromotorne sile E pomoću vodiča spojen je s električnim otporom R poznatog iznosa u jedinstveni strujni krug kojim protječe struja I . Ako se mjeri jakost struje i napon koji vlada na krajevima otpora R , ustanovit ćemo da je omjer napona i struje upravo jednak iznosu otpora:

$$\frac{U}{I} = R \quad i \quad U = IR, \quad (54), (55)$$

čime se potvrđuje Ohmov zakon.

Obratimo pažnju na posljednji oblik Ohmova zakona: $U=IR$. Struja protječe cijelim strujnim krugom: kroz izvor, vodiče i trošilo - otpor R . I to kroz svaki presjek struja je ista. Treba pretpostaviti da svaki element strujnog kruga ima nekakav, makar sasvim mali, električni otpor. I izvor elektromotorne sile ima unutarnji otpor koji ćemo označiti sa R_i , a otpor vodiča označit ćemo sa R_v . Zapamtimo: na svaki element strujnog kruga može se primijeniti Ohmov zakon. Unutar izvora vrijedi relacija $R_i I = \Delta U_i$. Na vodu vrijedi $\Delta U_v = 2R_v I$. Ovaj se napon u praksi naziva padom napona na vodu. Na svaki element voda Δl s otporom ΔR otpada jedan iznos napona, $\Delta R I = \Delta U$ što će potvrditi voltmetar (slika 32) ako se premješta uzduž strujnog kruga. Ovdje treba reći da će svakom elementu strujnog kruga pripasti jedan iznos napona.



Slika 32. Napon izvora jednak je zbroju iznosa napona na svim elementima strujnog kruga

Ako se voltmetar postavi tako da mjeri napon na stezaljkama izvora, utvrdit ćemo da vrijedi relacija:

$$U = I(R + 2R_v).$$

Ovaj napon brojčano je jednak sumi napona od točke A do točke B u smjeru struje. Međutim, isti iznos napona vlada između tih točaka ako se promatra kraći put preko izvora napona. Prema Ohmovu zakonu izlazi da za struju (slika 32) vrijedi relacija:

$$I = \frac{E}{R_i + R + 2R_v},$$

a unutarnji napon ili elektromotorna sila iznosi:

$$E = I(R_i + R + 2R_v).$$

Na osnovu toga se može pisati:

$$E - IR_i = I(R + 2R_v).$$

U desnoj strani ove jednadžbe prepoznavamo iznos napona između stezaljki A B pa stoji:

$$E - IR_i = U.$$

Elektromotorna sila izvora E i napon na stezaljkama izvora U razlikuju se za iznos napona na otporu izvora. Kada je strujni krug otvoren, tada nema napona na otporu, pa su napon na stezaljkama i elektromotorna sila izvora jednaki:

$$E = U.$$

Iz svega što je do sada rečeno, može se zaključiti da se napon iznosa elektromotorne sile izvora E raspoređuje na svim otporima uzduž strujnog kruga razmjerno vrijednosti njihovog otpora.

Ako je otpor voda velik, na vodu je veliki napon, pa trošilu pripada manji dio napona. Budući da je potrebno da trošilu dođe što veći napon, izvor napona i vodovi izvode se sa što manjim vlastitim otporom.

Još jedan zaključak: budući da je napon razlika potencijala između točaka A i B, izlazi da će se potencijal iznosom raspodijeliti uzduž strujnog kruga.

2.5. Izračunavanje električnog otpora

2.5.1. Specifični otpor vodljivih materijala

Iz Ohmova zakona (54) izlazi da se otpor svakog elementa može izračunati pomoću izmjerenih vrijednosti napona i struje (u praksi se ova metoda određivanja otpora naziva U-I metoda):

$$R = \frac{U}{I}.$$

Otpor vodiča može se izračunati iz formule (51):

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

gdje je: l duljina vodiča (m),
 S presjek vodiča (m^2),
 ρ specifični otpor (Ωm)

Budući da se u praksi presjek zadaje u mm^2 , uobičajeno je specifični otpor ρ navoditi u $\Omega mm^2 / m$.

Već smo ranije vidjeli da otpor vodiča ne ovisi izravno o struji ili naponu. O jakosti struje ovisi temperatura zagrijavanja vodiča. Specifični otpor, a time i otpor, zavisi o temperaturi. Stoga se uvela, uz otpor, još jedna veličina: *temperaturni koeficijent otpora* α koji pokazuje koliko se promijeni otpor vodiča ako mu temperatura poraste za $1^\circ C$.

Za sve vodljive materijale poznati su: specifični otpor, specifična vodljivost i temperaturni koeficijent α pri temperaturi promatranog materijala od $20^\circ C$. U tablici 4. navedeni su ti podaci za nekoliko materijala koji se često koriste u praksi.

Tablica 4: Specifični električni otpor, specifična vodljivost i temperaturni koeficijent otpora pri temperaturi $20^\circ C$

Naziv	Oznaka	Specifični el.otpor	Specifična vodljivost	Temperaturni koefic. otpora
		$\Omega mm^2 / m$	$S m / mm^2$	$1 / ^\circ K$
Aluminij:				
- meki	E - Al	0.02778	36	0.00435
- za elektr. lijev	E - Al	0.02874	35.2	0.00403
Bakar meki	E - CuF20	0.01754	57	0.00425
Bronca	Bc I	0.021	48	0.004
Germanij	Ge	11.2	0.0014	-
Konstatan	CuNi45	0.49	2.05	0.00003
Kositar	Sn	0.12	8.3	0.00447
Mjed	CuZn40	0.075	13.3	0.0016
Nikal meki	Ni	0.087	11.5	0.0067
Olovo	Pb	0.208	4.9	0.00336
Platina	Pt	0.106	9.4	0.0039
Srebro	Ag	0.0159	62.9	0.0041
Zlato	Au	0.0219	45.7	0.004
Željezo čisto	Fe	0.096	10.5	0.006

Najmanji otpor električnoj struji pruža srebro, zatim bakar pa aluminij. Za izradu vodiča najviše se upotrebljava bakar i aluminij pa zapamtimo njihove specifične otpore:

$$\rho_{Cu} = 0,0175, \quad \rho_{Al} = 0,027 \Omega \frac{mm^2}{m}.$$

Često se javlja potreba većeg električnog otpora, npr. u uređajima u kojima se električna energija pretvara u toplinu. Tu se kao otpornik upotrebljava legura nikla i kroma, cekas i kantel. Pored toga što im je veći specifični otpor, imaju jedno važno svojstvo - otpornost protiv korozije pri visokim temperaturama.

Materijali s izrazito velikim specifičnim otporom spadaju u izolatore. U tehnicu se upotrebljavaju tamo gdje se želi spriječiti prolaz električne struje.

2.5.2. Utjecaj temperature na električni otpor

Utjecaj temperature na veličinu električnog otpora poznat je iz prakse. Ako je referentna temperatura $20^\circ C$, a vodič se zagrije na temperaturu ϑ , doći će do porasta temperature $\Delta\vartheta = \vartheta - 20^\circ$ i porasta otpora ΔR . Sada će otpor iznositi:

$$R = R_{20} + \Delta R.$$

Eksperimentalno je utvrđeno da porast otpora ΔR ovisi o početnom otporu R_{20} , porastu temperature $\Delta\vartheta$ i o vrsti materijala, odnosno o temperaturnom koeficijentu α_{20} :

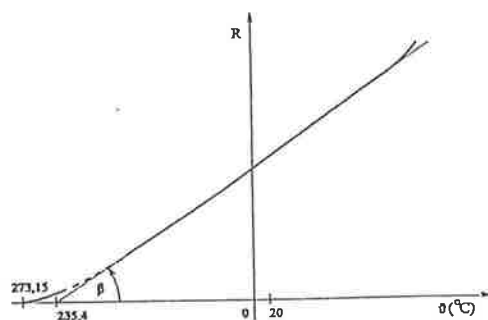
$$\Delta R = R_{20} \Delta\vartheta \alpha_{20},$$

$$R = R_{20} + R_{20} \alpha_{20} \Delta\vartheta = R_{20} (1 + \alpha_{20} \Delta\vartheta), \quad (56)$$

$$R = \frac{\rho l}{S} [1 + \alpha_{20} (\vartheta - 20)]. \quad (57)$$

Ta relacija vrijedi, bilo da temperatura raste ili pada u odnosu na $20^\circ C$.

Za većinu čistih metala koeficijent α_{20} ima vrijednost između 3×10^{-3} i 4×10^{-3} (žareni bakar ima $\alpha = 0,00392$). Neke legure (vidi tablicu 4) imaju α_{20} tako malen, da se njihov otpor za dosta velike promjene temperature smatra konstantnim. Prema relaciji za električni otpor (57), izlazi da je $R = f(\vartheta)$ pravac koji zatvara kut β prema temperaturnoj osi (slika 33).



Slika 33. Promjena iznosa otpora vodiča s njegovom temperaturom

Koeficijent smjera tog pravca je $R_{20}\alpha_{20}$. Ako se pretpostavi da su R_{20} i α_{20} konstantne veličine, moguće je odrediti temperaturu pri kojoj vodič nema otpora, ($R=0$):

$$R_{20} [1 + \alpha_{20}(\vartheta'_0 - 20)] = 0,$$

$$\vartheta'_0 = - \left(\frac{1}{\alpha_{20}} - 20 \right).$$

Primjer: Za žareni bakar: $\alpha_{20} = 0,00392$, pa je: $\vartheta'_0 = -235,4^\circ\text{C}$. Pri ovoj temperaturi bakar bi trebao biti bez električnog otpora, ali mjerenja pokazuju da pri vrlo niskim temperaturama $R=f(\vartheta)$ odstupa od pravca. Kod čistih metala pri apsolutnoj nuli ($-273,15^\circ\text{C}=0\text{K}$) nastupa bezotporno stanje, stanje supravodljivosti.

Kod velikih promjena temperature velike su i promjene otpora. Pogledajmo karakterističan slučaj - žarulju kojoj je nit od volframa ($\alpha=0,004$). Kada se sijalica upali, nit se zagrije na 2270°C . Ako pri 20°C žarna nit ima otpor R_{20} u normalnom radu otpor R će biti:

$$R = R_0 [1 + 0,004(2270 - 20)] = 10R_{20}.$$

Otpor niti žarulje povećao se u radu za 10 puta!

Kod električnih strojeva prirast temperature može biti i $\Delta\vartheta=100^\circ\text{C}$. Tada je prirast otpora:

$$R = R_{20}(1 + 0,00392 \cdot 100) = 1,392R_{20},$$

ili 39,2%.

Postoje i materijali s negativnim temperaturnim koeficijentom, npr. ugljik - njegov otpor s porastom temperature opada.

2.6. Prazni hod i kratki spoj

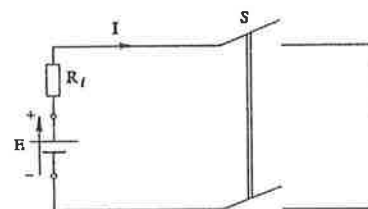
Ako se na izvor elektromotome sile priključi otpor R , prema Ohmovom zakonu strujnim krugom se uspostavi struja jakosti: $I=U/R$. Pri tome, otpor R može imati vrijednost u intervalu od $R=\infty$ i $R=0$. Razmotrimo oba granična stanja strujnog kruga:

- ①. Otpor R ima beskonačnu vrijednost kada je sklopka S na slici 34 otvorena. Već znamo da tada u strujnom krugu nema struje. To slijedi iz relacije:

$$I = \frac{U}{R} = 0.$$

$$R \rightarrow \infty$$

Takvo stanje strujnog kruga naziva se prazni hod.



Slika 34. Prazni hod - sklopka S isključena
Kratki spoj - sklopka S uključena

- ②. Pretpostavimo da izvor ima unutarnji otpor R_i , nadalje da u strojnom krugu izvan izvora nema otpora, $R=0$. Kada se uključi sklopka S , u strujnom krugu će se uspostaviti struja iznosa:

$$I = \frac{E}{R_i}.$$

Takvo stanje strujnog kruga naziva se kratki spoj. Budući da je otpor izvora R_i redovno vrlo mali, ova struja je velika i naziva se strujom kratkog spoja (I_k).

Stanje kratkog spoja predstavlja opasnost za postrojenje pa se ono štiti osiguračima.

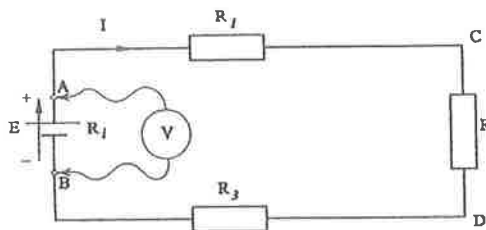
Najčešće se koriste tzv. rastalni osigurači. To je pristupačni dio strujnog kruga s namjerno povećanim otporom. Pri prolazu struje kroz strujni krug veće od dopuštene za taj vod osigurač pregori. Nakon što se otkloni kvar, uzrok povećanoj struji, osigurač se zamijeni.

2.7. Spajanje električnog otpora

Gotovo je redovan slučaj da se na izvor električne struje spaja nekoliko otpornika. Međusobno ti otpornici mogu biti spojeni serijski, paralelno i kombinirano.

2.7.1. Serijski spoj otpornika

Pod ovim podrazumijevamo takav spoj kod kojega su otpornici spojeni u nizu, jedan za drugim. Pri tome, kroz sve otpornike protječe ista struja. Takvo smo stanje imali na slici 32. i sada na slici 35. Usljed elektromotorne



Slika 35. Tri otpornika u serijskom spoju

sile kroz strujni krug je uspostavljena struja. Ako bismo voltmetrom izmjerili napon izvora, a zatim napone na pojedinim otpornicima, utvrdili bismo da vrijedi:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 .$$

Budući da kroz sve otpore protječe ista struja, vrijedi:

$$I = I_1 = I_2 = I_3 .$$

Kako je:

$$U_1 = I_1 R_1 = I R_1$$

$$U_2 = I_2 R_2 = I R_2$$

$$U_3 = I_3 R_3 = I R_3 ,$$

može se napisati:

$$U = I R_1 + I R_2 + I R_3 = I (R_1 + R_2 + R_3)$$

iz čega izlazi da je zbroj serijski spojenih otpora jednak omjeru napona

izvora i struje u strujnom krugu. Taj omjer:

$$R = \frac{U}{I} = R_1 + R_2 + R_3$$

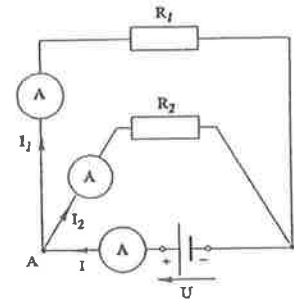
predstavlja ukupni otpor serijski spojenih otpornika. U seriju može biti spojen proizvoljan broj otpornika što se izražava relacijom:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i . \quad (58)$$

To slijedi iz raspodjele napona izvora na pojedine otpore u vidu "pada napona" što smo već utvrdili prilikom rasprave o Ohmovu zakonu.

2.7.2. Paralelno spajanje otpornika

Ako se na izvor napona priključi dva ili više otpora, tako da je svaki od njih spojen na puni napon izvora, kaže se da su otpornici spojeni paralelno (slika 36).



Slika 36. Dva paralelno spojena otpornika

Za shemu na slici 36. vrijedi:

$$U = U_1 = U_2 .$$

Struja izvora I grana se u čvorištu A na struju I_1 i I_2 , da bi iza čvorišta B, kao suma struja, opet dobila vrijednost iznosa struje izvora:

$$I = I_1 + I_2 .$$

Budući da je $I_1 = U/R_1$ i $I_2 = U/R_2$, može se napisati:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} .$$

Sada trebamo odrediti ukupni, ekvivalentni otpor paralelno spojenih otpornika. Ako je taj otpor R , vrijedi da je $I=U/R$:

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}.$$

Dijeljenje ove jednadžbe s U daje:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Da je paralelno spojeno više od 2 otpora, vrijedila bi ista relacija s tim što bi na desnoj strani bio povećan broj pribrojnika što se izražava relacijom:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (59)$$

Recipročna vrijednost ukupnog otpora paralelno spojenih otpora jednaka je sumi recipročnih vrijednosti pojedinih otpora.

Kada su paralelno spojena dva otpora, vrijednost ukupnog otpora iznosi:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (60)$$

Ako su iznosi paralelno spojenih otpora jednaki, $R_1 = R_2$, tada je:

$$R = \frac{R_1}{2}.$$

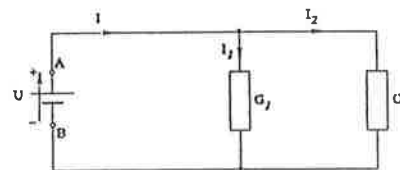
U slučaju paralelnog spajanja tri otpornika dobije se ukupni otpor:

$$R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}. \quad (61)$$

Ako je $R_1 = R_2 = R_3$, tada je:

$$R = \frac{R_1}{3}.$$

Proračun ukupnog otpora paralelno spojenih otpora praktično je napraviti preko vodljivosti G (slika 37).



Slika 37. Uz proračun ukupnog otpora paralelnih otpornika preko vodljivosti

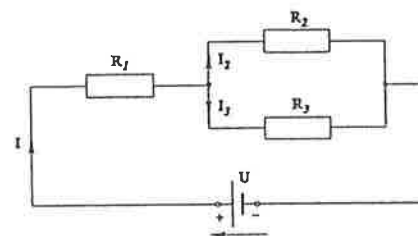
Ako je ukupna vodljivost paralelnih grana G , a pojedinih grana G_1 i G_2 , tada je:

$$G = G_1 + G_2.$$

Iznos ukupnog otpora strujnog kruga dobije se kao recipročna vrijednost vodljivosti G :

$$R = \frac{1}{G}. \quad (62)$$

Otpori se redovno spajaju i u kombinaciji serijskog i paralelnog spoja. Ukupni, ekvivalentni otpor se dobija tako da se shema pojednostavljuje, dok se ne dođe do sheme koja omogućava jednostavan i točan proračun otpora.

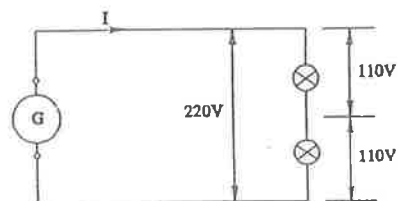


Slika 38. Uz proračun ukupnog otpora mješovito spojenih otpornika

Ako je zadana shema kao na slici 38, treba najprije odrediti ekvivalentni otpor paralelno spojenih otpora. Na taj se način spoj svodi na serijski pri čemu je:

$$R = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Paralelni i serijski spojevi otpora ili trošila svakodnevna su pojava. Paralelni se spoj koristi kada se želi svakom trošilu osigurati jednaki napon. Primjer su za to trošila u kućanstvu. Cjelokupni električni razvod po stambenim zgradama, sve utičnice i sijalice spojeni su na isti izvor od 220V.



Slika 39. Raspodjela napona izvora na dvije serijski spojene žarulje iste snage

Navest ćemo jedan primjer serijskog spajanja. Raspoložemo izvorom od 220V i žaruljama za napon 110V. Nameće se misao spajanja dvije žarulje u seriju. To je u redu ako su otpori žarulja isti, tada svakoj žarulji pripada po pola napona izvora (slika 39). Pri serijskom spajanju ne smiju biti žarulje različitih nominalnih snaga, jer žarulja veće snage ima manji otpor. Zbog toga će toj žarulji pripasti manji napon iznosa IR . Žarulja manje snage (većeg otpora) prima, dakle, veći napon i u opasnosti je da izgori. Uz pretpostavku da se otpori žarulja razmjerno mijenjaju, naponi na pojedinim žaruljama odnose se obrnuto proporcionalno svojim nazivnim snagama:

$$U_1:U_2 = P_2:P_1.$$

Primjer: Na izvor 220V priključe se dvije žarulje spojene u seriju. Snage žarulja su 60 i 100W, za nazivni napon 110V. Koliki su pripadajući naponi?

$$U_1 + U_2 = 220V$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{100}{60}$$

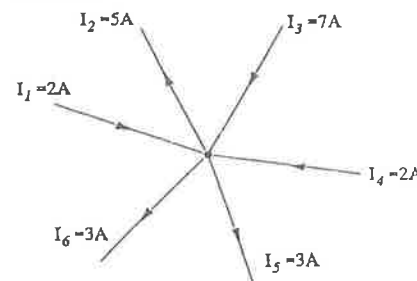
$$U_1 = 137,5V, \quad U_2 = 82,5V.$$

2.8. I. Kirchhoffov zakon

Već smo na slici 36, promatrajući čvorište A, utvrdili da je $I = I_1 + I_2$. To se može i drugačije prikazati: $I - I_1 - I_2 = 0$, a riječima izreći ovako: suma je struja u točki A jednaka nuli. Predznak pred pojedinom strujom ima određeno značenje. Uobičajeno je da se strujama, koje ulaze u točku grananja pridruži predznak plus. Onim pak strujama, koje izlaze iz točke grananja, pridružen je predznak minus. To izlazi iz smjerova struja u odnosu na točku A (slika 36). Za svako čvorište vrijedi pravilo: *suma struja koje ulaze u točku grananja jednaka je sumi struja koje izlaze iz te točke*, što se izražava relacijom:

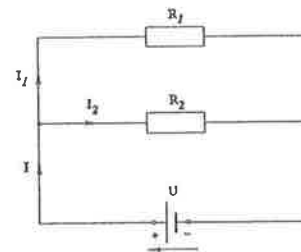
$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (63)$$

Time je izražen I. Kirchhoffov zakon. Na slici 40. prikazan je primjer koji ga ilustrira.



Slika 40. Uz tumačenje I. Kirchhoffova zakona

Primijenimo I. Kirchhoffov zakon na sliku 41, gdje je: $I = I_1 + I_2$.



Slika 41. Uz primjenu I. Kirchhoffova zakona

Struje I_1 i I_2 određuju se iz:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad \text{i} \quad I_2 = \frac{U}{R_2},$$

pri čemu je:

$$U = I_1 R_1 \quad \text{i} \quad U = I_2 R_2.$$

Budući da je na krajevima obaju otpora isti napon, pisat ćemo:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2,$$

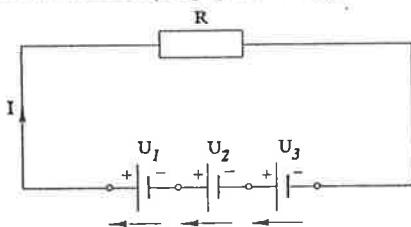
iz čega izlazi:

$$I_1:I_2 = R_2:R_1.$$

Na osnovi toga može se zaključiti da se struje u paralelnim granama odnose obrnuto proporcionalno pripadajućim otporima.

2.9. Serijski spoj više izvora

U praksi se često događa da napon s raspoloživog izvora nije dovoljan za napajanje trošila pa se radi toga nameće potreba serijskog spajanja izvora, npr. kod tranzistorskog prijemnika kao i kod džepnog računala gdje je nekoliko baterija spojeno u seriju da bi se dobio potrebnii napon. Serijski spoj



Slika 42. Serijski spoj triju izvora napona

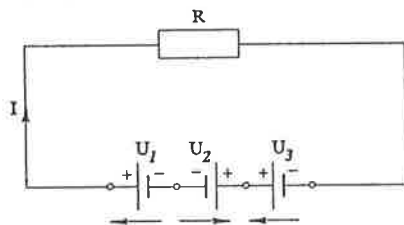
izvora napona se izvodi (slika 42) tako da se spoji (-) pol prvog izvora s (+) polom drugog izvora. Zatim se spoji (-) pol drugog izvora s (+) polom trećeg izvora itd. Ako bismo izmjerili pojedine napone, a potom i ukupni napon, uvjerali bismo se da vrijedi relacija:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 .$$

Pod utjecajem ukupnog napona strujnim krugom uspostavljena je struja:

$$I = \frac{U}{R} .$$

Na ovom primjeru vidimo da će kroz sve izvore teći ista struja. Stoga bi kod serijskog spajanja izvora trebalo koristiti izvore iste nazivne struje. Ako su nazivne struje različite, složeni izvor se smije koristiti najviše s nazivnom strujom najslabijeg izvora.



Slika 43. Serijski spoj triju izvora od kojih je jedan u protuspoju

Ako se serijsko spajanje izvora izvrši tako da se jedan ili više izvora spoje u protuspoju (+) i (+), te (-) i (-) (slika 43), ukupni napon iznositi će:

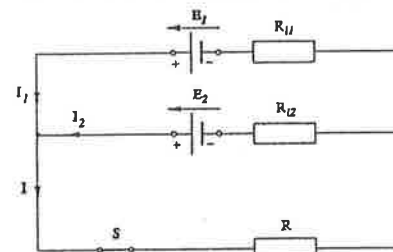
$$U = U_1 - U_2 + U_3 .$$

Ako bismo na taj način spojili dva izvora iste EMS, u strujnom krugu ne bi tekla struja jer je $E_1 - E_2 = 0$ ($I=0/R=0$). Općenito vrijedi relacija za iznos napona serijski spojenih izvora:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i . \quad (64)$$

2.10. Paralelno spojeni izvori

Dva paralelno spojena izvora (slika 44) prikazana su kao izvori EMS s tim da je otpor izvora prikazan kao jedini otpor u promatranoj grani.



Slika 44. Paralelno spojeni izvori

Razmotrimo stanje pri kojem su EMS $E_1 \neq E_2$, a sklopka S zatvorena. Budući da su analogni krajevi oba izvora spojeni u istim točkama, i naponi tih grana su jednaki:

$$E_1 - I_1 R_{11} = E_2 - I_2 R_{12} , \quad (65)$$

a prema I Kirchhoffovu zakonu:

$$I_1 + I_2 = I .$$

Ako se sklopka S isključi, tada je $I=0$ pa se može napisati:

$$I_1 + I_2 = 0 \quad \text{ili} \quad I_2 = -I_1 .$$

Za zatvoreni strujni krug, koji čine grane s izvorima napona, vrijedi jednakost:

$$E_1 - I_1 R_{11} = E_2 + I_1 R_{12} ,$$

odnosno:

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_{11} + R_{12}} .$$

Iz ovoga primjera izlazi da će u strujnom krugu, koji čine dva paralelno spojena izvora, ako je $E_1 \neq E_2$, protjecati struja i onda kada nije priključeno vanjsko trošilo. Ta se struja naziva *struja izjednačenja*; ona je štetna i izbjegava se tako što se paralelno spajaju samo izvori istog iznosa elektromotorne sile $E_1 = E_2$.

2.11. II. Kirchhoffov zakon

I. Kirchhoffov zakon odnosi se na struje u točkama grananja mreže, a II. Kirchhoffov zakon na naponne unutar jednog zatvorenog strujnog kruga, dakle, on je vezan uz pojam grane strujnog kruga. Izrazom (65), u stvari, je napisan II. Kirchhoffov zakon za gornju petlju mreže na slici 44. Ovaj zakon glasi:

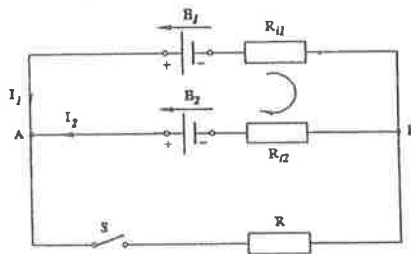
U ma kom zatvorenom strujnom krugu suma svih EMS izvora jednaka je sumi svih napona na otporima.

Ponovno se poslužimo slikom 44. i primijenimo II. Kirchhoffov zakon na strujni krug s izvorima napona (slika 45). U strujnom krugu već su određeni smjerovi napona i struja. Još treba odrediti smjer obilaženja promatranog strujnog kruga (konture). Neka to bude smjer kazaljke na satu.

Podimo od točke A. U cijelom strujnom krugu imamo izvore EMS E_1 i E_2 . Smjer E_1 suprotan je smjeru obilaženja, a smjer napona E_2 se poklapa sa smjerom obilaženja:

$$-E_1 + E_2 = -I_1 R_{11} + I_2 R_{12} .$$

Predznaci na desnoj strani proizlaze iz činjenice da je smjer struje I_1 suprotan smjeru obilaženja, a smjer struje I_2 poklapa se sa smjerom obilaženja.



Slika 45. II. Kirchhoffov zakon primijenjen na shemu sa slike 44.

Iz činjenica da je $I_1 = -I_2 = I$ slijedi,

$$E_2 - E_1 = IR_{11} + IR_{12} .$$

Pretpostavljeni smjer struje je točan, ako je $|E_2| > |E_1|$.

Uopćeni izraz za II. Kirchhoffov zakon glasi:

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n I_i R_i . \quad (66)$$

Ako strujni krug ima samo jedan izvor i jedan otpor, II. Kirchhoffov zakon se svodi na Ohmov zakon:

$$E = IR .$$

2.12. Snaga i energija električne struje

Promatranjem prenošenja naboja u električnom polju saznali smo da električne sile izvrše rad koji je jednak umnošku električnog naboja i napona:

$$A = QU_{12} \quad [J] . \quad (67)$$

Električna struja u metalnom vodiču i nije ništa drugo do pomicanje naboja u električnom polju uslijed djelovanja razlike potencijala, napona. I ovdje električne sile vrše rad. Ako je prenešena količina naboja $Q = It$ pri konstantnoj električnoj struji, rad te struje iznosi:

$$A = UIt \quad [J] . \quad (68)$$

Snaga električne struje kao rad u jedinici vremena A/t iznositi će:

$$P = UI . \quad (69)$$

Ovaj se izraz može i drugačije izvesti. Podimo od definicije snage:

$$P = \frac{dA}{dt} . \quad (70)$$

Ako se izraz (70) proširi s dQ/dQ , dobije se:

$$P = \frac{dA}{dQ} \frac{dQ}{dt} .$$

Derivacija rada po naboju predstavlja napon, a derivacija naboja po vremenu struju, što daje:

$$P = UI .$$

Poznato je da se rad električne struje manifestira zagrijavanjem vodiča kojim protječe.

Izvršimo pokus zagrijavanja tekućine mase m , specifične topline c pomoću električnog grijača u sustavu bez gubitaka topline. Pri tome treba mjeriti temperaturu tekućine na početku i na kraju mjerenja $\Delta\theta$, napon U ,

struju I i vrijeme t za koje je izvršeno zagrijavanje. Pri tome će se utvrditi da količina topline predana tekućini iznosi:

$$Q = mc\Delta\vartheta, \quad (71)$$

a izvršeni električni rad:

$$A = UIt, \quad (72)$$

te da su ta dva iznosa jednaka. Prema tome, treba reći da je električna struja razvila toplinu iznosa:

$$Q = UIt \quad [J]. \quad (73)$$

Ova se relacija naziva Jouleov zakon, a razvijena toplina Jouleova toplina.

Ako se poslužimo Ohmovim zakonom $U=IR$ ili $I=U/R$, Jouleov zakon se izražava u još dva oblika:

$$Q = I^2Rt, \quad (74)$$

i

$$Q = \frac{U^2}{R}t. \quad (75)$$

Bilo kakvim vodičem tekla, struja uvijek stvara toplinu. U vodovima za prijenos električne energije to su električni gubici i , kao takvi, štetni su. Jedino u uređajima koji služe za to da se električni rad pretvara u toplinu, pojava Jouleove topline korisna je.

Da se vodiči i uređaji ne bi zagrijavali iznad dopuštene granice, za svaku je priliku određeno kolika smije biti najveća gustoća struja.

2.12.1. Električna energija

Time što je pokazano da je električni rad pretvoren u toplinsku energiju, znači da je ta energija dobivena iz električne energije pa se može pisati:

$$W = UIt \quad [J], \quad (76)$$

Ova relacija vrijedi za proračun električne energije za bilo kakvo trošilo. Jedinica za električnu energiju je džul $[J]$:

$$J = VAs,$$

pa iz toga izlazi jedinica za električnu snagu:

$$[P] = \left[\frac{W}{t} \right] = \frac{VAs}{s} = VA = W.$$

Jedinica $VA=W$ naziva se po Jamesu Wattu - vat. Prema tome, jedan džul se dobije kao:

$$1J = 1Ws,$$

džul = vatssekunda.

U praktične svrhe ova je jedinica premalena, pa se koriste veće jedinice:

$$1Wh = 3600Ws = 3,6 \times 10^3 J$$

$$1kWh = \text{kilovatsat} = 3,6 \times 10^6 J$$

$$1MWh = \text{megavatsat} = 3,6 \times 10^9 J$$

$$1GWh = \text{gigavatsat} = 3,6 \times 10^{12} J$$

Svakodnevno se susrećemo s iznosom 1 kWh. Da bismo dobili osjećaj za tu veličinu, usporedit ćemo taj iznos s potencijalnom energijom iz mehanike. Uzmimo masu iznosa $m=100$ kg. Koliko tu masu treba podići visoko da bi se ostvario rad iznosa $3,6 \times 10^6 J$?

$$mgh = 3,6 \cdot 10^6,$$

$$100 \cdot 9,81h = 3,6 \cdot 10^6,$$

$$h = \frac{3,6 \cdot 10^6}{100 \cdot 9,81} = 3670m.$$

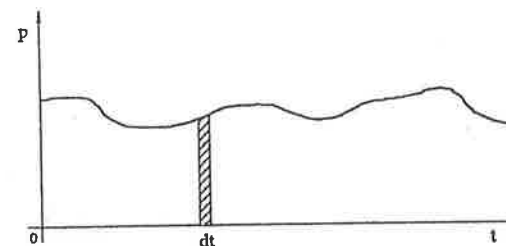
1kWh energije odgovara radu koji je potreban da se teret mase 100 kg podigne 3670 m visoko.

Pomoću relacije $U=W/Q$ može se odrediti napon iznosa 1V:

$$1V = \frac{1J}{1C}.$$

Vrijednost jednog volta imaće onaj napon kod kojega je pri prijenosu naboja od + jednog kulona dobiven rad od jednog džula.

2.12.2. Još jedan osvrt na električnu snagu



Slika 46. Električna snaga kao vremenski promjenljiva veličina

Nema potrebe da se ovdje govori o fizikalnom značenju pojma snage što

je čitatelju svakako poznato. Vratimo se izrazu za snagu (69):

$$P = \frac{W}{t} = UI,$$

koji prepostavlja da su vrijednosti napona i struje konstantne što nije redovan slučaj. Čest je slučaj da je napon konstantan, a struja promjenljiva, što nas navodi da razmotrimo snagu kao funkciju vremena, $p=f(t)$ (slika 46). U tom slučaju može se govoriti o srednjoj vrijednosti snage.

Ako je ukupna utrošena energija:

$$W = \int_0^t p dt, \quad (77)$$

Izlazi da je srednja snaga:

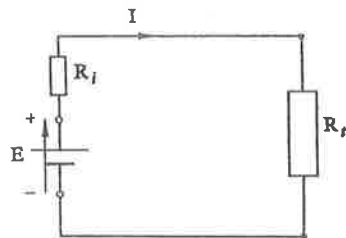
$$P = \frac{1}{t} \int_0^t p dt. \quad (78)$$

2.12.3. Korisnost

Za potrošnju električne energije vezan je pojam korisnosti. Svaki uređaj prima energiju na ulazu i preda na izlazu. Omjer izlazne i ulazne energije naziva se *korisnost* i označava s η . Ako se ulazna i izlazna snaga događaju istovremeno, korisnost se može iskazati omjerom snaga. Naime, u električnom sustavu ili u samo jednom uređaju razlikujemo snagu koju mu izvor preda, P_1 , i korisnu snagu, izlaznu snagu uređaja, P_2 . Razlika $P_1 - P_2 = P_g$ predstavlja snagu gubitaka. Omjer izlazne i primljene snage predstavlja korisnost:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}. \quad (79)$$

2.13. Prilagodavanje



Slika 47. Najveća prenesena snaga P_1 ima se pri $R_1 = R_2$.

Za strujni krug na slici 47. struja ima vrijednost:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2},$$

snaga koju razvija izvor:

$$P_i = EI = \frac{E^2}{R_1 + R_2}, \quad (80)$$

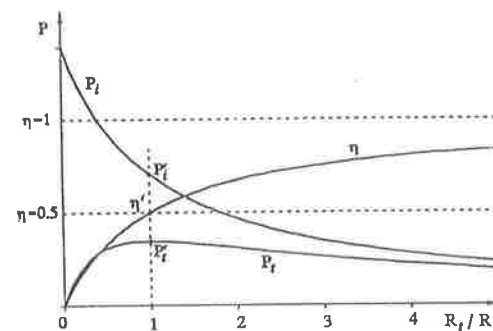
a snaga trošila:

$$P_t = I^2 R_2 = \frac{E^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2}. \quad (81)$$

Razlika snaga $P_i - P_t = P_g$ snaga je gubitaka izvora: $P_g = R_1 I^2$. Korisnost strujnog kruga računa se prema:

$$\eta = \frac{P_t}{P_i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (82)$$

Na slici 48. grafički su prikazani P_i , P_t i η .



Slika 48. Prikaz snaga izvora i trošila i korisnosti u funkciji R_2/R_1 i njihove prilagođene vrijednosti

U elektrotehnici važno je pitanje koliki treba biti vanjski otpor R_2 da uz zadane veličine izvora E i R_1 snaga predata trošilu P_t bude maksimalna. Iz $dP_t/dR_2 = 0$ proizlazi da je to pri:

$$R_2 = R_1.$$

Za ovakvo stanje kaže se da je otpor trošila *prilagođen* otporu izvora.

Ako se u (80), (81) i (82) uvrsti uvjet $P_i = R_v$, dobit će se prilagodene vrijednosti:

Prilagodena snaga izvora:

$$P'_i = \frac{E^2}{2R_i},$$

Prilagodena snaga trošila:

$$P'_i = \frac{E^2}{4R_i},$$

Prilagodena korisnost:

$$\eta' = 0.5$$

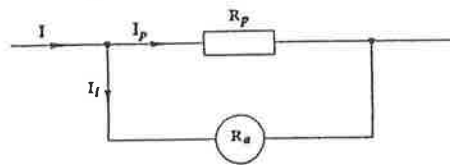
Kod prilagodena korisnost je teoretski 0.5, ali praktično nešto manja. Tada trošilo dobiva najveću moguću snagu određenog izvora, što je značajno kod telekomunikacijskih uređaja: što je predana snaga veća, signal je bolji.

U elektroenergetici je drugačije. Radi velikih količina energije nužno je da se trošilo preda što veća snaga od snage koja je proizvedena, tj. da gubici budu što manji. Kod telekomunikacija se radi pri $R_i/R_v = 1$, a u elektroenergetici treba biti $R_v \gg R_i$.

2.14. Neke primjene osnovnih zakona elektrotehnike

2.14.1. Proširenje mjernog opsega ampermetra, voltmetra i vatmetra

Ampermetar se spaja u strujni krug serijski s izvorom i trošilom. Smisao je da sva struja, koju treba mjeriti, prođe kroz ampermetar. To je praktično moguće samo pri manjim strujama. Ako je struja, koju treba izmjeriti, veća, potrebno je proširiti mjerno područje ampermetra. To se radi tako da se paralelno s ampermetrom ugradi jedan dodatni otpor (shunt). Ako se želi mjeriti struja I , koja je n puta veća od nazivne struje instrumenta I_i , čiji je unutarnji otpor R_v , razlika struje $(I - I_i)$ proći će kroz paralelni otpor R_p .



Slika 49. Proširenje mjernog opsega ampermetra

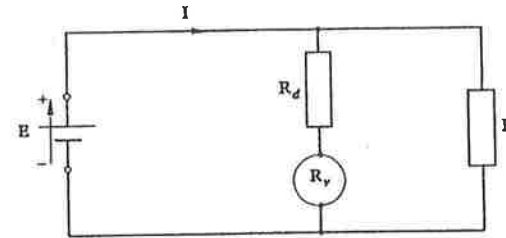
Tada je prema II. Kirchhoffovu zakonu:

$$I_i R_a = (n - 1) I_i R_p,$$

a iz toga slijedi iznos otpora shunta:

$$R_p = \frac{R_a}{n - 1}. \quad (83)$$

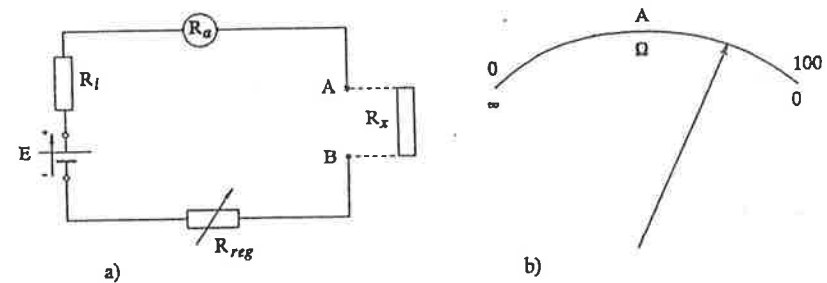
Ako se javi potreba da se izmjeri dvostruki napon od napona za koji je predviđen voltmetar unutarnjeg otpora R_v , u seriju s tim voltmetrom treba spojiti jedan otpornik kojeg je otpor $R_d = R_v$ (slika 50). Na taj će način svakom od serijski spojenih otpora pripasti po pola napona. Za dvostruko proširenje mjernog područja dodali smo $1R_v$.



Slika 50. Proširenje mjernog opsega voltmetra

Ako bi trebalo mjerno područje trostruko proširiti, istim razmišljanjem zaključujemo da treba dodati $2R_v$, itd. Ako se općenito želi n puta proširiti mjerno područje voltmetra, treba dodati $R_d = (n - 1)R_v$ u seriju s voltmetrom.

2.14.2. Ommetar



Slika 51. Primjena ampermetra kao instrumenta za mjerenje otpora - Ommetar
a) shema spoja, b) skala na instrumentu za ampermetar i ommetar

Ommetar je instrument za mjerenje električnog otpora. To je, u stvari, ampermetar kojem je ljestvica baždarena u omima, i to od ∞ do 0, (slika 51b). Razmotrimo shemu (slika 51a) prema kojoj su u seriju spojeni izvor, instrument, regulacijski otpornik te mjereni otpor R_x .

Najprije pogledajmo stanje kada se kratko spoje stezaljke A i B. Tada je otpor među tim stezaljkama jednak nuli i u strujnom krugu će teći struja jakosti:

$$I = \frac{E}{R_i + R_a + R_{reg}}$$

Sada se regulacijski otpor R_{reg} namjesti tako da kazaljka instrumenta pokazuje najveću struju obilježenu na ljestvici što istovremeno znači da instrument pokazuje vrijednost otpora $R_x=0$. Ako se nakon toga otvore stezaljka A i B, struja više neće teći, jer je $R_x=\infty$. Relaciju za struju treba, dakle, pisati kao $I=f(R_x)$:

$$I = \frac{E}{R_i + R_a + R_{reg} + R_x}$$

Promjenom vrijednosti otpora R_x mijenja se struja u strujnom krugu. Da bi ampermetar pokazivao struju unutar intervala $(0, I_{max})$, otpor R_x se mijenja u intervalu $(\infty, 0)$. Traženi otpor uvijek ima vrijednost:

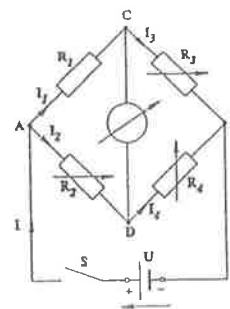
$$R_x = \frac{E}{I} - (R_i + R_a + R_{reg}) \quad (84)$$

Ako se ljestvica baždari u omima, instrument će izravno pokazivati vrijednost otpora R_x . Prije upotrebe ommetra, uvijek treba provjeriti instrument, tako da se stezaljke A i B spoje kratko. Ako kazaljka pri tome ne pokazuje nulu, potrebno je regulacijski otpornik R_{reg} namjestiti tako da kazaljka dođe točno na nulu. Ovo je potrebno radi toga što EMS izvora tokom vremena opada.

2.14.3. Wheatstoneov most

U tehničkoj praksi veliko značenje imaju tzv. mosni spojevi. Najjednostavniji među njima je Wheatstoneov most (slika 52) koji se sastoji od dvije paralelne grane spojene na isti izvor napona. Obje se paralelne grane sastoje od po dva otpora spojena u seriju.

Ovaj se most koristi za mjerenje otpora. Neka je nepoznat otpor R_1 dok su otpori R_2 , R_3 i R_4 poznati i podesivi. Kada se uključi sklopka S, kroz grane mosta uspostavit će se struja i u pravilu će galvanometar između stezaljki C i D pokazati razliku potencijala. Međutim, namještanjem nekog



Slika 52. Wheatstoneov most

od podesivih otpornika moguće je postići da ova razlika potencijala bude jednaka nuli. Tada kroz poprečnu granu (galvanometar) nema struje pa vrijedi da je:

$$I_1 = I_3,$$

$$I_2 = I_4.$$

Isto tako, ako je $U_{CD}=0$, vrijedi relacija:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2,$$

$$I_3 R_3 = I_4 R_4.$$

Podijelimo li prvu jednadžbu drugom, dobije se:

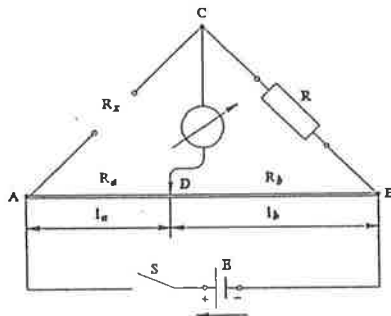
$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4},$$

ili

$$R_1 = R_3 \frac{R_2}{R_4} \quad (85)$$

U Wheatstoneovu mostu za mjerenje otpora, umjesto tri podesiva otpornika, služi jedan otpor konstantnog iznosa (R_3) i jedna žica konstantnog presjeka koja zamjenjuje otpore R_2 i R_4 . Po žici klizi kontakt koji je dijeli na dva dijela (slika 53). Ovdje se R_x dobije iz relacije:

$$R_x = R_a \frac{R_b}{R_c}$$



Slika 53. Wheatstoneov most s kliznom žicom

Omjer R_a/R_b može se zamijeniti omjerom dužina:

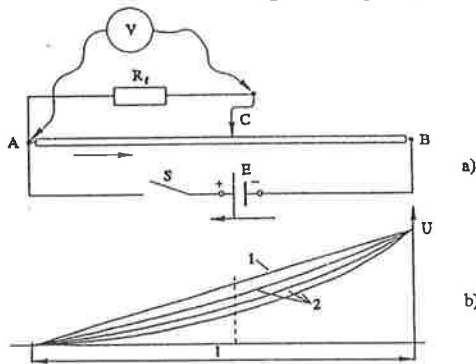
$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{\rho \frac{l_a}{S}}{\rho \frac{l_b}{S}} = \frac{l_a}{l_b}$$

Iz toga slijedi krajnja relacija za otpor:

$$R_x = R \frac{l_a}{l_b} \quad (86)$$

2.14.4. Potenciometar

Potenciometar je otpornik koji je svojim punim iznosom R spojen na izvor EMS i služi kao izvor reguliranog napona iznosa od U do 0 (slika 54).



Slika 54. Potenciometar: a) uređaj, b) naponska karakteristika za prazni hod (1) i različita opterećenja (2)

Ako se uključi sklopka S , kroz otpor protječe struja $I=U/R$. Uslijed toga se događa pad napona u smjeru struje. Na slici 54b prikazan je iznos napona koji se oduzima na potenciometru u praznom hodu (1) i kada je priključen teret otpora $R_l(2)$. Potencijal se raspoređuje uzduž otpora, tako da mu pada iznos u smjeru struje.

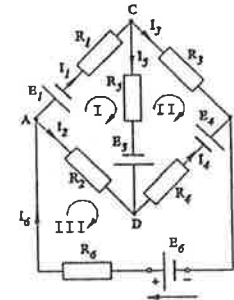
Ovaj uređaj svoju primjenu nalazi u elektronici i regulacijskoj tehnici gdje su signali male snage.

2.15. Rješavanje mreže istosmjerne struje

Do sada smo razmatrali jednostavni strujni krug - izvor i trošilo koji su bili međusobno spojeni vodom. To predstavlja najjednostavniju električnu mrežu. Međutim, redovno se susreću električne mreže izgrađene od više izvora i trošila koji se u mreži predstavljaju jednim otporom. Električna mreža definirana je brojem čvorova i grana.

Grana je onaj dio električne mreže koji se sastoji samo od serijski poredanih izvora napona i otpora kroz koje u svakom trenutku prolazi struja iste jakosti.

Čvor je ono mjesto električne mreže gdje se sastaju najmanje tri grane. Prilikom rada s električnim mrežama važna je kontura. Kontura je električne mreže bilo koji zatvoreni krug koji se dobiva obilaženjem po granama mreže. Dakle, kontura je bilo koji zatvoreni krug sastavljen od nekoliko grana. Prilikom analize značajne su tzv. nezavisne konture. To su one konture



Slika 55. Rješavanje električne mreže primjenom Kirchhoffovih zakona

koje se razlikuju od prijašnjih bar za jednu granu. Pri rješavanju mreže zadatak je odrediti struje, naponu i snagu svake pojedine grane. Ako je mreža zadana tako da su poznate EMS izvora E i otpori R u svim granama, za izračunavanje nepoznatih struja dovoljno je primijeniti I. i II. Kirchhoffov zakon. Pri tome, u pravilu, ima onoliko struja, koliko ima grana. To znači da je potrebno napisati i toliko jednačbi.

Ako mreža ima:

g - grana

\check{c} - čvorova

n - nezavisnih kontura

da bi se izračunalo struje u svim granama, treba napisati g jednažbi. Najprije treba primijeniti I. Kirchhoffov zakon. Iako mreža ima \check{c} čvorova, može se postaviti $(\check{c}-1)$ jednažba jer ona posljednja nije nezavisna. Prema tome, ostaje da se II. Kirchhoffovim zakonom odredi $g-(\check{c}-1)$ jednažbi. A to je, u stvari, ukupan broj nezavisnih kontura električne mreže. Ukupan broj jednažbi napisanih na temelju I. i II. Kirchhoffova zakona iznosi g .

Za mrežu na slici 55. prema I. Kirchhoffovu zakonu napisat ćemo $4-1=3$ jednažbe, a prema drugom $6-4+1=3$ također 3 jednažbe:

$$\begin{array}{lcl} \text{Čvor:} & A & I_6 - I_1 - I_2 = 0 \\ & B & I_3 + I_4 - I_6 = 0 \\ & C & I_1 - I_3 - I_5 = 0 \end{array}$$

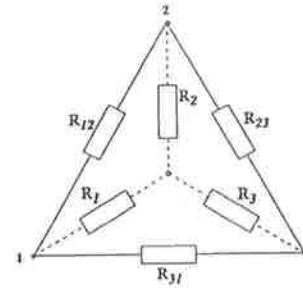
$$\begin{array}{lcl} \text{Kontura:} & I & -E_1 + E_5 = I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_2 R_2 \\ & II & -E_4 - E_5 = I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_5 R_5 \\ & III & E_4 + E_6 = I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_6 R_6 \end{array}$$

Za analizu električnih mreža koristi se niz metoda koje vode brže i lakše k rješenju od Kirchhoffovih zakona, ali u osnovi svih leže ovi zakoni.

U ovom programu nije predviđena daljnja obrada metoda koje se koriste u rješavanju mreža. Za slučaj potrebe čitaocu se preporučuje [2], knjiga prva, ili druga odgovarajuća literatura. Ako parametri električne mreže, npr. otpori, ne ovise o struji i naponu, kažemo da su konstante. Ako su svi elementi mreže konstantnih iznosa, za mrežu kažemo da je *linearna*. Ako se pak neki elementi mreže mijenjaju promjenom iznosa struje i napona, za mrežu se kaže da je *nelinearna*. Linearnih mreža gotovo da i nema, ali ako su su promjene male, mreža se rješava kao da je linearna.

2.16. Transfiguracija zvijezde i trokuta

Čest je slučaj da tri otpora svojim međusobnim spojem čine trokut ili zvijezdu. Transfiguracija trokuta otpora u zvijezdu otpora služi da se mreža pojednostavi i na taj način lakše riješi struja mreže. Suština transfiguracije se ogleda u tome da ona ostavlja otpor između dvije točke mreže nepromijenjenim. Razmotrimo najprije transfiguraciju trokuta u zvijezdu (slika 56).



Slika 56. Transfiguracija trokuta u zvijezdu

Između čvorova 1. i 2. u trokutu otpor iznosi:

$$\frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (87)$$

dok je taj otpor u zvijezdi $R_1 + R_2$. Slično vrijedi i za ostale konfiguracije čvorova (2,3) i (3,1). Na osnovi toga može se pisati:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}},$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}},$$

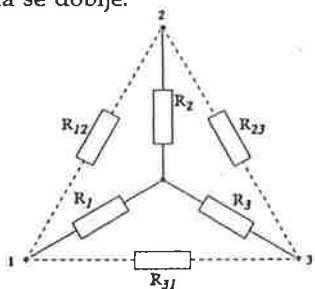
$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Rješenjem ovih jednažbi dobije se:

$$R_1 = \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (88)$$

Očito je moguće izvesti i obrnutu transformaciju. Ako su zadani otpori zvijezde, mogu se odrediti nadomjesni otpori trokuta (slika 57).

Tada se dobije:



$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$

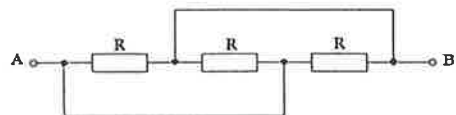
Slika 57. Transfiguracija zvijezde u trokut

što daje:

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \\ R_{31} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \end{aligned} \quad (89)$$

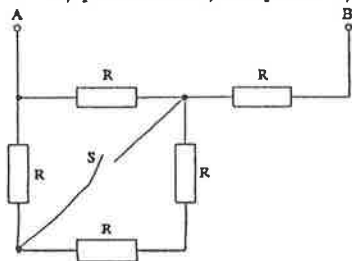
ZADACI

1. Odredite otpor R_{AB} za spoj otpora prema slici.



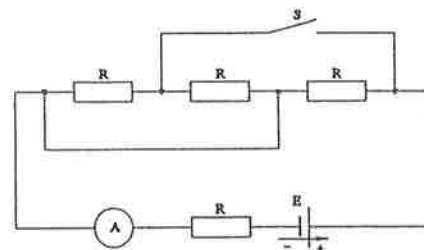
$$(R_{AB} = R/3)$$

2. Odredite ekvivalentni otpor kombinacije otpora prema slici ako je $R = 5\Omega$: a) pri otvorenoj sklopki S, b) pri zatvorenoj sklopki S.



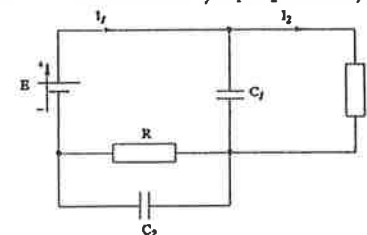
$$(8.75\Omega; 7.5\Omega)$$

3. Do zatvaranja sklopke S na slici ampermetar pokazuje 2 A. Koliku će vrijednost pokazati ampermetar poslije zatvaranja sklopke S?



(3 A)

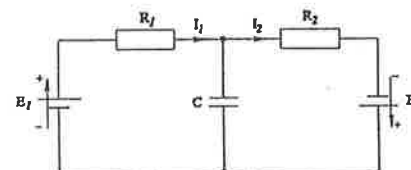
4. Odredite struje I_1 i I_2 te naboje na kondenzatorima nakon prelazne pojave.



$$\begin{aligned} E &= 25 \text{ V} \\ R &= 10 \Omega \\ C_1 &= 1 \mu\text{F} \\ C_2 &= 5 \mu\text{F} \end{aligned}$$

$$(I_1 = I_2 = 1.25 \text{ A}; 12.5 \cdot 10^{-6} \text{ As}; 62.5 \cdot 10^{-6} \text{ As})$$

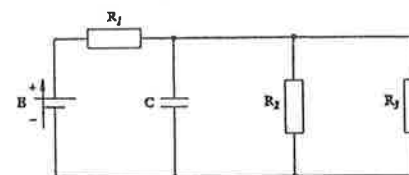
5. Odrediti struje I_1 i I_2 te naboje na kondenzatoru nakon prelazne pojave.



$$\begin{aligned} E_1 &= 10 \text{ V} \\ E_2 &= 5 \text{ V} \\ R_1 &= R_2 = 10 \Omega \\ C &= 1 \mu\text{F} \end{aligned}$$

$$(I_1 = I_2 = 0.75 \text{ A}; 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ As})$$

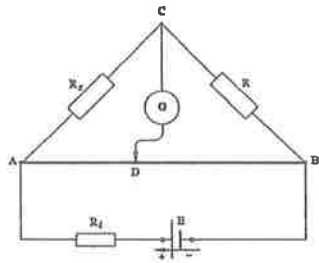
6. Za mrežu na slici odredite: struju kroz otpore, napon kondenzatora i energiju akumuliranu u kondenzatoru nakon prelazne pojave.



$$\begin{aligned} E &= 10 \text{ V} \\ R_1 &= 5 \Omega \\ R_2 &= R_3 = 10 \Omega \\ C &= 1 \mu\text{F} \end{aligned}$$

$$(1 \text{ A}; 0.5 \text{ A}; 0.5 \text{ A}; 5 \text{ V}; 12.5 \cdot 10^{-6} \text{ J})$$

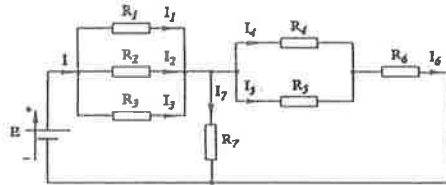
7. Zadan je Wheatstonov most prema slici. Otpor klizne žice duljine $l=1 \text{ m}$ iznosi $R_{AB}=100\Omega$. Za zadane ostale otpore i EMS izvora treba odrediti duljinu klizne žice l_{AD} i napon na njoj kada galvanometar pokazuje nulu.



$$\begin{aligned} E &= 18 \text{ V} \\ R_x &= 160 \Omega \\ R &= 240 \Omega \\ R_1 &= 10 \Omega \end{aligned}$$

(0.4m; 6.4V)

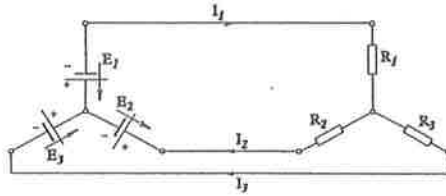
8. Za shemu na slici odrediti ukupnu struju i struje kroz svih sedam otpora.



$$\begin{aligned} E &= 60 \text{ V} & R_4 &= 3 \Omega \\ R_1 &= 10 \Omega & R_5 &= 2 \Omega \\ R_2 &= 12 \Omega & R_6 &= 0,8 \Omega \\ R_3 &= 15 \Omega & R_7 &= 2 \Omega \end{aligned}$$

(12A; 4.8A; 4A; 3.2A; 2A; 4A; 6A; 6A)

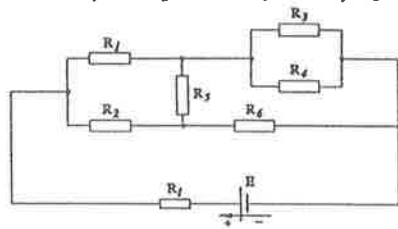
9. Za zadanu shemu na slici odrediti struje kroz otpore.



$$\begin{aligned} E_1 &= 50 \text{ V} & R_1 &= 20 \Omega \\ E_2 &= 25 \text{ V} & R_2 &= 15 \Omega \\ E_3 &= 40 \text{ V} & R_3 &= 20 \Omega \end{aligned}$$

(6.75A; 14A; -7.25A)

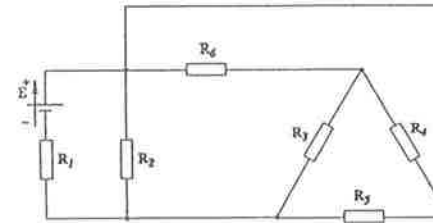
10. Zadana je električna mreža prema slici. Koliki će biti napon U_5 između krajeva otpornika R_5 te struja I_5 kroz taj otpornik za zadane podatke?



$$\begin{aligned} E &= 24 \text{ V} & R_3 &= 16 \Omega \\ R_1 &= 0,2 \Omega & R_4 &= 12 \Omega \\ R_5 &= 10 \Omega & R_5 &= 5 \Omega \\ R_2 &= 15 \Omega & R_6 &= 4 \Omega \end{aligned}$$

(1.875V; 0.375A)

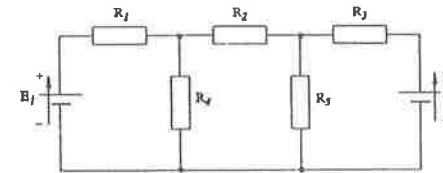
11. Za strujni krug na slici odrediti struju kroz otpornik R_1 i ekvivalentni otpor kruga.



$$\begin{aligned} E &= 10 \text{ V} \\ R_1 &= R_3 = 2 \Omega \\ R_2 &= R_5 = 8 \Omega \\ R_4 &= R_6 = 4 \Omega \end{aligned}$$

(2.5A; 4Ω)

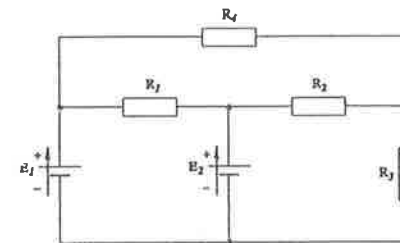
12. Za strujni krug na slici odrediti struje kroz otpore.



$$\begin{aligned} E_1 &= 25 \text{ V} & R_3 &= 30 \Omega \\ E_2 &= 35 \text{ V} & R_4 &= 40 \Omega \\ R_1 &= 10 \Omega & R_5 &= 40 \Omega \\ R_2 &= 20 \Omega & & \end{aligned}$$

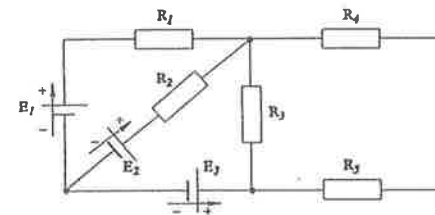
(0.5A; 0A; 0.5A; 0.5A; 0.5A)

13. Za mrežu prema slici odrediti struje kroz otpore.



$$\begin{aligned} E_1 &= 20 \text{ V} & R_2 &= 6 \Omega \\ E_2 &= 30 \text{ V} & R_3 &= 8 \Omega \\ R_1 &= 4 \Omega & R_4 &= 10 \Omega \end{aligned}$$

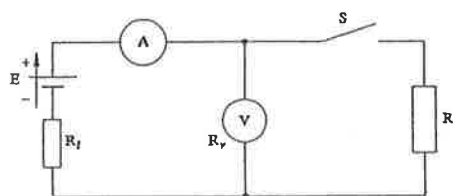
14. Za mrežu na slici odrediti struje kroz otpore.



$$\begin{aligned} E_1 &= 10 \text{ V} & R_2 &= 5 \Omega \\ E_2 &= 20 \text{ V} & R_3 &= 2 \Omega \\ E_3 &= 30 \text{ V} & R_4 &= 1 \Omega \\ R_1 &= 10 \Omega & R_5 &= 1 \Omega \end{aligned}$$

(-1.385A; -1.692A; 3.077A)

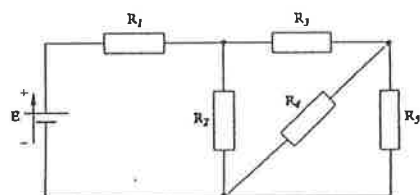
15. Ampermetar i voltmetar spojeni su prema slici. Kod otvorene sklopke S ampermetar pokazuje struju $I_1 = 10 \text{ mA}$ a voltmetar napon $U_1 = 20 \text{ V}$. Kod zatvorene sklopke S ampermetar pokazuje struju $I_2 = 42 \text{ mA}$ a voltmetar napon $U_2 = 16,8 \text{ V}$. Ako je zadan otpor izvora $R_1 = 5 \Omega$, treba odrediti:



- otpor voltmetra
- otpor trošila
- otpor ampermetra
- EMS izvora E

$$(R_v=2k\Omega, R=0.5k\Omega, R_1=95\Omega, E=21V)$$

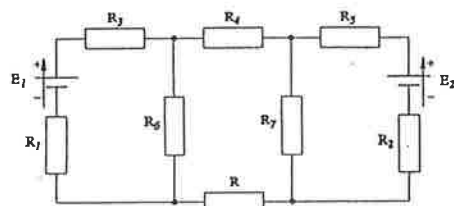
16. U mreži na slici treba odrediti EMS izvora i snagu na otporu R_4 .



$$\begin{array}{ll} R_1 = 12 \Omega & R_4 = 40 \Omega \\ R_2 = 60 \Omega & R_5 = 40 \Omega \\ R_3 = 20 \Omega & I_3 = 2 \text{ A} \end{array}$$

$$(72V; 40W)$$

17. U mreži prema slici i zadanim podacima treba odrediti onu vrijednost otpora R pri kojem on prima maksimalnu snagu.



$$\begin{array}{ll} E_1 = 80 \text{ V} & R_3=R_7 = 4 \Omega \\ E_2 = 120 \text{ V} & R_4=R_6 = 10 \Omega \\ R_1 = 2 \Omega & R_5=R_8 = 6 \Omega \end{array}$$

$$(18\Omega; 5.55W)$$

18. Na izvor napona $U = 220 \text{ V}$ vezana su paralelno tri potrošača i to električna peć koja uzima struju $I_1 = 15 \text{ A}$, grupa žarulja ukupne snage $P_2 = 440 \text{ W}$ i motor snage $P_3 = 735,5 \text{ W}$. Odrediti ukupnu struju izvora I , struje I_2 i I_3 , ukupnu snagu potrošača i energiju koju bi pokazalo brojilo ako su svi potrošači ukopčani $t = 20$ sati.

$$(I=20.34A; I_2=2A; I_3=3.34A; I=20.34A; P=4475.5W; W=89.51kWh)$$

19. Koji najmanji presjek trebaju imati vodiči dvopolnog bakrenog voda za prijenos snage na udaljenost od 1 km koja na početku voda iznosi 15 kW . Napon na početku voda iznosi 220 V , a gubici prijenosa ne smiju premašiti 10% raspoložive snage. $\rho = 1,786 \cdot 10^{-8} \Omega m$

$$(108.5mm^2)$$

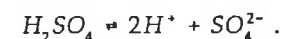
20. Električni grijač služi za grijanje 85 litara vode od $10^\circ C$ do $90^\circ C$ za 20 min. Gubici topline pri grijanju su 8% . Grijač je od cekar žice specifičnog otpora $\rho = 1,1 \cdot 10^{-8} \Omega m$, promjera $d = 2,8 \cdot 10^{-3} m$, i priključen je na izvor napona 220 V . Odredite duljinu žice.

$$(10.75m)$$

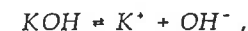
3. ELEKTROLIZA I KEMIJSKI IZVORI ELEKTRIČNE ENERGIJE

3.1. Elektrolitička disocijacija

Ako se u vodi otope soli, kiseline i lužine dolazi do tzv. disocijacije. To znači da se kompaktne neutralne molekule i kristalni ionski spojevi u otopljenom stanju razlože na pozitivno i negativno nabijene ione. Atomi vodika i metala predaju svoje valentne elektrone ostalom dijelu molekule. Tako su vodik i metali pozitivni ioni, dok će preostali dijelovi postati negativni ioni. Npr. molekula kloridne kiseline HCl razlaže se na ion vodika H^+ koji ostaje bez svog elektrona, i na ion klorida Cl^- s jednim elektronom više. Slično se događa i sa sulfatnom kiselinom H_2SO_4 koja se razlaže na dva iona vodika $2H^+$ i ion SO_4^{2-} . Ovi procesi teku u oba smjera te se izražavaju jednadžbama:



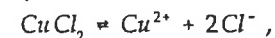
Slično je i kod otopina lužina. Npr. kod otopine kalijeve lužine disocijacija se vrši po jednadžbi:



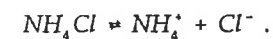
a kod otopine natrijevog hidroksida $NaOH$:



Kod otopljenih soli pozitivni ioni (kationi) su ionizirani atomi metala, a negativni ioni (anioni) ionizirani atomi nemetala. Kod disocijacije bakar(II)-klorida $CuCl_2$ vrijedi:

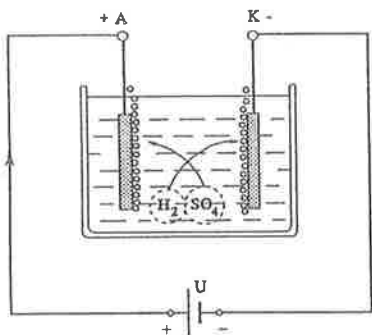


a pri disocijaciji NH_4Cl :



3.2. Elektroliza

Uzmimo jednu posudu izrađenu od izolacijskog materijala (slika 58). Neka se u njoj nalazi otopina kiseline, lužine ili soli. Posuda se naziva *elektrolitička ćelija*, a otopina u njoj *elektrolit*. Da bi se mogla uspostaviti električna struja kroz elektrolit, potrebno je u elektrolit uroniti dvije vodljive sonde u obliku ploča od metala, ugljena ili drugog vodiča.

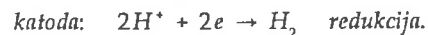


Slika 58. Elektrolitička ćelija

Uronjeni dijelovi nazivaju se *elektrode*, i to *anoda* i *katoda*. Kada se na elektrode priključi istosmjerni napon, plus izvor spaja se na anodu gdje struja ulazi, a minus pol izvora na katodu, gdje struja izlazi. Tada se uspostavi struja u strujnom krugu. Pri tome u elektrolitu, koji je prethodno disociran, nastaje struja iona. Na anodu odlaze njoj suprotno nabijene čestice tj. *anioni*, a na katodu *kationi*.

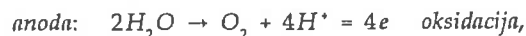
Na elektrodama će se odvijati kemijske reakcije i to na anodi oksidacija (molekule, atomi ili ioni otpuštaju elektrone i predaju ih anodi), a na katodi redukcija (molekule, atomi ili ioni primaju elektrone od katode).

U navedenom slučaju uz npr. platinske elektrode na katodi se odvija reakcija redukcije H^+ -iona i razvija se plinoviti vodik prema jednadžbi:



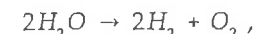
Na anodi neće doći do oksidacije SO_4^{2-} -iona nego će se oksidirati molekule vode, jer ta reakcija zahtijeva manje energije.

Inače, na elektrodama se uvijek odvija onaj proces koji zahtijeva najmanje energije, a elektrode pri tom služe kao granične reagirajuće površine. Treba napomenuti da i elektrode, ako nisu inertne, mogu sudjelovati u kemijskim reakcijama. Dakle, reakcija na anodi je slijedeća:



i kao što se vidi, oksidacijom vode nastaje plinoviti kisik.

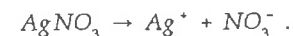
Sumarna reakcija je:



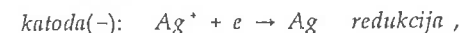
i predstavlja elektrolizu vode uz nastanak plinovitog vodika na katodi, a kisika na anodi.

Pogledajmo drugi primjer.

Neka je elektrolit vodena otopina $AgNO_3$, anoda srebrna ploča, a elektroda predmet od bakra koji želimo posrebriti. U toj otopini $AgNO_3$ disocira se prema jednadžbi:



Kada se na elektrode priključi struja, ioni će putovati prema suprotno nabijenim elektrodama, gdje će se odvijati slijedeća reakcija:



tj. na bakreni predmet, koji je katoda, nataložiti će se elementarno srebro.

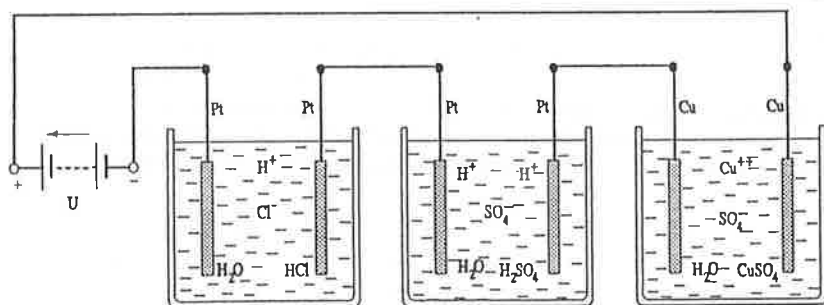
Na anodi, od mogućih reakcija oksidacije, odvijati će se ona koja zahtijeva najmanje energije, a to je oksidacija same srebrne anode (preostale moguće reakcije oksidacija NO_3^- -iona ili molekula vode zahtijevaju više energije pa se ne odvijaju).

Tako koncentracija soli $AgNO_3$ ostaje u tekućini nepromijenjena. Kao konačan rezultat, izgleda da je srebro s anode direktno prešlo na katodu. Ali, to je tek sekundarna reakcija. Srebro s anode ide najprije u elektrolit, a iz elektrolita na katodu.

Elektroliza ima veliku praktičnu važnost za dobivanje raznih kemijskih supstanci električnim putem, kao i veliku primjenu u galvanostegiji. To je postupak kojim se predmetima izrađenim od neplemenitih metala električnim putem nanosi sloj plemenitog metala koji ih štiti od korozije.

3.3. Faradayevi zakoni elektrolize

Slavni englez Michael Faraday proučavao je elektrolizu i uspostavio zakone koji su nagovijestili i kasnije potvrdili današnje shvaćanje o strukturi materije, o elementaranom kvantu elektriciteta i jednakosti svih elektrona. Do formulacije zakona elektrolize došao je eksperimentalno. Promatrao je više procesa elektrolize istovremeno (slika 59) propuštajući kroz sve elektrolitske ćelije istu struju. Ustanovio je da masa izlučene materije u elektrolitskim procesima ne ovisi o koncentraciji elektrolita, temperaturi, površini elektrode, njihovom obliku niti o udaljenosti među njima, nego samo o količini elektriciteta koji prođe kroz elektrolit, o atomskoj masi elementa koji se izdvaja i o njegovoj valenciji što je iskazano preko dva Faradayeva zakona.



Slika 59. Promatranje više procesa elektrolize radi provjere Faradayevih zakona elektrolize

I. Faradayev zakon glasi:

$$m = aIt \quad \text{ili} \quad m = aQ, \quad (90)$$

gdje je: m - masa izlučene materije (kg),
 a - elektrokemijski ekvivalent (kg/C).

Elektrokemijski ekvivalent a , odnosno faktor razmjernosti između mase i naboja veličina je koja pokazuje koliko se dotične tvari izluči prilikom prolaza jedinične količine elektriciteta kroz elektrolit:

$$a = \frac{m}{Q} \quad (\text{kg/C}). \quad (91)$$

Da bi se mogli izvršiti proračuni procesa elektrolize, potrebno je poznavati elektrokemijske ekvivalente za pojedine tvari koje se izlučuju prilikom elektrolize. Ta vrijednost za srebro donedavno je služila za definiciju struje jakosti jedan amper: $a_{\text{Ag}} = 1,118 \text{ mg/As}$. Naime, struja jakosti 1A u toku jedne sekunde izlučit će iz otopine srebro(I)-nitrata AgNO_3 1,118 mg čistog srebra.

II. Faradayev zakon elektrolize kaže da su elektrokemijski ekvivalenti raznih kemijskih elemenata upravo proporcionalni atomskim težinama, a obrnuto proporcionalni valencijama:

$$a_1 : a_2 = \frac{A_1}{V_1} : \frac{A_2}{V_2}, \quad (92)$$

iz čega izlazi da se, poznavajući elektrokemijski ekvivalent za jedan element, može izračunati i za drugi.

Iz II. Faradayeva zakona slijedi da su svi omjeri A/aV jednaki pa vrijedi:

$$\frac{A_1}{a_1 V_1} = \frac{A_2}{a_2 V_2} = \dots = \frac{A}{aV} = \text{konst} = F. \quad (93)$$

To je Faradayeva konstanta kojom je određena količina naboja potrebna za jedincu mase uz valenciju 1. Njezina vrijednost iznosi približno:

$$F = 96500 \cdot 10^3 \text{ As/kg}.$$

Iz navedenih odnosa lako se izračuna elektrokemijski ekvivalent:

$$a = \frac{A}{V} \frac{1}{F} = \frac{A}{V 96500 \cdot 10^3} \quad (\text{kg/C}). \quad (94)$$

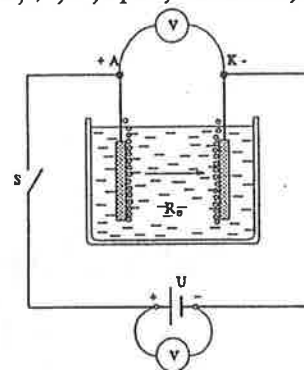
Sada se oba Faradayeva zakona mogu napisati kao jedan:

$$m = \frac{1}{96500 \cdot 10^3} \frac{A}{V} Q \quad (\text{kg}). \quad (95)$$

Izlazi da su količine izlučene tvari, uz istu količinu elektriciteta, proporcionalne kemijskim ekvivalentnim težinama (A/V).

3.4. Napon polarizacije

U elektrolytičkoj ćeliji s vodenom otopinom sulfatne kiseline uronjene su dvije elektrode od platine. Ako izvor ima napon iznosa U , prije uključivanja sklopke S između stezaljki A i K vlada napon $E=0$. Ako se uključi sklopka S , napon E bit će jednak naponu U , $E=U$ i doći će do elektrolize sulfatne kiseline, pri čemu će se u obliku mjehurića na anodi razvijati kisik, a na katodi vodik. Sada isključimo sklopku S . Voltmetar će i nadalje pokazivati napon, nešto manji od napona U , $E < U$. Taj se napon naziva *napon polarizacije*, jer je posljedica kemijskih promjena koje su se dogodile na



Slika 60. Mjerenje napona polarizacije

elektrodama i ima suprotan smjer od napona izvora. Dakle, čim započne proces elektrolize, dolazi do napona polarizacije. Da bi tekla struja, napon izvora mora biti veći od napona polarizacije. Nadalje, elektrolit ima svoj otpor R_e pa se na njemu ostvaruje pad napona. Napon izvora mora pokriti i taj iznos, pa za napone vrijedi relacija:

$$U = E + IR_e$$

Ako se gornja jednadžba pomnoži s It , dobije se iznos energije koju izvor preda elektrolitičkoj ćeliji:

$$UIt = EIt + I^2 R_e t \quad (96)$$

Iznos energije $I^2 R_e t$ troši se na zagrijavanje elektrolita, a iznos EIt na kemijsku energiju:

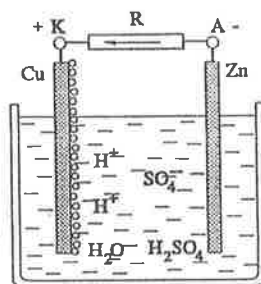
$$W_{izv} = W_{kem} + Q_{topl} \quad (97)$$

Napon polarizacije E javlja se uslijed promjenljivih prilika u kojima se za vrijeme elektrolize nalaze elektrode. Prije procesa elektrolize obje ploče od platine bile su u neposrednom dodiru s elektrolitom u jednakim prilikama. Nakon početka elektrolize uvjeti su se promijenili, tako da je anoda obavijena mjehurićima vodika, a katoda mjehurićima kisika. Zbog toga se nastajanje napona polarizacije pripisuje različitosti materija na elektrodama. Stoji općeniti zaključak da će se na dvjema pločama dobiti napon ako se u elektrolit urone dvije ploče različitog kemijskog sastava. Ako se uroni u elektrolit, svaka ploča dobiva prema elektrolitu određen potencijal. Ako su ploče jednake, i potencijali su isti. Dakle, samo uronjene različite ploče ostvaruju razliku potencijala, odnosno napon.

3.5. Primarni kemijski izvori električne energije

3.5.1. Voltin članak

Slika 61. Voltin članak



Talijanski fizičar Alessandro Volta, oko 1800 god., ostvario je prvi kemijski izvor električne struje. U elektrolitičkoj ćeliji s razrijeđenom

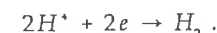
sulfatnom kiselinom uronio je dvije elektrode, jednu od bakra i drugu od cinka (slika 61). Pri tim uvjetima elektrode imaju različite iznose potencijala kojih razlika za Cu-Zn iznosi $\approx 1,1V$. Pojava ovog napona tumači se različitošću tvari od kojih su elektrode izradene. Ako se izvana, preko otpora R , elektrode spoje, zatvori se strujni krug kojim će poteći električna struja kao posljedica kemijskih reakcija koje se javljaju na elektrodama.

Naime, na elektrodi od cinka doći će do oksidacije same elektrode:



Budući da se oksidacija odvija na anodi, to cinkova elektroda predstavlja anodu, a kako se tu stvara višak elektrona, to anoda predstavlja negativni pol (napomena: polovi elektroda u galvanским člancima suprotni su od onih pri elektrolizi).

Elektroni, oslobođeni anodnom reakcijom, putuju prema bakrenoj elektrodi gdje se odvija reakcija redukcije i to prisutnih H^+ -iona uz nastajanje plinovitog vodika:



Dakle, protjecanje struje imat će za posljedicu stvaranje vodika oko bakrene elektrode, te više neće biti potencijala Cu-Zn (1,1V) nego H-Zn (0,76 V; vidi tablicu 5). Osim smanjenja napona, zbog sloja vodika na elektrodi, znatno poraste unutarnji otpor elektrolita R_e što Voltin članak čini upotrebljivim samo kratko vrijeme. Daljnji je nedostatak Voltina članka otapanje cinkove elektrode te stvaranje lokalnih struja.

Tablica 5. Elektrodni potencijali

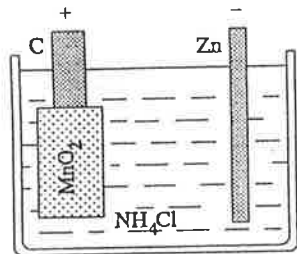
Elektroda	Ion	Potencijal V
Li	Li ⁺	-3,02
K	K ⁺	-2,922
Ca	Ca ²⁺	-2,87
Na	Na ⁺	-2,712
Mg	Mg ²⁺	-2,34
Mn	Mn ²⁺	-1,05
Zn	Zn ²⁺	-0,762
Cr	Cr ²⁺	-0,71
Sn	Sn ²⁺	-0,136
Pb	Pb ²⁺	-0,126
H ₂	H ⁺	0
Cu	Cu ²⁺	+0,3448
Ag	Ag ⁺	+0,7995
Cl ₂	Cl ⁻	+1,3583
F ₂	F ⁻	+2,85

Poslije Voltina pronalaska velik broj fizičara radio je na iznalaženju savršenijeg kemijskog izvora električne energije. Najviše uspjeha imao je Leclanche. Prije 120 godina izumio je članak koji je, uz neke izmjene, do danas u upotrebi. Štoviše, preko 70% svjetske produkcije primarnih članaka i danas se odnosi na Leclancheov članak.

3.5.2. Leclancheov članak

Normalni Leclancheov članak je izveden s tekućim elektrolitom. U posudi izrađenoj od izolacijskog materijala nalazi se otopina amonijeva klorida (salmijak), NH_4Cl . Pozitivni pol je ugljeni štap obložen prašinom manganova dioksida, MnO_2 , a minus pol je cinkov štap. Struju u tom članku daju veoma komplicirane reakcije. Glavne su reakcije oksidacija elementarnog cinka (-pol) i redukcija manganova dioksida (+pol) uz još čitav niz paralelnih reakcija.

Unutarnji napon Leclancheovog članka je 1,5 V.



Slika 62. Leclancheov članak

Već dugo vremena u upotrebi je modificirani Leclancheov suhi članak. To je ona "Croatia" baterija koju već decenijama susrećemo u džepnim svjetiljkama, tranzistorima i drugdje. Ova je baterija u posljednje vrijeme doživjela značajno poboljšanje energetskih karakteristika. Danas je u upotrebi cink-klorid varijanta Leclanchea kod koje je postignuto poboljšanje dviju vrlo značajnih karakteristika: znatno povećanje trajnosti pri pražnjenju velikim strujama i kontinuiranim opterećenjima. Pored toga, znatno je smanjeno curenje elektrolita.

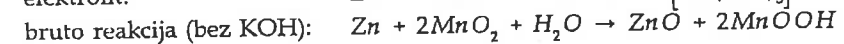
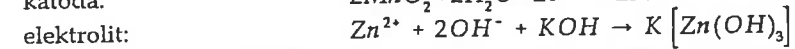
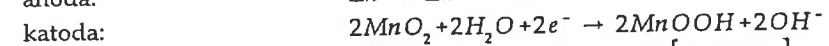
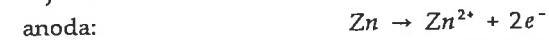
Na tržištu se javlja u varijanti *super* i *superdry*.

U svijetu je danas razvijen cijeli niz sustava primarnih baterija, posebno alkalnih: alkalna MnO_2 , živin oksid - cink, srebro oksid - cink i cink - zrak baterija, zatim litijeva za koju se pretpostavlja da će u budućnosti biti sve zanimljivija, a uspješno se razvijaju i magnezijeve baterije, termalne baterije, kao i baterije s krutim elektrolitom.

3.5.3. Alkalno- MnO_2 članak

Kod alkalnog MnO_2 članka elektrodni materijali isti su kao i kod Leclancheova: manganov dioksid i cink. Osnovna razlika je u elektrolitu; ovdje je uzeta kalijeva lužina.

Reakcije koje se zbivaju u alkalnom MnO_2 članku u toku pražnjenja su slijedeće:



Napon članka je 1,5 V.

Alkalni elektrolit znatno potencira problem trošenja cinka koji se uspijeva riješiti amalgamiranjem cink-elektrode. Prednost alkalnog MnO_2 članka prema Leclancheovu je što omogućava kontinuirano pražnjenje jakim strujama. Pri tome, alkalni ima kapacitet do deset puta veći od Leclancheova. Pogodan je za upotrebu pri niskim temperaturama, a duže skladištenje vrlo malo utječe na kapacitet.

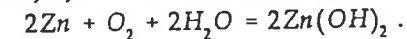
Leclancheov suhi, supersuhi i alkalni MnO_2 članci ili baterije izrađuju se u različitim oblicima i veličinama, i to:

Oblik	Oznaka veličine	dimenzije mm	napon V
Cilindrični	R20	34.2 × 61.5	1.5
	R14	26.2 × 50.0	1.5
	R6	14.5 × 50.5	1.5
	2R10	14.8 × 74.6	3
Pločasti	3R12	62 × 22 × 67	4.5
	Prizmasti	6F22	26.5 × 17.5 × 48.5

Odnos cijena: suhi : supersuhi : alkalni MnO_2 = 1 : 1.2 : 3

3.5.4. Članak cink-zrak

Ovaj članak kao katodu koristi kisik iz zraka. Ukupna reakcija koja se zbiva prilikom pražnjenja članka određena je jednadžbom:



Niz međustupnjeva ove reakcije nije do danas razjašnjen. Napon članka iznosi 1,4 V. Članak je prikladan za male struje, a kod većih struja napon brzo pada.

U novije vrijeme ovaj se članak javlja nešto izmijenjen, s elektrolitom na bazi natrijeve ili kalijeve lužine. Cink elektroda je ovdje u obliku amalgamiranog cinkova praha. Time su popravljene energetske osobine baterije.

Proizvode se u dugmatskoj formi s kapacitetom do 500 mAh.

3.5.5. Živin oksid-cink članak

Živin članak po konstrukciji i tehničkim karakteristikama razlikuje se od standardnih članaka. Malih je dimenzija, po obliku i veličini sličan je dugmetu, s kapacitetom do 1100 mAh. Odlikuje se stabilnim naponom (1,35V - 1,4V) i širokim područjem radnih temperatura. Velike je mehaničke čvrstoće i može se dugo skladištiti, a da pri tome ne gubi znatnije na kapacitetu. Primijenjuje se kod foto-kamera, svjetlomjera, slušnih aparata, mjernih instrumenata, opreme za komunikaciju, medicinskih instrumenata, kalkulatora, električnih satova itd. Dobro izrađeni članci kroz tri godine skladištenja izgube manje od 10% nazivnog kapaciteta, a nazivni napon nakon pet godina skladištenja opadne za oko 10 mV.

Unatoč dobrim tehničkim karakteristikama, zbog otrovnog djelovanja žive, ovaj članak se više ne proizvodi.

3.5.6. Srebro oksid-cink članak

Ti članci imaju slične energetske karakteristike kao i živini članci, a proizvode se u dugmastom obliku. Od živinog članka se razlikuju po tome što je katoda izrađena od srebra(I)-oksida što ovu bateriju čini skupom. Ima isto područje primjene kao i živin članak.

3.5.7. Magnezijev članak

Taj je članak po karakteristikama sličan Leclancheovu. Razlikuju se po anodi; ovdje je upotrebljen magnezij. Odlike ovog članka su: sposobnost uskladištenja (u stanju mirovanja ćelija se pasivizira i time biva zaštićena od korozije) i dobro se ponaša na niskim temperaturama radi čega se primijenjuje posebno za vojne, meteorološke i druge svrhe.

3.5.8. Litijev članak

Litijevi članci spadaju, po općim karakteristikama, u najatraktivniji elektrokemijski sustav koji je do sada proizveden. Njegove glavne karakteristike su:

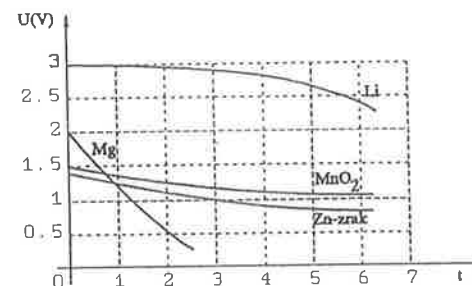
- najviši napon po članku od svih kemijskih izvora, 3 V
- najveća gustoća energije
- najduži period skladištenja, do 10 godina
- minimalno samopražnjenje, oko 2% godišnje
- širok opseg radne temperature, od -40 C do +100 C.

Primijenjuju se za napajanje usamljenih i teško pristupačnih potrošača (ploveći svjetionici na moru, planinske meteorološke stanice), za medicinske aparate (pejsmejeri i slušni aparati), za računarsku tehniku, u vojne svrhe (uredaji za noćno promatranje i gadanje, prenosni radari, razne vrste naoružanja).

Proizvode se kao dugmaste (3V), cilindrične (3V) i plosnate (3V), s kapacitetom od 25 do 1300 mAh.

Tablica 6. Energetske karakteristike primarnih članaka

	Leclanche	alkalne MnO ₂	magnezij	cink-znak	Srebro-cink	Litij	
1	Sadržaj energije Wh/kg	45	40-70	85	do 400	110	200-300
2	Nominalni napon ćelije V	1.5	1.5	2.0	1.4	1.50	3
3	Unutarnji otpor	nizak	vrlo nizak	nizak	nizak	nizak	vrlo nizak
4	Temp.područje °C						
4	skladištenje	-40 do 50	-40 do 50	-40 do 70	-40 do 60	-40 do 60	-55 do 70
	radno područje	-10 do 55	-30 do 55	-20 do 70	-0 do 55	-0 do 55	-40 do 55
5	Kapaciteti u ovisnosti o temperaturi	slab na niskim temp.	relativno dobar na niskim temp.	relativno dobar na niskim temp.	dobar kod visokih temp. slab kod nižih temp.	slab kod niskih temp.	odličan
6	Uskladištenje na temperaturi 20°C do 80% poč.kap.(u god.)	2 do 3	3 do 5	2 do 3	2 do 3	2 do 3	3 do 5
7	Oblik krivulje pražnjenja	strmi	relativno ravan	strmi	ravan	ravan	ravan



Slika 63. Naponske karakteristike različitih primarnih izvora

3.6. Sekundarni izvori ili akumulatori

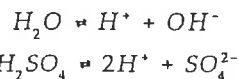
Primarni izvori služe i ekonomični su u slučajevima kada je potrošnja električne energije mala: džepne svjetiljke, tranzistorski prijemnici, mjerni uređaji, foto kamere, kalkulatori, satovi itd. Ako su potrebne veće količine energije, koriste se sekundarni izvori ili akumulatori. Ti se izvori mogu, nakon što im napon uslijed upotrebe padne, ponovo regenerirati. Danas se u tehničkoj praksi koristi veći broj raznih akumulatora. U kratkim crtama opisat ćemo olovni, čelični, nikal-kadmij, srebro-cink, srebro-kadmij i nikal-metalhidrid akumulator. Usporedba njihovih karakteristika prikazana je u tablici 7.

3.6.1. Olovni akumulator

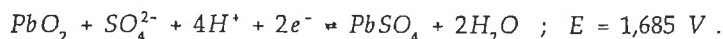
Olovni akumulator danas je najmasovniji i najznačajniji proizvod na cjelokupnom području elektrokemijskih izvora energije. Područje njegove primjene široko je: od velikih baterija za startanje motora do malih formi za potrebe elektronike. Naziv dolazi od materijala od kojih su izrađene elektrode. Pozitivna elektroda je olovni dioksid PbO_2 . Omjer kisika i olova nešto je manji od dva: 1,90-1,98. PbO_2 , kao i metali ima karakteristični potencijal i u kontaktu s elektrolitom moguće ga je polarizirati katodno i anodno. Posebna zanimljivost olovnog dioksida je svojstvo poluvodiča pa je moguće njime ispravljati izmjenične struje. Negativna elektroda je izrađena od spužvastog olova čime se postiže velika specifična površina koja ima veliki afinitet prema atmosferskom kisiku. Elektrolit je razrijeđena sulfatna kiselina, H_2SO_4 koja ima dvojaku ulogu: provodi električni naboj i sudjeluje u elektrokemijskim reakcijama kao aktivni materijal. Prilikom razrjeđivanja uvijek se kiselina ulijeva u vodu, a nikada obrnuto.

Elektrokemijske reakcije punjenja i pražnjenja akumulatora prikazuju se slijedećim relacijama:

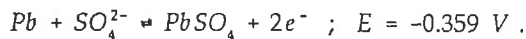
Elektrolit:



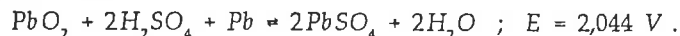
Pozitivna elektroda:



Negativna elektroda:



Ukupna reakcija:



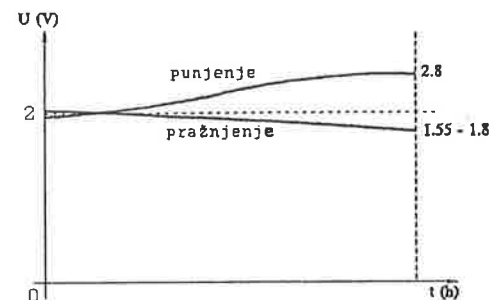
Napon jedne ćelije iznosi, dakle $\approx 2V$.

Konačni produkt pražnjenja akumulatora (\rightarrow) na pozitivnoj i negativnoj elektrodi je $PbSO_4$.

Zanimljiv je podatak o potrebnom materijalu za 1 Ah:

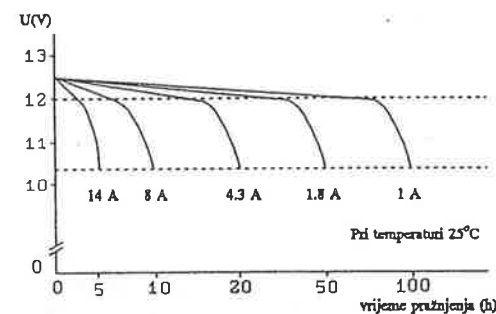
4,45 g	$PbO_2 / 1 Ah$
3,86 g	$Pb / 1 Ah$
3,68 g	$H_2SO_4 / 1 Ah$

Na slici 64. prikazana je vanjska karakteristika $U=f(t)$ za punjenje i pražnjenje. Redovno nas zanima koliko se dugo napunjeni akumulator može prazniti nazivnom strujom. Umnožak struje pražnjenja i vremena pražnjenja naziva se *kapacitet akumulatora*. Npr, startni akumulator nazivnog kapaciteta



Slika 64. Karakteristike punjenja i pražnjenja olovnog akumulatora

36 Ah može se prazniti 20 sati strujom 1,8 A. Ipak, za različite struje pražnjenja, pri različitim temperaturama, kapacitet je promjenljiv što ilustrira slika 65.



Slika 65. Karakteristike pražnjenja za različite struje kao ilustracija promjene kapaciteta

Krajnji napon pražnjenja zavisi od jačine struje pražnjenja i kreće se između 1,55 ... 1,80 V/članku.

Značajan korak u razvoju olovnog akumulatora je pojava tzv. malog olovnog akumulatora kapaciteta 1 do 36 Ah. Po izvedbi su hermetički zatvoreni, što znači da nema izlaska kiseline iz ćelije i nije potrebno dodavati elektrolitu vodu. Održavanje je svedeno na punjenje. Mogu se postaviti u bilo koji položaj.

3.6.2. Čelični akumulator

Čelični akumulator preteča je današnjeg Ni-Cd akumulatora. Taj je akumulator Edisonov izum. Pozitivna elektroda je nikal(II)-oksid Ni_2O_3 a negativna od željeza s malim dodatkom žive radi povećanja kemijske aktivnosti. Elektrolit je 21% razrijeđena kalijeva lužina KOH s određenim dodatkom litij-oksida Li_2O . Kemijski proces prilikom punjenja i pražnjenja pojednostavljeno se prikazuje jednačinom:



Napon ovog akumulatora je 1,5 V po ćeliji i otvorene je izvedbe.

Karakteristično je za ovaj članak da se smije prazniti do vrlo niskog napona i ne smeta mu kratki spoj kao olovnom akumulatoru.

3.6.3. Nikal-kadmijev članak

Široku primjenu našla je varijanta čeličnog akumulatora, nikal-kadmij, hermetički zatvoren članak koji nije potrebno održavati. Pozitivna elektroda sastoji se od niklenih, a negativna od kadmijevih spojeva. Kao elektrolit se upotrebljava kalijeva lužina koja je apsorbirana u porama elektroda i separatora; slobodne tekućine u ćelijama nema. Kod ovih ćelija uspjele se spriječiti razvijanje vodika, a izlučeni kisik se veže u ćeliji, elektrokemijskim putem. Napon po ćeliji neopterećenog članka je 1,3 V. Smije se prazniti do napona 1 V. Nominalna struja punjenja iznosi 0,1 CA (CA je kapacitet članka). Nominalna struja pražnjenja ona je struja pri kojoj se isprazni ćelija kroz pet sati (0,2 CA).

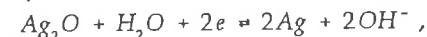
Ni-Cd akumulatori zatvorenog tipa proizvode se u različitim izvedbama:

Dugmasti akumulatori, kapacitet	10mAh do 550 mAh
Okrugli akumulatori, kapaciteta	100mAh do 7 Ah
Prizmatični akumulatori, kapaciteta	1,3 Ah do 50 Ah

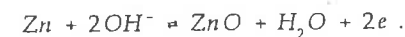
Zbog ekoloških razloga neke su zemlje zabranile upotrebu ovog članka.

3.6.4. Srebro-cink akumulatori

Ag-Zn akumulatori su kemijski izvori energije visokih karakteristika za specijalne namjene. Pozitivna elektroda napunjenog akumulatora je srebro(I)-oksid, a negativna cink. Elektrolit je razrijeđena kalijeva lužina KOH. Proces koji se zbivaju u ovoj ćeliji izražavaju se jednačinama: Proces na pozitivnoj elektrodi:



a na negativnoj:



Ukupni proces pražnjenja i punjenja:



Napunjeni akumulator: Zn [KOH] Ag_2O .

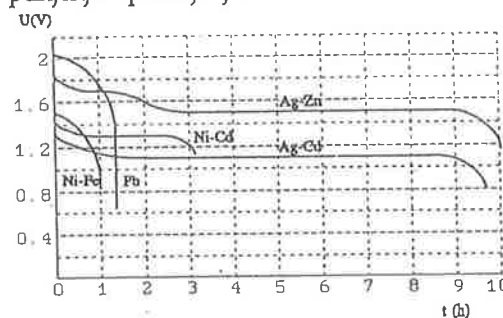
Napon neopterećenog članka: 1,84 V

Srednji radni napon: 1,5 V

Ag-Zn akumulatori se primjenjuju prvenstveno ondje gdje se postavlja zahtjev malih dimenzija i male težine izvora električne energije i kada se traži forsirano pražnjenje izvora. Pri tome su radni vijek i cijena sporednog značenja. Ti akumulatori za sada nemaju ozbiljnog konkurenta kada su u pitanju vojni zahtjevi. Upotrebljavaju se na projektilima, raketama, satelitima, podmornicama, torpedima, kod prijenosnih uređaja za vezu, na avionima i helikopterima (za startanje motora) itd.

3.6.5. Srebro-kadmij (Ag-Cd) akumulator

Ovaj akumulator sličnih je svojstava kao Ag-Zn akumulator s tim da ima manju gustoću energije i radni napon, ali ima prednost u broju ciklusa punjenja - pražnjenja.



Slika 66. Naponske karakteristike različitih sekundarnih izvora - akumulatora

Karakteristike spomenutih vrsti akumulatora usporedno su prikazane na slici 66. i na tablici 7.

Tablica 7. Energetske karakteristike sekundarnih baterija za jednake struje pražnjenja

		Pb akumulator	Ni - Cd akumulator	srebro - kadmij	srebro - cink
1	Sadržaj energije Wh/kg	25 do 35	25 do 35	45 do 60	80 do 130
2	Nominalni napon ćelije V	2	1,3	1,1	1,5
3	Broj ciklusa punjenje-pražnjenje	200 - 500	500 - 2000	150 - 300	80 - 100
4	Temp. područje				
	skladištenje	-60 do 60	-40 do 45	-65 do 75	-65 do 75
	radno područje	-60 do 60	-30 do 60	-25 do 75	-30 do 75
5	Uskladištenje na temp. 20°C do 80% poč.kap.	8 mjeseci	2 tjedna do 1 mjeseca	3 mjeseca	3 mjeseca
6	Unutarnji otpor	nizak	nizak	vrlo nizak	vrlo nizak
7	Krivulja pražnjenja	padajuća	ravna	ravna	ravna
8	Relativna cijena	1	2	3	4

Kemijski izvori električne struje imaju važnu ulogu u suvremenoj tehnologiji. Novi elektronički i drugi uređaji sve više postaju ovisni o akumulatorima što potiče razvoj akumulatora. Neprestano se teži idealnoj bateriji: veći kapacitet, veća pouzdanost, veća životna dob, niska cijena, te da je u skladu s ekološkim zahtjevima.

Budući da živa i kadmij ne ispunjavaju ekološke zahtjeve, uskoro će sasvim isčeznuti iz upotrebe. Ovu prazninu će popuniti akumulatori s *metal-hidrid*, Ni-MH člancima.

Pozitivna elektroda se sastoji od nikalnih spojeva, negativna elektroda je metal-hidrid, a elektrolit je razrijeđena alkalna otopina.

Nominalni napon Ni-MH članka je 1.2 V, krajnji napon pražnjenja je 0.9V. Nominalna struja pražnjenja je ona koja će potrošiti kapacitet kroz pet sati (0.2 CA). Proizvodi se u cilindričnoj (do 2100 mAh) i prizmatičnoj formi (do 600 mAh). Cijena im je visoka.

4. MAGNETIZAM

Već su stari Grci znali da željezna ruda magnetit (Fe_3O_4) privlači predmete od željeza. Ta je pojava nazvana magnetizam, vjerojatno po nazivu pokrajine (Magnezija) gdje je ta ruda vađena.

Znamo da je u Evropi vjerojatno tek u 12. stoljeću umjetni magnet korišten kao kompas. Ako se izradi izduženi magnet malih dimenzija, dobije se tzv. magnetska igla. Kasnije je dogovoreno da se onaj kraj magnetne igle (magneta) koji se usmjerava prema sjevernom polu Zemlje nazove sjeverni pol, a onaj suprotni južni pol.

Značajna godina u razvoju znanosti o magnetizmu je 1600. godina. Tada Gilbert upozorava na činjenicu da se istoimeni polovi magneta odbijaju, a raznoimeni privlače. Gilbert je pogrešno zaključio da, iako su naoko slične, električne i magnetske pojave nisu povezane. Coulomb je 1785. godine objelodanio relacije koje kvantificiraju uzajamna mehanička djelovanja električnih opterećenja i uzajamna mehanička djelovanja magnetskih masa polova magneta i zapazio bitnu razliku magnetskih masa i električnih opterećenja: sasvim je jednostavno eksperimentom razdvojiti pozitivni od negativnog naboja elektriciteta, ali nema eksperimenta kojim se može odvojiti sjeverni od južnog magnetskog pola. Jednostavno, ne postoji izoliran samo jedan pol.

Prava priroda magnetizma otkrivena je početkom 19. stoljeća. Taj period je poznat po nizu blistavih otkrića kojima je utvrđena najtješnja veza električnih i magnetskih pojava.

Oersted je 1819. godine otkrio mehaničko djelovanje električne struje na magnetsku iglu. Ampère je 1820. godine pokazao da je zavojnica kojom teče struja, po svojim osobinama i djelovanju, slična prirodnom magnetu. Pri tom je izrazio misao da su kod stalnog magneta električne struje koje teku po određenim električnim krugovima u magnetu glavni uzrok njegovih magnetskih osobina.

U svim navedenim eksperimentima utvrđeno je da je kretanje elektriciteta uvijek praćeno magnetskim pojavama.

1831. godine Faraday je otkrio pojavu elektromagnetske indukcije. To je pojava da se u vodiču, koji se kreće u odnosu na magnet ili prema drugom strujnom krugu, javlja elektromotorna sila. Ovim je otkrićem dokazano da električne pojave mogu nastupiti kao posljedica procesa iz oblasti magnetskih pojava.

1833. godine Lenz je otkrio pravilo za određivanje smjera inducirane struje. To pravilo izražava osnovni princip elektrodinamike - princip elektromagnetske tromosti.

Između vodiča kojima teku električne struje nastaje uzajamno djelovanje kao posljedica naročitog fizikalnog procesa u prostoru oko tih vodiča. Prostor u kojemu se odigrava taj proces ima svojstva magnetskog polja. Magnetsko polje može se ustanoviti po nizu njegovih manifestacija, npr. po mehaničkim silama koje djeluju na polove pokusnog magneta ili po induciranim naponima u pokusnim električnim krugovima unesenim u taj prostor.

Prostor u kojem postoje istovremeno i električno i magnetsko polje, dva međusobno povezana polja kao manifestacija jedinstvenog elektromagnetskog procesa zove se elektromagnetsko polje.

Otac teorije elektromagnetskih polja je J.M.Maxwell djelom "Traktat o elektricitetu i magnetizmu" iz 1873. godine. U tom se djelu matematički izražavaju i dalje produbljuju Faradayeve ideje.

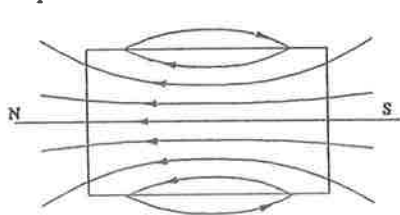
Eksperimentima vezanim za nastajanje i širenje elektromagnetskih valova Hertz je potvrdio i dalje razvio Maxwellovu teoriju. Slično se može reći i za radove Nikole Tesle, tvorca radiotehnike.

Zanemarit ćemo ovdje električnu komponentu elektromagnetskog polja i razmotriti samo magnetsko polje kao što smo posebno razmatrali električno polje.

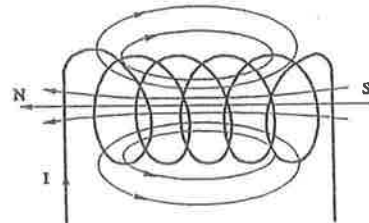
4.1. Magnetsko polje

4.1.1. Magnetski tok

Magnetičnost prirodnog magneta (slika 67) ili elektromagneta (slika 68) dogovorno se predstavlja kao skup središnjih magnetskih silnica, kao linije bez početka i svršetka, zatvorene samo u sebe.



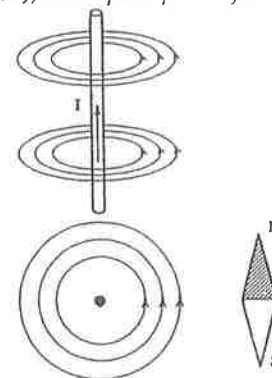
Slika 67. Prirodni magnet



Slika 68. Elektromagnet

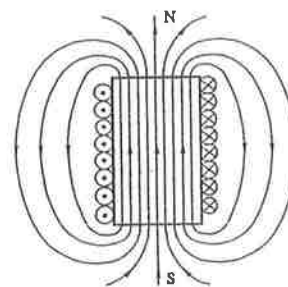
Promatrajmo jedan vodič kojim protječe struja. Ako se takvom vodiču primakne magnetska igla, ona će se postaviti uvijek u smjeru strelice na slici 69. Ovdje su magnetske silnice koncentrične kružnice određenog usmjerenja.

Smjer magnetskog polja određuje se desnom rukom: *Ako se palac usmjeri kao i struja (točkom se predstavlja smjer struje iz papira, a križićem smjer k papiru), ostali prsti pokazuju smjer polja.*

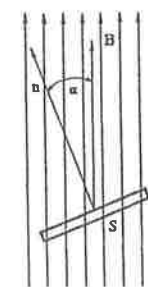


Slika 69. Magnetska igla određuje smjer magnetskog polja oko vodiča kojim protječe struja

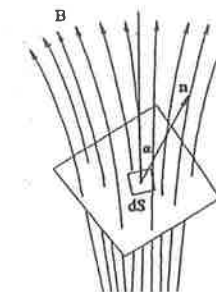
Ako se dva ili više vodiča nalaze jedan pored drugog, s istim smjerom struje, magnetske silnice će obuhvatiti oba vodiča. Ako se pak od vodiča izradi zavojnica (slika 68), dobit će se elektromagnet kojega je ponašanje identično stalnom magnetu. Magnetska igla unutar zavojnice pokazat će smjer silnica svake zatvorene linije (slika 70).



Slika 70. Magnetski tok zavojnice



Slika 71. Magnetski tok kroz površinu čija normala ne stoji u smjeru gustoće toka



Slika 72. Magnetski tok nehomogenog polja

Skup linija kroz neku plohu površine S naziva se *magnetski tok* (ili samo tok) kroz tu plohu i označava se grčkim slovom Φ . Skup svih silnica kroz poprečni presjek magneta je ukupni tok magneta.

4.1.2. Magnetska indukcija

Slijedeća značajna veličina prilikom promatranja manifestacija magnetskih djelovanja je gustoća tih silnica, odnosno *gustoća magnetskog toka* koja se označava slovom B:

$$B = \frac{\Phi}{S} \quad \text{ili} \quad \Phi = BS. \quad (98)$$

Kod elektromagneta ili prirodnog magneta najveća je gustoća toka unutar magneta. Izvan tog prostora, radi razilaženja silnica, gustoća toka je manja i različita. Gustoća toka, koja se još naziva i *magnetska indukcija*, ima vektorski karakter.

Ako silnice nisu okomite na promatranu površinu S (slika 71), a gustoća toka je homogena, tok kroz tu površinu će se izračunati iz jednadžbe:

$$\Phi = BS \cos \alpha,$$

ili općenito kao skalarni umnožak vektora \vec{B} i vektora \vec{S} :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}. \quad (99)$$

U nehomogenim poljima (slika 72) treba računati tok s pomoću relacije:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (100)$$

4.1.3. Jedinice magnetskog toka i indukcije

U pravilu, jedinice se određuju iz djelovanja promatrane pojave. Jedinice za tok i indukciju ćemo izvesti iz principa elektromagnetske indukcije. Za sada ćemo navesti da je inducirani napon prema principu elektromagnetske indukcije brojčano jednak:

$$e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Budući da znamo jedinice za napon (volt) i vrijeme (sekunda), izlazi da je jedinica za tok Φ :

$$[\Phi] = [e][t] \quad Vs \quad (\text{volt-sekunda}).$$

Dakle, u internacionalnom sustavu jedinica tok Φ se mjeri voltsekundom. U počast fizičaru Weberu volt-sekunda se naziva veber i označava se slovima Wb.

Iz toga slijedi jedinica magnetske indukcije:

$$[B] \quad \frac{Wb}{m^2} = \frac{Vs}{m^2}.$$

U počast Tesli ova jedinica zove se tesla i označava se slovom T:

$$\frac{Vs}{m^2} = \frac{Wb}{m^2} = T.$$

4.2. Zakon elektromagnetske indukcije

Faraday je eksperimentalno utvrdio da će poprečnim presjekom zatvorene vodljive petlje (slika 73), unutar koje se za vrijeme dt promijeni magnetski tok za iznos $d\Phi$, proći količina elektriciteta:

$$dq = - \frac{d\Phi}{R}, \quad \text{odnosno} \quad idt = - \frac{d\Phi}{R},$$

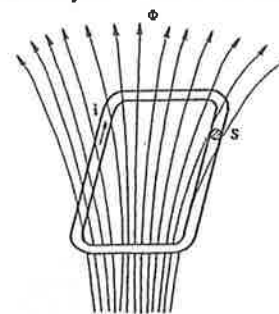
iz čega izlazi:

$$iR = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (101)$$

gdje je R električni otpor cijele petlje. Iznos iR je pad napona unutar petlje i prema II. Kirchhoffovu zakonu on drži ravnotežu induciranom naponu koji je jednak desnoj strani jednadžbe, te se može napisati:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (102)$$

Izlazi da je inducirani napon u jednoj petlji izravno jednak brzini promjene toka (Faradayev zakon elektromagnetske indukcije).



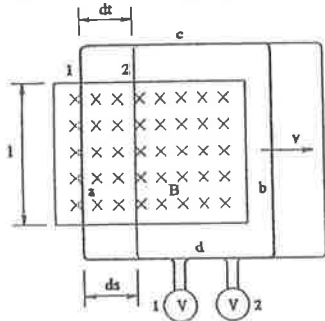
Slika 73. Induciranje struje u petlji koja obuhvaća promjenljivi tok

Predznak minus kazuje da će inducirana struja u promatranoj petlji imati takav smjer da od nje stvoreni magnetski tok nadoknadi promjenu toka u petlji i tako poništi uzrok svog nastanka (Lenzov zakon).

Ako se silnice promatranog toka obuhvaćaju sa N zavoja, uvodi se pojam ulančenog toka koji se označava grčkim slovom Ψ . Tada zakon indukcije treba pisati kao:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (103)$$

Za induciranje napona neophodna je promjena toka. Međutim, ovaj zakon se može prikazati i drugačije:



Slika 74. Induciranje napona u vodiču koji dužinom l siječe silnice indukcije B brzinom v

Petlja a b c d (slika 74), koja se giba brzinom v okomito na silnice toka, u trenutku kada se nalazi u položaju 1 obuhvaća tok iznosa $\phi_1 = BS_1$. Ako se za vrijeme dt izvede pomak ds iz položaja 1 u položaj 2, u novom položaju tok će iznositi $\phi_2 = BS_2$. Razlika toka u položajima 1 i 2 $\phi_1 - \phi_2$ iznosi:

$$d\phi = Blds,$$

Budući da je promjena toka nastala kroz vrijeme dt , tada zakon indukcije možemo napisati (ne vodeći računa o predznaku) ovako:

$$e = \frac{Blds}{dt},$$

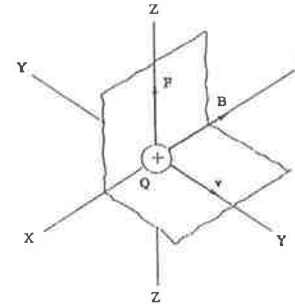
a kako je $ds/dt = v$ brzina pomicanja petlje, slijedi:

$$e = Blv \quad (104)$$

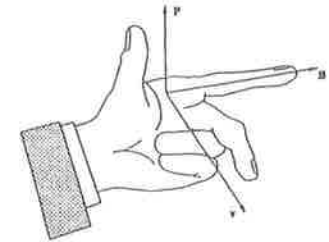
Taj je oblik zanimljiv u izučavanju rotacijskih električnih strojeva. Prema ovome, za pojavu napona dovoljno je da vodič dužine l presjeka silnice indukcije B , brzinom v .

4.3. Djelovanje magnetskog polja na naboj u gibanju

Pretpostavimo da se u homogenom magnetskom polju indukcije B , čije su silnice okomite na ravninu Y-Z i paralelne s osi X (slika 75), giba pozitivni električni naboj (+Q) brzinom v okomitom na smjer polja B .



Slika 75. Međusobni položaji vektora sile indukcije i brzine, kada se naboj giba



Slika 76. Pravilo lijeve ruke za određivanje smjera vektora sa slike 75.

Utvrđeno je da na tu količinu naboja djeluje sila \vec{F} koje je smjer okomit na vektore \vec{B} i \vec{v} . Modul vektora ove sile je:

$$F = Q v B \quad (105)$$

Dakle, vektori \vec{F} , \vec{v} i \vec{B} međusobno su okomiti. Njihove smjerove se može odrediti pravilom lijeve ruke (slika 76): palac, kažiprst i srednji prst lijeve ruke postavljaju se tako da pokazuju međusobno okomite smjerove. Tada kažiprst pokazuje smjer vektora indukcije, srednji prst smjer vektora brzine, a palac smjer sile koja djeluje na promatrani naboj.

Ako se gibanje ne vrši okomito prema B , već pod nekim kutom φ , može se pisati:

$$F = Q v B \sin \varphi \quad (106)$$

Vektorski oblik te jednadžbe glasi:

$$\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B} \quad (107)$$

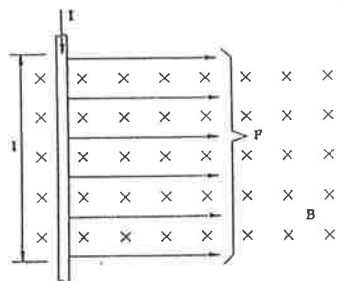
Ako se iz te jednadžbe odredi magnetska indukcija B , dobit će se jedinica za B :

$$[B] = \frac{N}{Am}$$

U internacionalnom sustavu jedinica njutn po amper-metru odgovara veberu po metru kvadratnom, odnosno tesli.

4.4. Djelovanje magnetskog polja na vodič kroz koji protječe struja

Ako se vodič kroz koji protječe struja nalazi u magnetskom polju indukcije B , na naboje koji se usmjerenom kreću unutar vodiča djeluje magnetska sila. Te se sile prenose na materijal vodiča koji kao cjelina trpi silu ili moment sile. Tu se nazire princip rada istosmjernog elektromotora.



Slika 77. Pojava mehaničke sile na vodiču u magnetskom polju, kroz koji protječe struja

Promatramo vodič (slika 77) poprečnog presjeka S , koji se dužinom l nalazi u polju indukcije B i kojim protječe struja I . Neka je vodič postavljen okomito na silnice B . Sila koja djeluje na vodič kao cjelinu rezultanta je sila koje djeluju na slobodne elektrone u kretanju unutar vodiča.

Prisjetimo se: volumen vodiča sadrži naboj $Q = neSl$ elektrona. Ako se ovo zamijeni u (105), dobije se:

$$F = neSlvB.$$

U gornji izraz, na osnovu (43), uvedimo struju pa će se dobiti izraz za rezultatnu silu koja djeluje na vodič:

$$F = I l B \quad (108)$$

Vodič prema vektoru \vec{B} može, općenito, zatvarati kut φ , pa silu treba računati iz:

$$F = I B l \sin\varphi \quad (109)$$

Za vodič koji nije ravan vrijedi:

$$dF = I B dl \sin\varphi, \quad (110)$$

ili vektorski

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (111)$$

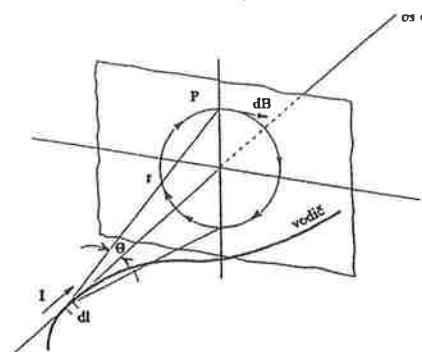
Vektor $d\vec{l}$ ima smjer struje, a vektor sile $d\vec{F}$ slijedi iz vektorskog umnoška. Iz navedenih izraza izlazi jedinica za silu:

$$[F] \frac{VA \cdot s}{m} = N$$

koja se po Newtonu, znamo, naziva njutn i označava slovom N .

4.5. Biot - Savartov zakon

Biot-Savartov zakon određuje iznos indukcije B u prostoru oko vodiča kroz koji protječe električna struja. Zamislimo vodič duljine l i izdvojimo element duljine, dl . Neka vodičem protječe struja konstantnog iznosa I . Ta struja u svakoj točki prostora stvara indukciju B koje smjer (slika 78) znamo odrediti od ranije.



Slika 78. Izračunavanje gustoće toka oko vodiča kroz koji protječe struja

Indukcija dB u točki P uslijed struje I u elementu dl određuje se po izrazu:

$$dB = k' \frac{I dl \sin\theta}{r^2}, \quad (112)$$

gdje je:

r - udaljenost elementa dl od točke P ,
 θ - kut između r i osi elementa vodiča dl .

Faktor k' predstavlja konstantu proporcionalnosti čija vrijednost, kao i konstanta k u Coulombovom zakonu, ovisi o izboru jedinica. U SI $k' = 10^{-7}$ vebera po amper metru. Da bi se odstranio faktor 4π iz drugih jednadžbi izvedenih iz Biot-Savartovog zakona, uvedena je nova konstanta proporcionalnosti μ_0 (indeks 0 označava da konstanta vrijedi za vakuum i zrak) kao:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = k' \quad \text{ili} \quad \mu_0 = 4\pi k',$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Wb}{Am}. \quad (113)$$

Sada Biot-Savartov zakon glasi:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2} . \quad (114)$$

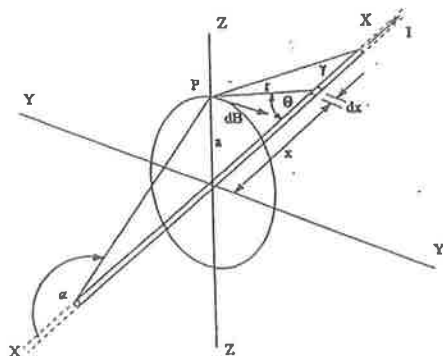
Rezultirajuća indukcija u promatranoj točki P, koja potječe od cjelokupnog strujnog kruga, iznosi:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \theta}{r^2} . \quad (115)$$

Ovdje se očito radi o vektorskom zbroju diferencijalnih vektora $d\vec{B}$ koje stvaraju struje svih elemenata $d\vec{l}$ promatranog strujnog kruga.

4.6. Polje ravnog vodiča

Vratimo se na sliku 78, ali zamislimo ravni vodič vrlo velike duljine l (slika 79). Struje svih elemenata dl proizvodit će u točki P indukcije istog smjera. Na taj način ukupna indukcija u točki P dobit će se aritmetičkom sumom diferencijalnih indukcija uslijed struja u svim elementima dl . Da bi se pojednostavnio integral, kao nezavisnu varijablu uzet ćemo θ , a ne l . Budući da je vodič postavljen u os X, pisat ćemo x umjesto l .



Slika 79. Određivanje polja ravnog vodiča

Prema slici 79. može se pisati:

$$x = a \operatorname{ctg} \theta ,$$

$$dx = - \frac{a d\theta}{\sin^2 \theta} ,$$

$$r^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \theta} ,$$

$$B = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \int \sin \theta d\theta ,$$

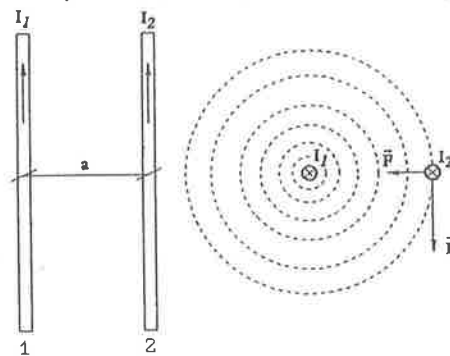
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \gamma - \cos \alpha) . \quad (116)$$

Ako je vodič vrlo dug, $\alpha \approx 180^\circ$, $\gamma = 0$, tada za indukciju vrijedi izraz:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} [T] . \quad (117)$$

4.7. Sila između dva paralelna vodiča kroz koje protječe struja

Kroz dva paralelna i vrlo dugačka vodiča 1 i 2, međusobnog razmaka a , teku struje I_1 i I_2 (slika 80). Očito se svaki od vodiča nalazi u magnetskom



Slika 80. Sila između dva paralelna vodiča kroz koje protječe struja

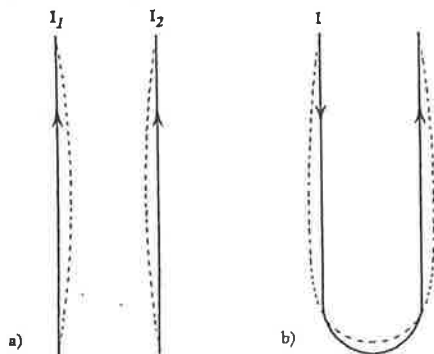
polju koje stvara struja onog drugog vodiča. Već je pokazano da će vodič 1 u svakoj točki drugog vodiča stvoriti indukciju:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} .$$

Zbog toga će na drugi vodič, prema (108), po jedinici duljine djelovati sila (smjer prema slici 80):

$$F' = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a} \quad (118)$$

Ako su smjerovi struja isti, sila među vodičima privlačna je, a ako se pak promijeni samo jedan smjer struje, sila će biti odbojna (slika 81).



Slika 81. Smjerovi sila između dva vodiča a) ako su struje istog smjera, sila je privlačna b) ako su struje suprotnog smjera, sila je odbojna

4.7.1. Utvrđivanje iznosa struje jakosti 1A

Na osnovu sile kojom se privlače dva paralelna vodiča kroz koje protječe struja (118) određuje se struja koja ima jakost 1A. Naime, ako na dva vrlo tanka i vrlo dugačka vodiča, međusobno razmaknuta 1 metar, djeluje sila $F=2 \times 10^{-7} \text{N}$ po jednom dužnom metru, kroz vodiče teče struja jakosti 1 Amper:

$$F = 4\pi \cdot \frac{10^{-7}}{2\pi} \frac{1 \cdot 1}{1} = 2 \cdot 10^{-7}$$

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \frac{VA \cdot s}{m} \quad \text{ili} \quad N$$

4.8. Linijski integral magnetske indukcije. Zakon protjecanja

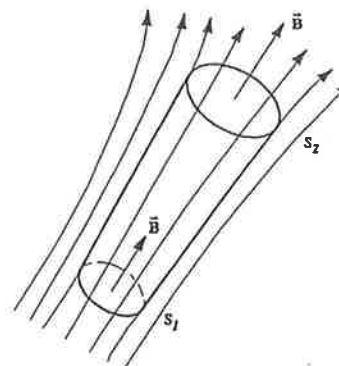
Magnetičnost prirodnih magneta objašnjava se postojanjem elementarnih struja u magnetu. Te se struje zamišljaju kao kretanje elektrona po ljuskama u atomima i kao okretanje elektrona oko svoje osi (spin elektrona). Nadalje, znamo da električna struja, prolazeći vodičem, stvara magnetsko polje koje je uvijek vezano za električnu struju. Nije moguće imati električnu struju, a da se ne javi i magnetsko polje. Električna struja i magnetsko polje dvije su manifestacije iste pojave. Sada nas zanima povezanost jakosti struje i magnetskog toka koji stvara ta struja.

Ako se promatra prirodni magnet ili elektromagnet svaka silnica magnetskog polja u magnetu i izvan njega, cijelom svojom dužinom čini neprekinutu zatvorenu liniju.

Neprekinutost magnetskih linija izražava se relacijom:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (119)$$

što znači da je ukupni magnetski tok koji prolazi zatvorenom površinom u pravcu i smjeru normale jednak nuli (slika 82). Nijedna linija se ne može završiti niti započeti u prostoru ograničenom ovom površinom.

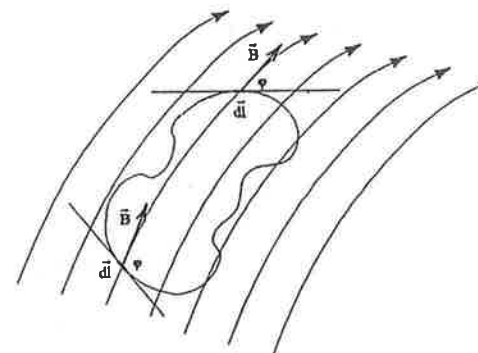


Slika 82. Magnetni tok koji prolazi zatvorenom površinom u pravcu i smjeru normale jednak je nuli

Izraz (119) može se napisati u obliku:

$$\oint_S B \cos \alpha \, dS = 0,$$

gdje je α kut između vektora indukcije i normale na površinu u točki indukcije.

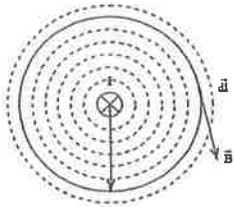


Slika 83. Uz linijski integral magnetske indukcije uzduž zatvorene linije.

U elektrotehnici je posebno važan linijski integral indukcije uzduž zatvorene linije (slika 83):

$$\oint B \cos \varphi dl ,$$

gdje je φ kut između nekog elementa $d\vec{l}$ i vektora \vec{B} u pripadajućoj točki. Kao pozitivan smjer obilaska zatvorene konture uzima se smjer kazaljke na satu. Promatrajmo kao poseban slučaj polje ravnog vodiča (slika 84) iz kojega će se izvesti opći zaključak.



Slika 84. Polje ravnog vodiča

Na osnovu (117) izlazi da je vrijednost indukcije B u svakoj točki odabrane kružnice polumjera r :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} .$$

Za promatrani slučaj $\varphi=0$, pa izlazi:

$$\oint B \cos \varphi dl = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl = \mu_0 I .$$

Iz toga se može izvesti opći zaključak: *Linijski integral magnetske indukcije uzduž proizvoljno odabrane zatvorene linije jednak je umnošku μ_0 i struje kroz površinu koju zatvara promatrana kontura.* Ako kroz tu površinu nema struje, integral je jednak nuli. Općenito, dakle, vrijedi:

$$\oint B \cos \varphi dl = \mu_0 I , \quad (120)$$

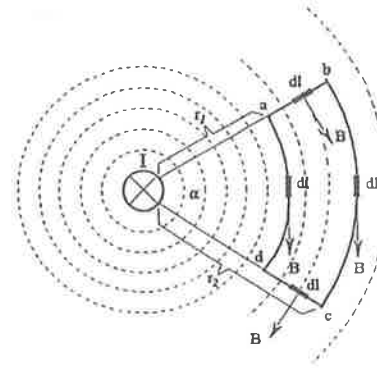
ili vektorski:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I , \quad (121)$$

gdje je I ukupna struja koja je obuhvaćena zatvorenim linijom.

Izraz (121) naziva se *Amperov zakon* ili *zakon protjecanja*. Ovdje je prikazan u obliku koji vrijedi za vakuum ili zrak, gdje je $\mu = \mu_0$. Kasnije ćemo vidjeti da ovaj zakon ima univerzalni karakter tj. vrijedi za svaku sredinu.

Promatrajmo sada proizvoljnu konturu na istom primjeru, ali koja ne obuhvaća struju (slika 85).



Slika 85. Linijski integral konture koja ne obuhvaća struju

Stranice ab i cd ne doprinose integralu jer je kut $\varphi=90^\circ$, odnosno $\cos \varphi=0$. Razmotrimo sada preostale dvije stranice. Za duljine elemenata vrijedi:

$$dl = r_1 d\alpha \quad i \quad dl = r_2 d\alpha .$$

Doprinos stranice da (prema smjeru obilaženja) iznosi:

$$- \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} r_1 d\alpha = - \frac{\mu_0}{2\pi} I \alpha ,$$

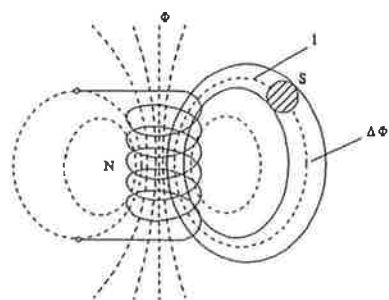
a doprinos stranice bc :

$$\int \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} r_2 d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} I \alpha .$$

Zbroj ovih dvaju doprinosa jednak je nuli. Dakle, linijski integral po cijeloj konturi $abcd$ također je jednak nuli, što je u skladu sa (121) jer je $I=0$.

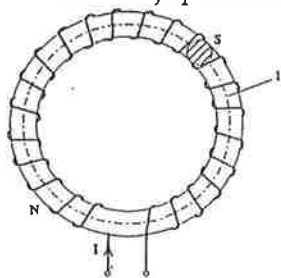
4.9. Magnetski krug

Od veličina koje karakteriziraju magnetsko polje, do sada smo upoznali magnetski tok Φ i magnetsku indukciju B . Pri tome smo vidjeli da se silnice indukcije B zatvaraju same u sebe (slika 70). Zamislimo jedan izdvojeni dio silnice s tokom $\Delta\Phi$ u obliku cijevi, tzv. *silocijev*. Ta cijev (slika 86), koja ima srednju liniju duljine l i promjenljivi presjek S , za promatrani tok $\Delta\Phi$ predstavlja magnetski krug. Lako zaključujemo da iznos ukupnog toka Φ , kao i iznos $\Delta\Phi$, zavisi o iznosu struje i broju zavoja N . Ali zavisi i o duljini silnice l , presjeku promatrane cijevi S i sredini, odnosno vrsti materije u kojoj se ostvaruje magnetsko polje. Na promatranom primjeru teško je postaviti odnose među tim veličinama, pa ćemo se poslužiti najjednostavnijim primjerom magnetskog kruga, torusom (slika 87) koji osigurava homogenu gustoću toka. Presjek S je konstantan uzduž cijele



Slika 86. Dio magnetskog kruga zavojnice kojom protječe struja

srednje duljine l magnetskog kruga. Na torusu je gusto, jedan do drugog, namotano N zavoja pri čemu je duljina srednje linije l znatno veća od



Slika 87. Magnetski krug u obliku torusa

dijametra poprečnog presjeka S . Za indukciju u torusu, na osnovi (121) vrijedi:

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}$$

Budući da je unutar torusa polje homogeno a presjek S konstantan, smije se pomnožiti gornji izraz sa S :

$$BS = \mu_0 \frac{INS}{l}$$

što daje izraz kojim se računa tok u zadanom magnetskom krugu:

$$\Phi = \frac{INS}{l} \mu_0 \quad (122)$$

U opisanom primjeru torus je bio ispunjen zrakom zbog čega se u izrazu za magnetski tok nalazi μ_0 . Međutim, izraz (122) vrijedi za bilo koju sredinu unutar torusa, što se izražava različitim faktorom proporcionalnosti (općenito μ). Sredina, materijal, koji ima veće μ , uz istu struju i broj zavoja, imat će veći magnetski tok. Stoga se μ naziva *magnetska propusljivost* ili *magnetska permeabilnost*.

Iz jednadžbe za Φ dobiva se jedinica za mjerenje permeabilnosti:

$$[\mu] \frac{Vs}{Am}$$

Da bi se magnetski krug mogao promatrati analogno strujnom krugu, jednadžbu (122) koja, dakle, vrijedi za bilo koju sredinu, napisat ćemo nešto drugačije:

$$\Phi = \frac{IN}{\frac{l}{\mu S}}$$

Nazivnik ove jednadžbe podsjeća na izraz za otpor metalnog vodiča. Analogno, dakle, možemo ga nazvati otporom magnetskog kruga ili jednostavno *magnetskim otporom*:

$$R_m = \frac{l}{\mu S} \quad (123)$$

gdje je: l - duljina srednje linije magnetskog kruga
 S - poprečni presjek torusa.

Sada se može napisati:

$$\Phi = \frac{IN}{R_m} \quad (124)$$

Sličnost (123) s izrazom za električni otpor vodiča (50) očita je, ali je priroda ovog otpora drugačija što se daje zaključiti uspoređenjem jedinica. Za električni otpor znamo da je jedinica Ω , a za magnetski otpor iz (124) nalazimo:

$$[R_m] \frac{A}{Vs} = \frac{1}{\Omega S}$$

Umnožak struje i broja zavoja $\theta=IN$ je *magnetomotorna sila MMS*, koja se često naziva broj *amperzavoja* ili *protjecanje svitka*, i za jedinicu ima amper. Tu treba skrenuti pažnju da se određeni amperzavoji, npr. 100 A, mogu postići strujom 1 A, ako svitak ima 100 zavoja, ili samo jednim zavojem ali strujom od 100 A.

Pogledajmo ponovno izraz za tok (122), ali za bilo koju sredinu. Diobom obje strane jednadžbe sa S dobije se:

$$B = \mu \frac{IN}{l} \quad (125)$$

Veličina IN/l koja je mjerodavna za postojanje magnetske indukcije u određenoj sredini, predstavlja magnetsku uzbuđuju, naziva se *jakost*

magnetskog polja i označava se slovom H:

$$H = \frac{IN}{l} \quad (126)$$

Jedinica za mjerenje jakosti polja je amper po metru (A/m).

B i H imaju vektorski karakter, pa vrijedi:

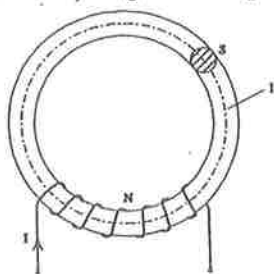
$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (127)$$

Sada se Amperov zakon ili zakon protjecanja (121) može napisati kao:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \Sigma I$$

Kod torusa magnetski je tok jednak u svim poprečnim presjecima. Zbog toga što je iznos poprečnog presjeka konstantan, konstantna je i indukcija B. Za stvaranje te indukcije potrebna je uzbuda, magnetsko polje jakosti $H=IN/l$. Pri tome, nije bitno što su zavoji kontinuirano raspoređeni. Ako je μ vrlo veliko, oni mogu biti koncentrirani na jednom mjestu (slika 88), a da i dalje vrijedi (122) i (127).

Ukupni iznos MMS ili amperzavoja $\theta=IN$ "troši" se na stvaranje toka u cijelom torusu. Torus može biti izrađen od segmenata različitih presjeka i duljine pa i od različitog materijala što znači od elemenata različitog magnetskog otpora. U izrazu za tok takvog torusa, [vidi (124)], magnetski je otpor zbroj magnetskih otpora svih segmenata od kojih je izrađen torus.



Slika 88. Magnetski krug u obliku torusa koji je samo dijelom namotan zavojima

Zamislimo kao primjer da se torus konstantnog presjeka sastoji od dva dijela - jedan je zrak, duljine l_0 , kod kojega je, znamo, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, a drugi neka bude željezo kod kojega je permeabilnost vrlo velika, pa ćemo radi praktičnosti staviti da $\mu \rightarrow \infty$. Kada je $l_0 \ll l_{Fe}$ uzduž cijelog torusa postoji jedinstveni magnetski tok a na onom dijelu gdje $\mu \rightarrow \infty$, nema magnetskog otpora [vidi (123)]. Tu, dakle, nisu potrebni amperzavoji, nije potrebna magnetska uzbuda da bi se uspostavio tok. Na toj duljini, u torusu, jakost magnetskog polja je nula. Općenito, tamo gdje μ teži prema beskonačnom iznosu, jakost polja teži prema nuli, pri čemu indukcija ima konačan iznos.

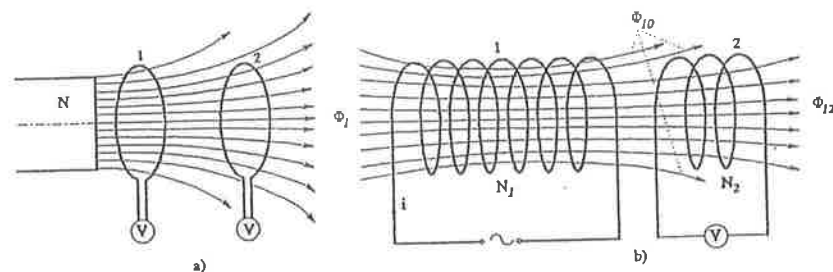
Vidimo da se amperzavoji "troše" na svladavanje magnetskog otpora cijelog magnetskog kruga, s tim da je tamo, gdje je magnetski otpor veći, potreban veći broj amperzavoja. Dio amperzavoja potrebnih da se svlada magnetski otpor dijela magnetskog kruga naziva se *magnetski napon*. Nameće se analogija sa strujnim krugom. Uzduž magnetskog kruga raspodjeljuje se magnetski napon ili amperzavoji.

4.10. Samoindukcija

Prilikom objašnjenja zakona elektromagnetske indukcije (103) saznali smo da je neophodna promjena magnetskog toka unutar promatrane petlje, da bi se u njoj inducirao napon i da je taj napon jednak brzini promjene toka:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt}$$

Očito, ovaj zakon vrijedi i kada se petlja pomakne iz položaja 1 u položaj 2, za vrijeme Δt , uzduž polja kojeg se iznos ne mijenja vremenski nego prostorno (slika 89a). Pri tome će petlja u položaju 2 obuhvaćati manji iznos



Slika 89. a) Induciranje napona promjenom obuhvaćenog toka pomakom petlje u mirnom polju, b) Induciranje napona u zavojnici u kojoj se tok mijenja uslijed promjene struje u toj zavojnici

toka od onoga koji obuhvati u položaju 1. Nije bitno kako se postiže razlika obuhvaćenog toka. To može nastati i na taj način da postoje dvije zavojnice (slika 89b) postavljene tako da im se osi poklapaju. Ako se jedna priključi na izvor promjenljive struje, u ritmu struje varirat će i tok koji stvara zavojnica 1. Jedan dio tog toka obuhvatit će i drugu zavojnicu. Budući da je tok promjenljiv, u drugoj zavojnici će se inducirati napon. To je ustanovljeno zakonom indukcije. A što se događa u svitku 1? Unutar tog svitka nastaje tok koji se vremenski mijenja i time je ispunjen uvjet da se i u tom svitku inducira napon u skladu sa zakonom indukcije. Taj napon nastaje uslijed promjene toka koji izazove struja u samom tom svitku. Zbog

toga se taj napon naziva naponom *samoindukcije*.

Za tok vrijedi $\Phi = iN/R_m$, pa je diferencijal toka:

$$d\Phi = di \frac{N}{R_m}.$$

Ako se ovo uvrsti u (103), izlazi:

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N^2}{R_m} \frac{di}{dt}.$$

Nadalje, napišimo:

$$L = \frac{N^2}{R_m}, \quad (128)$$

pa će se dobiti izraz za napon samoindukcije:

$$e = -L \frac{di}{dt}. \quad (129)$$

Na ovaj način napon samoindukcije prikazuje se kao izravna posljedica promjenljivosti struje svitka. Njegov iznos razmjernan je brzini promjene struje i koeficijentu L , kojega vrijednost zavisi o konstrukciji, geometrijskim dimenzijama svitka i sredstvu magnetskog kruga.

Koeficijent L se naziva *koeficijent samoindukcije* ili *samoinduktivitet* (ili kraće *induktivitet*) svitka.

Jedinica za mjerenje induktiviteta u počast fizičaru Henryu naziva se herui i označava slovom H :

$$[L] = \left[\frac{e \, dt}{di} \right] = \frac{Vs}{A} = H,$$

$$\frac{Vs}{A} = \Omega s = H.$$

Svitak ima induktivitet $1H$ ako se pri linearnoj promjeni jakosti struje za iznos jednog ampera tokom jedne sekunde inducira u svitku napon od jednog volta.

Induktivitet L se može i drugačije izračunati. Ako se obje strane jednadžbe $N/R_m = \Phi/I$ pomnože s N , dobije se:

$$\frac{N^2}{R_m} = \frac{N\Phi}{I},$$

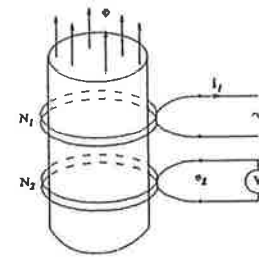
što na osnovu (103) i (128) daje:

$$L = \frac{\Psi}{I}. \quad (130)$$

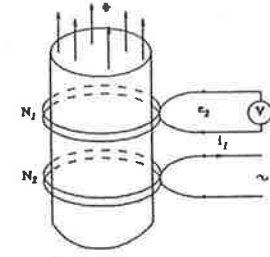
Prema toj jednadžbi, vlastiti induktivitet svitka je numerički jednak omjeru ulančenog toka i struje promatranog svitka.

4.11. Međusobna indukcija

Pod nazivom *međusobna indukcija* podrazumijeva se pojava da se zbog promjene jakosti struje u jednom svitku stvara napon u drugom svitku.



Slika 90. Induciranje napona u zavojnici 2 uslijed promjene struje u zavojnici 1



Slika 91. Induciranje napona u zavojnici 1 uslijed promjene struje u zavojnici 2

Ako su sve silnice koje stvara prvi svitak obuhvaćene i drugim svitkom (slika 90), napon koji se inducira u drugom svitku uslijed promjene toka iznosi:

$$e_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Budući da je tok koji obuhvaća oba svitka promjenljiv uslijed promjene struje u prvom svitku, vrijedi:

$$d\Phi = \frac{N_1}{R_m} di_1,$$

pa možemo pisati:

$$e_2 = -N_2 \frac{N_1}{R_m} \frac{di_1}{dt} = -\frac{N_1 N_2}{R_m} \frac{di_1}{dt}.$$

Izraz $N_1 N_2 / R_m$ naziva se *koeficijent međusobne indukcije* ili *međuinuktivitet* obaju svitaka i označava se s M_{12} :

$$M_{12} = \frac{N_1 N_2}{R_m}, \quad (131)$$

pa je najzad:

$$e_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt}. \quad (132)$$

Sada zamijenimo uloge svitaka. Neka promjenljiva struja u svitku 2 inducira napon u svitku 1 (slika 91). Tada vrijedi:

$$e_1 = -N_1 \frac{N_2}{R_m} \frac{di_2}{dt},$$

$$e_1 = -M_{21} \frac{di_2}{dt}. \quad (133)$$

Pokazuje se da su međuinduktiviteti u oba slučaja jednakog iznosa pa se može pisati:

$$M = M_{21} = M_{12} = \frac{N_1 N_2}{R_m}. \quad (134)$$

Umnožak vlastitih induktiviteta obaju svitaka daje kvadrat međuinduktiviteta:

$$L_1 L_2 = \frac{N_1^2 N_2^2}{R_m^2} = \left(\frac{N_1 N_2}{R_m} \right)^2 = M^2,$$

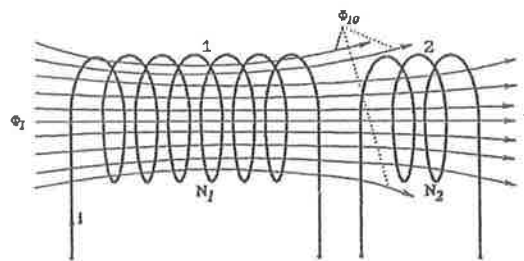
ili:

$$M = \sqrt{L_1 L_2}. \quad (135)$$

Jedinica za mjerenje međuinduktiviteta također je henri.

4.11.1. Rasipni magnetski tok

Sve silnice magnetskog polja koje uzbuđuje jedan svitak ili namot ne zatvaraju se kroz oba magnetski vezana svitka. Nastaje tzv. rasipanje magnetskog toka. Onaj dio toka koji se zatvara samo s jednim namotom i



Slika 92. Glavni i rasipni magnetski tok

to onim koji ga je stvorio naziva se *rasipni tok* (slika 92, Φ_{10}). Dio toka, koji se zatvara kroz oba namota, naziva se *glavni magnetski tok* (Φ_{12}). Njihov zbroj

daje *ukupni magnetski tok*:

$$\Phi_1 = \Phi_{10} + \Phi_{12}. \quad (136)$$

Smanjenjem dijela toka, koji je ulančen s oba namota, smanjuje se i međuinduktivitet što izlazi iz:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1}. \quad (137)$$

Zbog ovoga, relaciju između vlastitih induktiviteta i međuinduktiviteta možemo pisati ovako:

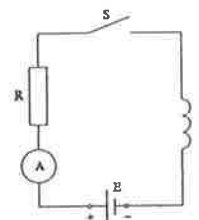
$$M = k \sqrt{L_1 L_2}, \quad (138)$$

gdje je k faktor ulančenja.

Ako nema rasipnog toka ($\Phi_{10}=0$), tada je $k=1$. Ako, pak, tok Φ_1 nije u cijelosti obuhvaćen s namotom 2, vrijedi $k < 1$.

4.12. Uspostavljanje struje u strujnom krugu s induktivitetom

Uspostavljanje struje, odnosno općenito promjena struje s jednog iznosa na drugi, naziva se prijelazna pojava. Uzmimo jednostavni strujni krug koji sadrži radni otpor R i induktivitet L (slika 93).



Slika 93. Strujni krug istosmjerne struje s induktivitetom i radnim otporom

Ako se uključi sklopka S , uslijed napona izvora E strujnim krugom će poteći struja i . Struja je označena malim slovom, jer se u toku prijelazne pojave mijenja iznos od 0 na E/R . Tada vrijedi naponska jednačba strujnog kruga:

$$E - iR - L \frac{di}{dt} = 0,$$

ili

$$E - L \frac{di}{dt} = iR.$$

Razlika narinutog napona i napona samoindukcije svitka jednaka je padu napona na radnom otporu. Ako podijelimo jednačbu s R , dobije se:

$$I - i = \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$$

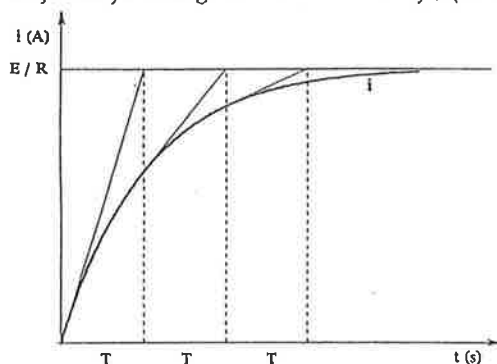
$L/R=T$ je vremenska konstanta strujnog kruga, pa se može pisati:

$$\frac{di}{I-i} = \frac{dt}{T}$$

Rješenje ove diferencijalne jednačbe daje jednačbu uspostavljanja struje u promatranom strujnom krugu:

$$i = I (1 - e^{-t/T}) . \quad (139)$$

Na slici 94. vidi se koliko se brzo uspostavlja struja za slučaj strujnog kruga prema slici 93. Već nakon 4-5 vremenskih konstanti može se smatrati da je struja dostigla stacionarno stanje, (vidi tablicu 2, poglavlje 1.9.).



Slika 94. Uspostavljanje struje u strujnom krugu s radnim otporom i induktivitetom

4.12.1. Energija strujnog kruga s induktivitetom

Pomnoži li se naponska jednačba za krug na slici 93. s idt , dobije se:

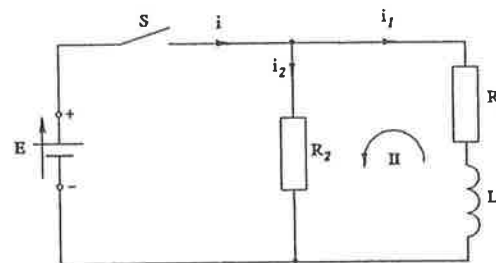
$$Eidt = i^2 R dt + Li di .$$

Ova jednačba pokazuje da se energija izvora u vremenskom razmaku dt jednim dijelom pretvara u toplinu u radnom otporu R , a drugim dijelom u energiju magnetskog polja. To znači, da magnetsko polje raspolaže energijom. O magnetskoj energiji kasnije će biti više riječi, a sada recimo samo to da se ovim manifestira zakon održanja energije.

4.13. Otvaranje sklopke u strujnom krugu s induktivitetom

Nakon što je uspostavljena trajna struja u promatranom strujnom krugu (slika 93), što će se desiti ako se sklopka S otvori? Može se očekivati da će

struja trenutno pasti na nulu. To, međutim, nije u skladu sa spoznajom da



Slika 95. Eliminiranje luka na kontaktima sklopke pri iskapčanju strujnog kruga s induktivitetom

se u induktivitetu struja ne može naglo promijeniti, jer bi to značilo i trenutnu promjenu magnetske energije, što je nemoguće. Prilikom otvaranja sklopke naglo se smanjuje struja, što ima za posljedicu inducirane napona samoindukcije u smjeru struje. Inducirani napon redovno je dovoljno velik da stvori električni luk između kontakata sklopke, što znači tok struje u promatranom strujnom krugu. Pri tome će se magnetska energija pretvoriti u toplinu koja se oslobađa lukom i manjim dijelom na radnom otporu R_1 .

Ako je nužno izbjeći električni luk između kontakata sklopke, uključuje se još jedan radni otpor, R_2 (slika 95).

U trenutku isklapanja sklopke, za petlju II vrijedi jednačba:

$$-L_1 \frac{di}{dt} = (R_1 + R_2) i_1 ,$$

iz čega slijedi:

$$\frac{di}{i_1} = - \frac{R_1 + R_2}{L_1} dt ,$$

ili:

$$\frac{di}{i_1} = - \frac{dt}{T} ,$$

gdje je:

$$T = \frac{L_1}{R_1 + R_2} ,$$

vremenska konstanta promatranog strujnog kruga.

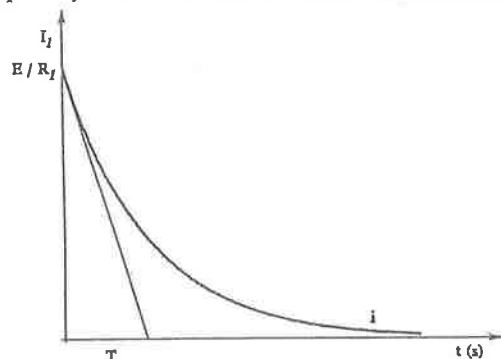
Rješenje gornje diferencijalne jednačbe je:

$$i_1 = I_1 e^{-\frac{t}{T}} , \quad (140)$$

gdje je I_1 struja u grani s induktivitetom prije iskapčanja sklopke (za $t=0$):

$$I_1 = \frac{E}{R_1}$$

Kao zaključak recimo da u strujnom krugu, koji sadrži induktivitet, struja ne može trenutno primiti stacionarni iznos E/R , niti može trenutno promijeniti iznos od neke stalne vrijednosti na nulu. Ovdje induktivitet L



Slika 96. Isčezavanje struje nakon iskapčanja sklopke u strujnom krugu na slici 95.

ima karakter inercije ili konzervativni karakter. Nastanak i iščezavanje struje prilikom uklapanja i isklapanja sklopke u strujnom krugu s induktivitetom u skladu su s uvedenom električnom vremenskom konstantom:

$$T = \frac{L}{R}$$

4.14. Magnetske osobine materije

Prilikom razmatranja magnetskog toka i njegove gustoće kao sredina uzet je vakuum ili zrak. Zamišljali smo da je magnetski krug "izrađen" od zraka. Pri tome je uvedena permeabilnost μ_0 koja karakterizira tu sredinu. Poznato nam je, međutim, da se magnetski krug električnih strojeva i drugih uređaja gradi od željeza ili nekih željeznih legura. Zašto? Za iznos inducirano napona i elektromagnetske sile mjerodavan je iznos indukcije B . Ako se magnetski krug izradi od tih materijala, očito je da će se s istom uzbuđom NI/l postići veća indukcija B .

U pogledu magnetskih svojstava razlikuju se paramagnetske, dijamagnetske i feromagnetske materije. Prisjetimo se poznatog pokusa. Ako se izduženi komadić željeza, obješen o težište tankom niti, unese u magnetsko polje jakog elektromagneta, njegova će se os postaviti u pravcu magnetskog polja. Pojava djelovanja magnetskog polja na željezo i željezne legure nije novost. Ali može biti novost da magnetsko polje djeluje na sve

materije. Istina, u praksi to je djelovanje beznačajno za sve materijale, osim za feromagnetske.

Ako se napravi sličan pokus za bilo koji nemagnetski materijal, neki materijali će se postaviti u pravcu polja, a neki, pak, poprečno na pravac polja. One materije koje se postavljaju u pravcu polja paramagnetske su, a one druge dijamagnetske. Također je zapaženo da će se, ako se u prostor magnetskog polja unese paramagnetska materija, povećati magnetski tok. Ako se, pak, u isto polje unese dijamagnetska materija, tok će postati manji.

Višak ili manjak toka prema onome koji potječe od magnetizirajuće struje nastaje uslijed magnetskih efekata elektrona te materije koji su dio strukture svih atoma. Opravdano se vjeruje da se elektroni okreću oko svojih matičnih jezgri i tako stvaraju magnetske efekte. Nadalje, svaki elektron se okreće oko svoje osi (spin elektrona). Smjer vrtnje jedne polovine broja elektrona suprotan je smjeru one druge polovine. Kod željeza, pak, postoje četiri elektrona više među onima koji se vrte u jednom smjeru i odatle potječu magnetske osobine željeza.

Sve materije, osim feromagnetskih, ispoljavaju magnetske efekte samo ako se nalaze u stranom magnetskom polju. To znači, da se u normalnom stanju međusobno poništava magnetsko djelovanje elektronskih struja. Tek strano magnetsko polje izmijeni orijentaciju elektronskih struja ili spina, a može se izmijeniti i brzina okretanja elektrona.

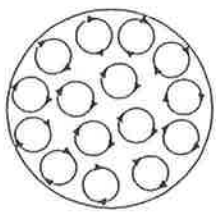
Smatra se da pojavu feromagnetizma uzrokuje magnetski moment spina, dakle rotacija elektrona oko vlastite osi. Nadalje, pokazalo se, da je feromagnetičnost materije vezana za kristaličnu strukturu materije i da ona nije svojstvo pojedinog atoma materije. U feromagnetskom materijalu cijele su skupine elementarnih struja jednako usmjerene, pa su time cijela područja spontano magnetizirana. Ta se područja nazivaju domeni i veoma su mala (10^{-1} do 10^{-5} cm³). Ako se feromagnetski materijal prema vani manifestira kao nemagnetski materijal, njegovi su domeni svojim osima potpuno slobodno orijentirani na sve strane u prostoru. Na taj se način magnetski momenti međusobno kompenziraju i ne stvaraju rezultantni magnetski moment.

4.14.1. Indukcija u svitku s materijom

Ako unutar svitka ima neka materija, indukcija u točki unutar svitka dobije se kao rezultanta struje u vodičima i ekvivalentnih površinskih struja (slika 97) magnetizirane materije:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I dl \sin \theta}{r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_e dl_e \sin \theta}{r^2}, \quad (141)$$

gdje indeks e označava ekvivalentne površinske struje.



Slika 97. Ekvivalentne površinske struje magnetizirane materije

U posebnom slučaju, npr. u torusu, gornja jednačba se svodi na oblik:

$$B = \mu_o \frac{NI}{l} + \mu_o \left(\frac{NI}{l} \right)_e \quad (142)$$

Koncentrirajmo se na posljednju jednačbu gdje je prvi član na desnoj strani indukcija koju stvara struja zavojnice, dok drugi član predstavlja indukciju koja potječe od ekvivalentnih površinskih struja materije koja je unešena u zavojnicu. Budući da se površinske struje javljaju kao posljedica struja u zavojima, može se i indukcija, koju uspostavljaju površinske struje, prikazati u zavisnosti o jakosti polja u promatranom namotu. Na taj će se način definirati jedna osobina materijala koja se naziva *magnetska susceptibilnost* i označava slovom χ . Ta veličina predstavlja odnos indukcije koja potječe od površinskih struja, prema jakosti polja H :

$$\chi = \mu_o \frac{(NI/l)_e}{H}, \quad (143)$$

gdje je:

$$H = \frac{NI}{l},$$

iz čega slijedi:

$$\mu_o (NI/l)_e = \chi H. \quad (144)$$

Uvrštenjem (144) u jednačbu (142), dobije se:

$$B = \mu_o H + \chi H,$$

$$B = (\mu_o + \chi) H. \quad (145)$$

Uvedimo sada

$$\mu = \mu_o + \chi, \quad (146)$$

pa se dobije jednostavni oblik:

$$B = \mu H. \quad (147)$$

Upravo je definirana apsolutna magnetska permeabilnost. Međutim, redovno se koristi relativna permeabilnost $\mu_r = \mu/\mu_o$ koja pokazuje koliko je puta permeabilnost neke materije veća od permeabilnosti vakuuma.

Tablica 8: Relativna permeabilnost za neke dijamagnetske i neke paramagnetske¹ materijale

Materijal	Pri temperaturi °C	μ_r
Aluminij	18	1,0000082
Bizmut	18	0,9999831
Ugljik (dijamant)	20	0,9999937
Ugljik (grafit)	20	0,9999554
Bakar	18	0,9999988
Olovo	18	1,0000015
Živa	18	0,9999976
Dušik	20	0,9999957
Kisik (tekući)	-219	1,0038754
Kisik (plin)	20	1,0013289
Srebro	18	0,9999974
Cink	18	0,9999980
Zrak	20	1,0000004

Iz tablice 8. vidljivo je da su kod para i dijamagnetskih materijala promjene magnetskog toka, koje potječu od površinskih struja, toliko male da je praktično relativna permeabilnost jednaka jedinici.

4.15. Feromagnetizam

Ako je tijelo torusa izrađeno od željeza ili nekih željeznih legura, treba naglasiti da:

- magnetska indukcija može biti stotinama i tisućama puta veća od indukcije koju bismo imali u vakuumu ili u zraku;
- za B i H ne vrijedi linearan odnos, tj. permeabilitet ($\mu=B/H$) nije konstanta;
- permeabilitet zavisi o prethodnim zbivanjima u željezu kao i o tome je li ranije bilo izloženo magnetskoj uzbuđi;
- magnetski tok može postojati u željezu i bez bilo kakvog vanjskog utjecaja; tada je riječ o permanentnom magnetu.

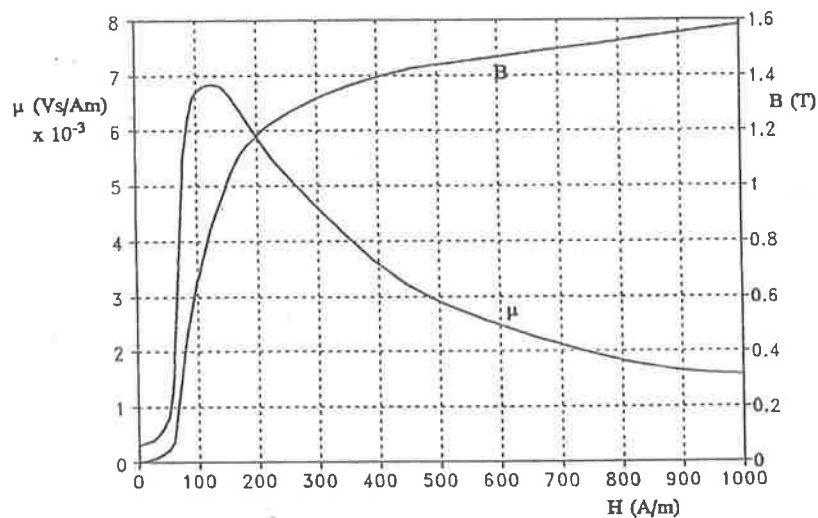
Sve materije, koje ispunjavaju gornje uvjete, nazivaju se feromagnetska tijela.

¹paramagnetski su oni materijali kod kojih je $\mu_r > 1$, a dijamagnetski su oni kod kojih je $\mu_r < 1$.

Od kemijskih elemenata jedino su željezo, nikel i kobalt feromagnetski elementi. Postoje i neke legure čije komponente nisu feromagnetske, ali ipak pokazuju ova svojstva.

Tablica 9. Krivulja magnetiziranja kaljenog željeza (preuzeto iz "Elektricity and magnetism" F.W.Sears-a, 1958)

Jakost mag. polja, H A/m	Gustoća toka, B T	Permeabilnost, $\mu=B/H$ Vs/Am $\times 10^{-7}$	Relativna permeabilnost μ_r 1	Magnetska suscepti- bilnost, χ , Vs/Am $\times 10^{-7}$
0	0	3100	250	3088
10	0.0042	4200	334	4188
20	0.010	5000	398	4988
40	0.028	7000	557	6988
50	0.043	8600	684	8588
60	0.095	16000	1273	16988
80	0.45	56000	4456	55988
100	0.67	67000	5332	66988
150	1.01	67330	5358	67318
200	1.18	59000	4695	58988
500	1.44	28800	2292	28788
1000	1.58	15800	1257	15788
10000	1.72	1720	137	1708
100000	2.26	226	18	214
800000	3.15	39	3.1	27



Slika 98. Krivulja magnetiziranja $B=f(H)$ i krivulja permabiliteta $\mu=f(H)$ za kaljeno željezo (Tablica 9.)

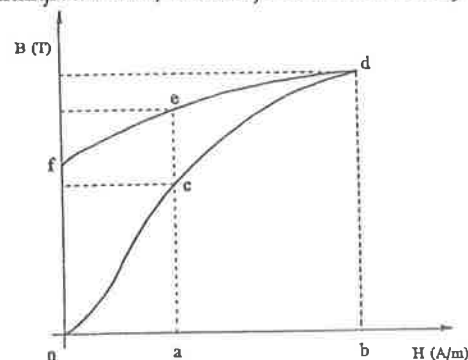
Odnos $B=\mu H$ nije moguće izraziti analitički pa se ova relacija za feromagnetske materijale zadaje kao krivulja ili pak u obliku tablice. Ovdje je navedena tablica za kaljeno željezo, preuzeta iz knjige "Elektricity and magnetism" F.W.Sears-a, 1958, USA.

Uobičajeno je zadavanje omjera $\mu=B/H$ u tabelarnom obliku pa se iz tih podataka može nacrtati krivulja magnetiziranja. Na slici 98. nacrtana je krivulja magnetiziranja kaljenog željeza u skladu s tablicom 9, iz koje se vidi da za manje H praktično cijeli tok potječe od ekvivalentnih površinskih struja. Tek kada H poprimi vrijednost veću od 1000 A/m, susceptibilnost znatno opada. Za to stanje željeza kaže se da je zasićeno.

Zanimljivo je da permeabilnost feromagnetskih materijala opada s porastom temperature. Relativna permeabilnost na određenoj temperaturi spadne na jedinicu. Ta temperatura je za različite materijale različita, i naziva se Curieva točka. Iznad Curieve točke željezo je paramagnetno, a ne više feromagnetno. Curieva točka za željezo je 760° .

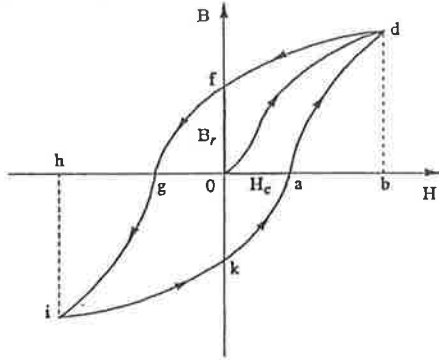
4.15.1. Histereza

Karakteristika magnetiziranja feromagnetskih materijala, koja se prikazuje tabelarno, vrijedi ako materijal nije prethodno magnetiziran, te ako je prilikom magnetiziranja uzbuda uvijek rasla, od nule do maksimalne vrijednosti. Evo zašto se to ističe. Ako se poveća jakost polja H promatranog feromaterijala, gustoća toka B će mu rasti u skladu s krivuljom na slici 99. Kada jakost polja bude oa , indukcija će biti ac . Ako uzbuda i dalje raste do iznosa ob , indukcija će narasti na iznos bd . Ako se pokus nastavi smanjenjem uzbude H, iznos $B=f(H)$ će se mijenjati po drugoj krivulji, iznad krivulje koja je uspostavljena dok je uzbuda rasla. Kada uzbuda bude imala ponovno iznos oa , indukcija će imati iznos ae . Ako se uzbuda nastavi smanjivati do 0, indukcija će imati iznos of . Dakle, iako je jakost polja



Slika 99. Promjena indukcije s promjenom uzbude kod feromagnetskog materijala

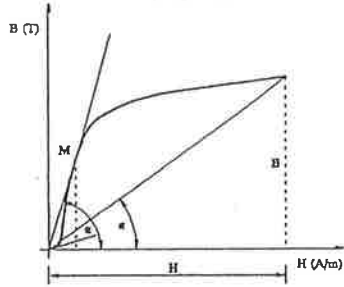
uslijed električne struje dovedena na nulu, u feromagnetu ipak postoji jedan iznos indukcije B , koji se naziva *remanentni magnetizam*. Ako se nastavi smanjivati uzbudna struja, odnosno ako struja raste s negativnim predznakom, da bi se indukcija svela na nulu, bit će potrebna jakost polja \vec{og} (slika 100).



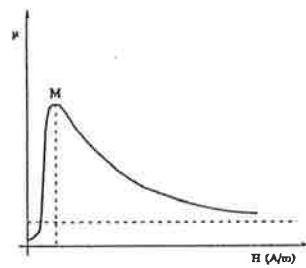
Slika 100. Petlja histereze

Neka struja promijenjenog smjera i dalje raste. Kod iznosa uzbuđe $H = \vec{oh}$ indukcija će primiti vrijednost hi . U nastavku će se iznos struje smanjivati s tim što se smjer struje neće promijeniti. Prilikom ove promjene odnos $B = \mu H$ mijenjat će se po kraku i-k.

Kada struja, odnosno jakost polja H primi vrijednost nula, indukcija će primiti iznos $B = \vec{ok}$. To je, kao i ranije, remanentni magnetizam. Da bi indukcija primila vrijednost nula, potrebno je da struja poraste toliko da jakost polja H primi vrijednost \vec{oa} . Taj iznos polja H , kao i onaj \vec{og} , naziva se *koercitivna sila* ili *koercitivnost* željeza i označava se H_c . Nastavi li jakost polja i dalje rasti, kada dostigne vrijednost \vec{ob} , indukcija će ponovno primiti iznos \vec{bd} . Time je petlja zatvorena.



Slika 101. Krivulja prvog magnetiziranja feromagnetskog materijala



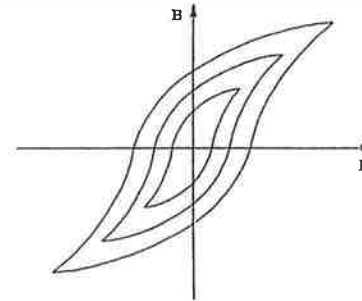
Slika 102. Krivulja permeabiliteta iz krivulje prvog magnetiziranja

Srednja linija na slici 100. predstavlja krivulju prvog magnetiziranja (slika 101) i na osnovu nje se utvrđuje vrijednost permeabiliteta kao $\mu = B/H$ i crta krivulja $\mu = f(H)$ (slika 102).

Iz promatranog se primjera vidi da je vrijednost permeabiliteta feromagnetskog materijala za svaki iznos uzbuđe H drugačija. Omjer B/H nije linearan i za svaku radnu točku jednak je tangensu kuta α koji zatvara os jakosti polja i pravac kroz ishodište i radnu točku. Stoga se kaže da su feromagnetske sredine nelinearne. Pojava petlje u jednom ciklusu magnetiziranja feromagneta (slika 100) naziva se *magnetskom histerezom*.

Treba posebno istaknuti slijedeću pojavu kod petlje histereze. Ako se napravi ciklus magnetiziranja promjenom uzbuđne struje u intervalu $[-I_1, +I_1]$, zatvorit će se jedna petlja (slika 103). Ako se, pak, pokus ponovi, ali s iznosom struje $I_2 > I_1$, zatvorit će se druga, veća petlja. Sa strujom $I_3 > I_2$ zatvorit će se treća, još veća petlja itd.

Sve promatrane krivulje nastale su uslijed polaganih, statičkih promjena istosmjerne struje. Dinamičke će promjene nastati prilikom izmjeničnog magnetiziranja feromagnetske jezgre.



Slika 103. Različite histeretne petlje nastale uslijed različitih magnetskih uzbuđa

Tablica 10. Vrijednosti B_r i H_c za neke feromagnetske materijale (preuzeto iz "Elektricity and magnetism" F.W.Sears, 1958)

Materijal	Sastav legure, %	B_r , T	H_c , A/m
Čelik legiran ugljikom	98 Fe, 0,86C 0,9 Mn	0,95	$3,6 \times 10^3$
Kobaltni čelik	52 Fe, 36Co, 7 W, 3,5 Cr, 0,5 Mn, 0,7 C	0,95	18×10^3
Alnico 2	55 Fe, 10 Al 17 Ni, 12 Co 6 Cu	0,76	42×10^3
Alnico 5	51 Fe, 8 Al, 14 Ni, 24 Co, 3 Cu	1,25	44×10^3

Koercitivnost je vezana uz permanentne magnete. Jasno je da će magnet biti "jači" što god mu je veća remanencija, kao i koercitivno polje. Tablica 10. daje vrijednost B_r i H_c za neke materijale.

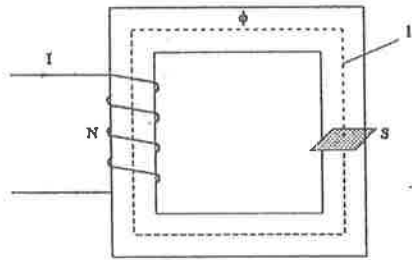
Kao posljedica pojave histereze dolazi do zagrijavanja feromagnetskog materijala. Toplina nastaje uslijed svojevrsnog trenja prilikom promjena smjera magnetskog domena u materijalu. Nastala toplina u svakom ciklusu po jedinici volumena razmjerna je površini petlje histereze. Ako je feromagnetska sredina izložena polju sa stalnom promjenom smjera (jezgra transformatora), potrebno je da upotrijebljeni materijal ima što užu histereznu petlju.

4.16. Magnetski krug s feromagnetom

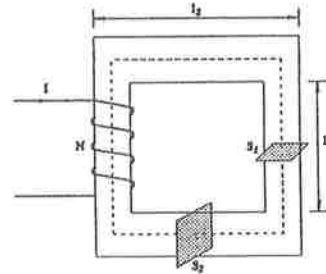
Za već poznati torus, ako se kao sredina upotrijebi feromagnetski materijal, izraz za tok (122) neće se promijeniti s tim što će se sada umjesto μ_0 računati s μ . Dakle, općenito vrijedi:

$$\phi = \mu \frac{IN}{l} S = \frac{\theta}{R_m}$$

Pri tome, oblik magnetskog kruga može biti proizvoljan. Neka to bude kvadratična jezgra, kao na slici 104. Taj je oblik vrlo čest u tehnici. Ako bi



Slika 104. Magnetski krug s feromagnetom konstantnog presjeka jezgre



Slika 105. Magnetski krug s feromagnetom različitog iznosa presjeka jezgre

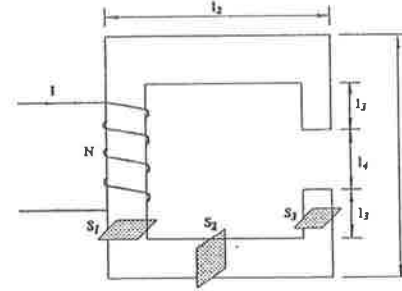
cijela jezgra bila izrađena od istog materijala, s jednakim presjekom S po cijeloj duljini l , magnetski će otpor prema (123) biti:

$$R_m = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S}$$

Ako bismo, pak, na različitim dijelovima jezgre imali različite presjeke, kao na slici 105, ukupni magnetski otpor treba parcijalno računati:

$$R_m = R_{m1} + R_{m2} = \frac{1}{\mu} \frac{2l_1}{S_1} + \frac{1}{\mu} \frac{2l_2}{S_2}$$

Magnetski se krug može izraditi tako da je jednim dijelom od željeza, a drugi je dio zrak (slika 106).



Slika 106. Magnetski krug sastavljen od feromagneta različitog presjeka uzduž jezgre i zraka.

Tada ukupni magnetski otpor iznosi:

$$R_m = \frac{1}{\mu} \frac{l_1}{S_1} + \frac{1}{\mu} \frac{2l_2}{S_2} + \frac{1}{\mu} \frac{2l_3}{S_3} + \frac{1}{\mu_0} \frac{l_4}{S_3}$$

pa vrijedi

$$\phi = \frac{IN}{R_m} = \frac{IN}{R_{m1} + R_{m2} + R_{m3} + R_{m4}}$$

Budući da je tok jednak cijelim magnetskim krugom, može se pisati:

$$\frac{\phi}{S_1} \frac{l_1}{\mu} + \frac{\phi}{S_2} \frac{2l_2}{\mu} + \frac{\phi}{S_3} \frac{2l_3}{\mu} + \frac{\phi}{S_3} \frac{l_4}{\mu_0} = IN$$

ili

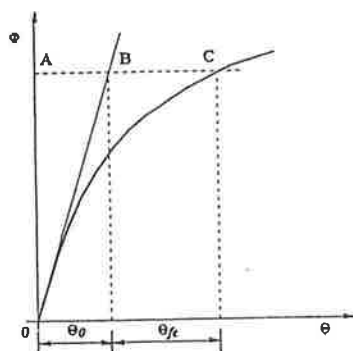
$$\frac{B_1}{\mu} l_1 + 2 \frac{B_2}{\mu} l_2 + 2 \frac{B_3}{\mu} l_3 + \frac{B_3}{\mu_0} l_4 = IN$$

Na osnovu relacije $B = \mu H$ slijedi:

$$H_1 l_1 + 2H_2 l_2 + 2H_3 l_3 + H_4 l_4 = IN$$

Magnetski napon ili protjecanje se raspodjeljuje uzduž cijelog magnetskog kruga na navedeni način što je poseban slučaj zakona protjecanja (121).

Za magnetski krug, koji je kombiniran iz željeza različitih poprečnih presjeka i zraka, kao na slici 106, karakteristika magnetiziranja ne može se prikazati prema slici 101 kao $B=f(H)$ već u obliku $\Phi=f(\theta)$ kao na slici 107. Ova se krivulja najprije poklapa s pravcem koji je tangenta krivulji u ishodištu, a nešto kasnije se otklanja od tangente.



Slika 107. Karakteristika $\phi=f(\theta)$ složenog magnetskog kruga

Svakoj vrijednosti toka ϕ odgovara jedan iznos magnetskog napona θ . Pri tome dio koji je razmjernan dužini AB troši se na zrak, a dio razmjernan dužini BC na željezo.

4.17. Energija magnetskog polja

Prilikom priključenja istosmjernog napona E na strujni krug s induktivitetom i radnim otporom, vidjeli smo da se dio energije izvora troši na stvaranje magnetskog polja. Razmotrimo sada stanje kada se priključi istosmjerni napon na torus (slika 87). Tom će se prilikom uspostaviti struja prema (139). Od trenutka uključenja vrijedi naponska i energetska jednačnja:

$$E = iR - e, \\ E i dt = i R i dt - e i dt.$$

Lijeva strana druge jednačnje predstavlja energiju koju oslobodi izvor kroz vrijeme dt . Kroz vrijeme t oslobođena energija iznosi:

$$W = \int_0^t E i dt, \quad (148)$$

i ona se raspodjeljuje na zagrijavanje otpora R i na stvaranje magnetskog polja:

$$W = R \int_0^t i^2 dt - \int_0^t e i dt. \quad (149)$$

Inducirani napon e je napon samoindukcije, za koji vrijede izrazi (103) i (129). Najprije potražimo izraz za magnetsku energiju na osnovu (103), iz čega izlazi:

$$-e dt = d\psi.$$

Uvrštenjem gornjeg izraza u (149), za ukupnu energiju dobije se:

$$W = R \int_0^t i^2 dt + \int_0^t i d\psi. \quad (150)$$

Drugi dio desno predstavlja magnetsku energiju, pa ćemo ga posebno razmotriti. Napišimo ga u obliku:

$$\int_0^t N i \frac{d\phi}{dt} dt.$$

Budući da je kao objekt promatranja uzet torus, može se pisati:

$$N i = H l, \quad d\phi = S dB \quad i \quad l S = V,$$

iz čega slijedi:

$$\int_0^t N i \frac{d\phi}{dt} dt = \int_0^B H l S dB = V \int_0^B H dB.$$

To je energija koja se utroši da se u svitku torusa stvori magnetsko polje indukcije B . To je, ukratko, magnetska energija:

$$W_m = V \int_0^B H dB. \quad (151)$$

Radi $B = \mu H$ ova se jednačnja može napisati još u dva oblika:

$$W_m = V \int_0^B H dB = V \int_0^B \frac{B}{\mu} dB = V \int_0^H \mu H dH. \quad (152)$$

Radi česte potrebe da se izračuna iznos energije nehomogenog polja, energija se izračunava po jedinici volumena:

$$W'_m = \frac{W_m}{V} = \int_0^B H dB = \int_0^B \frac{B}{\mu} dB = \int_0^H H dH. \quad (153)$$

Element volumena dV sadrži magnetsku energiju:

$$dW'_m = W'_m dV,$$

na osnovu čega se dobije magnetska energija nehomogenog polja:

$$W_m = \int_V W'_m dV = \int_V \int_0^B H dB dV . \quad (154)$$

Za stanje kada je μ konstantno, što je slučaj za zrak, energija po jedinici volumena se dobije iz:

$$W'_m = \frac{BH}{2} = \mu_0 \frac{H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} . \quad (155)$$

Magnetska se energija može izračunati i na drugi način. Primjenom (129) na drugi član desne strane relacije (149) izlazi:

$$W_m = \int_0^I L idi . \quad (156)$$

Kada je L konstanta, slijedi:

$$W_m = L \frac{I^2}{2} . \quad (157)$$

Budući da vrijedi $LI = \psi$ (130), izlaze nove relacije za proračun magnetske energije:

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{\psi I}{2} = \frac{\psi^2}{2L} . \quad (158)$$

4.18. Elektromagnetska sila

Zamislimo homogeno magnetsko polje u zraku između dva magneta. Očito postoji sila uzdužnog naprezanja koja teži da smanji udaljenost δ između magneta. Za ovu silu, uz pretpostavku da $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$, vrijedi:

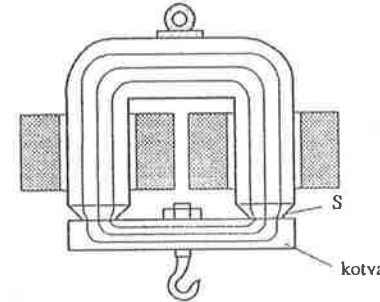
$$F = \frac{dW_m}{d\delta} = W'_m \frac{dV}{d\delta} .$$

Ako je $dV = Sd\delta$, tada je izraz za silu:

$$F = W'_m S = \frac{B^2 S}{2\mu_0} = \frac{BH}{2} S . \quad (159)$$

Izraz (159) može se koristiti za izračunavanje noseće sile elektromagneta (slika 108). Nosiva sila je po iznosu jednaka sili tereta koja je potrebna za otpuštanje kotve od polova elektromagneta. Ako je $2S$ površina oba pola na koje priliježe kotva, onda noseća sila iznosi:

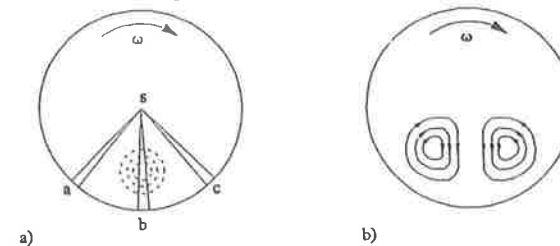
$$F = \frac{B^2}{2\mu_0} 2S = \frac{\phi^2}{\mu_0 S} . \quad (160)$$



Slika 108. Noseći elektromagnet

4.19. Vrtložne struje

Zakon elektromagnetske indukcije primijenili smo na vodiče, petlje, zavojnice koji su se našli u promjenljivom magnetskom polju. Pri tome smo zanemarili činjenicu da je najčešće sredina u kojoj postoji magnetski tok - feromagnet. To znači, da će se u tijelu magneta, ako se magnetiziranje vrši promjenljivom strujom, također inducirati struja. Struja će se inducirati i u svakom metalnom predmetu koji se giba u mirujućem magnetskom polju. Uzmimo kao primjer metalnu ploču (disk) koja se vrti u magnetskom polju (slika 109a), okomitom na površinu diska.



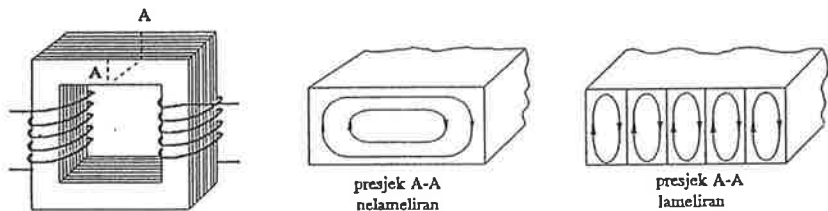
Slika 109. Uz objašnjenje nastanka vrtložnih struja

Polje obuhvaća samo dio diska. Izdvojimo tri elementa: sa , sb i sc pri čemu samo element sb u promatranom trenutku siječe magnetske silnice te se u njemu inducira napon. To znači da je izvršen pomak elektrona iz s u b . Dva druga zamišljena elementa služe da se preko njih sakupljeni naboj vrati na

prvobitno mjesto. Zbog toga se u disku uspostavlja opća cirkulacija naboja koja se naziva *vtložne struje* (slika 109b).

Interesantan je primjer vtložnih struja jezgra transformatora. Uslijed takve promjene u jezgri u ritmu frekvencije f , u svim slojevima poprečnih presjeka jezgre (npr. presjek A-A, slika 110), induciraju se vtložne struje.

Kod transformatora, kao i kod drugih električnih strojeva, ova je pojava štetna, jer nastaju veliki gubici pa se željezo zagrijava. Smanjenje vtložnih struja, a time i gubitaka koji su posljedica tih struja, postiže se lameliranjem željezne jezgre (slika 110).

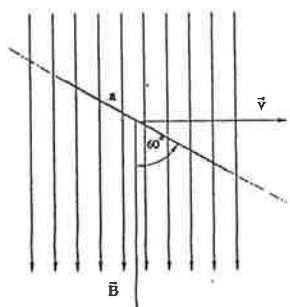


Slika 110. Ograničavanje gubitaka uslijed vtložnih struja lameliranjem željezne jezgre

Primjer korisne upotrebe vtložnih struja induksijske su peći koje se u metalurgiji koriste za topljenje metala.

ZADACI

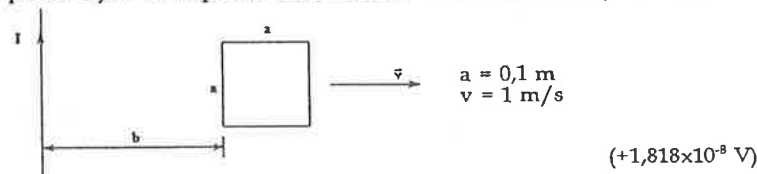
1. Kvadratna petlja duljine stranice a nalazi se u homogenom magnetskom polju i nagnuta je pod kutem od 60° u odnosu na smjer polja. Odredite iznos inducirane EMS u petlji kad se petlja giba brzinom v_0 okomito na smjer polja.



$$\begin{aligned} B &= 1\text{ T} \\ \mu &= \mu_0 \\ v &= 1\text{ m/s} \\ a &= 1\text{ m} \end{aligned}$$

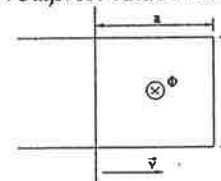
$$(E' = 0)$$

2. Beskonačno dugim pravolinijskim vodičem teče istosmjerna struja $I = 1\text{ A}$. Odredite iznos i smjer inducirane EMS u petlji koja se giba okomito na pravolinijski vodič prema slici brzinom v u trenutku kada je $b = 1\text{ m}$.



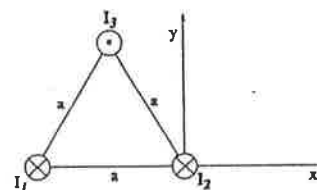
$$(+1,818 \times 10^{-8}\text{ V})$$

3. Zadan je pravokutni okvir od bakrene žice presjeka $S = 2 \times 10^{-6}\text{ m}^2$ koji ulančuje homogeni magnetski tok. Bakreni vodič istog presjeka kao žica okvira postavljen je kao četvrta strana pravokutnika preko strana okvira i giba se brzinom $v = 6\text{ m/s}$ prema slici. Odredite induciranu EMS i struju kroz vodič u trenutku kada je $a = 0,6\text{ m}$ i ulančeni tok $\phi = 0,1\text{ Vs}$. Vodljivost bakra iznosi $55 \times 10^6\text{ S/m}$, a širina okvira $l = 0,5\text{ m}$.



$$(1\text{ V}, 50\text{ A})$$

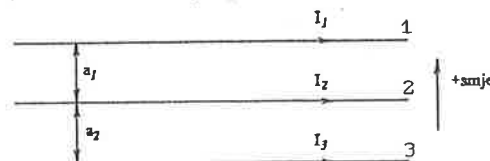
4. Tri beskonačno duga vodiča međusobno su paralelna. Odredite iznos i smjer magnetske sile po jedinici duljine u vodiču 2.



$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 = I_3 = 10\text{ A} \\ a &= 0,5\text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &((-2i - 3,4641j) \times 10^{-5}\text{ N}) \\ &(4 \times 10^{-5}\text{ N}) \end{aligned}$$

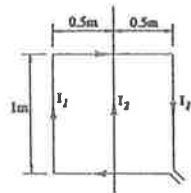
5. Tri beskonačno duga pravolinijska vodiča u zraku su međusobno paralelna i leže u istoj ravnini. Za zadane podatke odredite iznos i smjer sile po jedinici duljine koja djeluje na vodič 2.



$$\begin{aligned} a_1 &= 1\text{ m} & I_1 &= 10\text{ A} \\ a_2 &= 2\text{ m} & I_2 &= 20\text{ A} \\ & & I_3 &= 30\text{ A} \end{aligned}$$

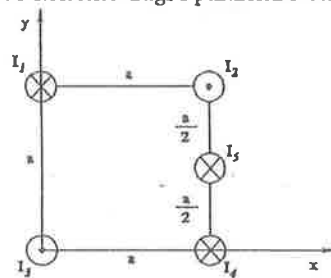
$$(-2 \times 10^{-5}\text{ N})$$

6. Kroz kvadratičnu vodljivu petlju duljine stranice 1 m protječe istosmjerna struja od 10 A . U ravnini petlje prema slici nalazi se beskonačno dugi ravni vodič protjecan strujom od 100 A . Odredite silu na petlju.



$$(8 \times 10^{-4} \text{ N})$$

7. Odredite iznos i smjer sile po jedinici duljine koja djeluje na vodič 5. Vodiči su beskonačno dugi i paralelni s osi z.

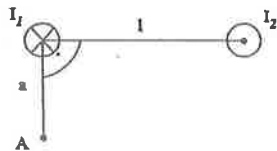


$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 5 \text{ A} \\ I_5 = 5 \text{ A} \\ a = 0,5 \text{ m}$$

$$(F_y = -1,44 \times 10^{-5} \text{ N})$$

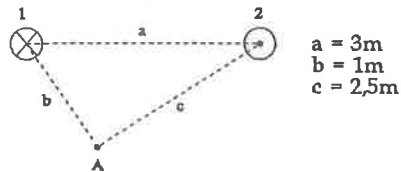
8. Dva beskonačno duga paralelna vodiča razmaknuta 1,2m, protjecana su strujama $I_1 = 100 \text{ A}$ i $I_2 = 50 \text{ A}$ istoga smjera. Odredite kolika sila po jedinici duljine djeluje između vodiča.
9. Kroz dva beskonačno duga paralelna vodiča, razmaknuta $l = 1 \text{ m}$, teku struje $I_1 = 25 \text{ A}$ i $I_2 = 30 \text{ A}$. Odredite jakost magnetskog polja u točki A prema slici, ako je $a = 0,5 \text{ m}$.

$$(8,3 \times 10^{-4} \text{ N})$$



$$(10,96 \text{ A/m})$$

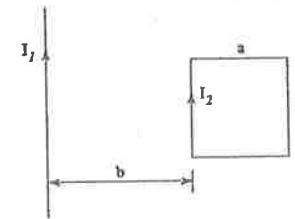
10. Kroz dva beskonačno duga paralelna vodiča teku struje $I_1 = 35 \text{ A}$ i $I_2 = 40 \text{ A}$. Za raspored prema slici odredite jakost magnetskog polja u točki A.



$$a = 3 \text{ m} \\ b = 1 \text{ m} \\ c = 2,5 \text{ m}$$

$$(6,52 \text{ A/m})$$

11. Odredite privlačnu silu između beskonačno dugog ravnog vodiča i kvadratne petlje prema slici, koja leži u istoj ravnini s ravnim vodičem. Vodič i dvije stranice petlje su paralelni.



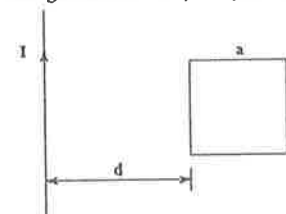
$$I_1 = I_2 = 1 \text{ A} \\ a = 0,1 \text{ m} \\ b = 0,2 \text{ m}$$

$$(3,3 \times 10^{-9} \text{ N})$$

12. Magnetski tok iznosa $5 \times 10^{-6} \text{ Vs}$ ostvaruje struja koja teče kroz $N=1000$ zavoja omotanih oko cijevi savinute u obliku prstena. Promjer cijevi je 0,1m, a duljina osi cijevi 1,5m. Koliko iznosi jakost polja H i struja I koja ostvaruje to polje?

$$(506,6 \text{ A/m}; I = 0,76 \text{ A})$$

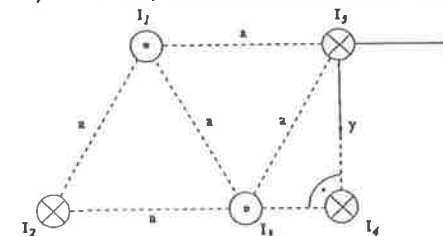
13. Za shemu na slici odredite magnetski tok koji prolazi kvadratnom petljom što ga stvara struja koja teče beskonačno dugim ravnim vodičem.



$$a = a = 0,5 \text{ m} \\ d = 0,4 \text{ m} \\ I = 10 \text{ A} \\ \mu = \mu_0$$

$$(8,1093 \times 10^{-7} \text{ Vs})$$

14. Zadano je 5 paralelnih ravnih beskonačno dugih vodiča prema slici, kroz koje teku struje. Odredite iznos i smjer sile koja djeluje na vodič 5.



$$I_1 = I_3 = 5 \text{ A} \quad I_2 = I_4 = 10 \text{ A} \\ I_5 = 2 \text{ A} \\ a = 0,2 \text{ m} \\ \mu = \mu_0$$

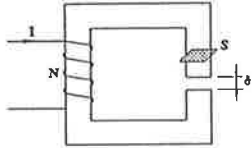
$$(4,813 \times 10^{-6} \text{ i } 2,072 \times 10^{-5} \text{ N}) \\ (2,117 \times 10^{-3} \text{ N})$$

15. Koliki broj zavoja ima zavojnica kroz koju teče struja jakosti 4A, srednje duljine linije magnetskog polja 1,1m, presjeka $2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ i koja pri tome ostvaruje magnetski tok iznosa 10^{-3} Vs ? Koliko iznosi jakost magnetskog polja H i magnetska indukcija B?

$$(10942; 0,05 \text{ T}; 39,789 \text{ A/m})$$

16. Za zadani magnetski krug prema slici (željezo konstantnog presjeka, zračni raspored duljine δ , N zavoja) odrediti magnetsku silu između dva kraja

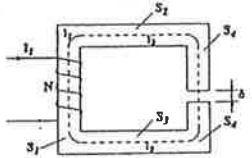
zračnog raspora. Struja kroz zavojice je istosmjerna, zanemaruje se magnetski otpor kroz željeznu jezgru i pretpostavlja se homogeno magnetsko polje u zračnom rasporu.



$$\begin{aligned} I &= 0,5\text{A} \\ N &= 1\,000 \text{ zavoja} \\ S &= 10^{-2}\text{m}^2 \\ \delta &= 10^{-2}\text{m} \end{aligned}$$

(5π N)

17. Magnetski krug prema slici ima $N = 2000$ zavoja. U zračnom rasporu linije toka su šire za $x = 15\%$. Ako je indukcija u zračnom rasporu $B_0 = 0,9\text{T}$, odredite magnetski tok Φ , MMS θ i struju magnetiziranja.



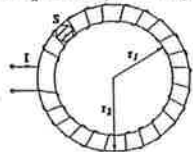
$$\begin{aligned} S_1 &= 4 \times 10^{-3}\text{m}^2; S_2 = S_3 = S_4 = 5 \times 10^{-3}\text{m}^2 \\ l_1 &= 0,3\text{m}; l_2 = l_3 = 0,5\text{m}; \delta = 10^{-3}\text{m} \\ \mu_{r1} &= 100; \mu_{r2} = 500; \mu_{r3} = \mu_{r4} = 1000 \end{aligned}$$

(5,175 × 10⁻³ Vs; 5280 A; 2,64 A)

18. Zavojnica ima 2000 zavoja i induktivitet od 1H. Ako magnetski tok zavojnice iznosi $5 \times 10^{-13}\text{Vs}$, kolika je magnetska energija sadržana u magnetskom polju zavojnice.

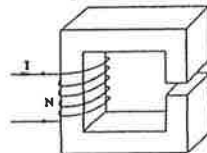
(0,5 J)

19. Na torusnu jezgru unutrašnjeg promjera $r_1 = 0,2\text{m}$ i vanjskog promjera $r_2 = 0,25\text{m}$, jednoliko je namotano 10^3 zavoja. Jezgra je izrađena od materijala relativne magnetske permeabilnosti $\mu_r = 500$. Ako zavojnicom teče istosmjerna struja jakosti 1A, odredite akumuliranu magnetsku energiju. Pretpostavlja se da je magnetsko polje unutar jezgre homogeno po presjeku.



(0,4363 J)

20. Na željeznu jezgru konstantnog poprečnog presjeka $S = 25 \times 10^{-4}\text{m}^2$ namotana je zavojnica kroz koju teče struja $I = 1\text{A}$. Zadano je: $\mu_r = 500$, duljina srednje linije u željezu $l_{Fe} = 0,5\text{m}$, duljina zračnog raspora $\delta = 0,01\text{m}$, indukcija u zračnom rasporu $B = 1\text{T}$. Pretpostavlja se da je polje u zračnom rasporu homogeno i da nema rasipanja linija toka u zračnom rasporu. Odredite:



- broj zavoja zavojnice
- akumuliranu magnetsku energiju u jezgri
- akumuliranu magnetsku energiju u zračnom rasporu
- silu kojom se privlače krajevi zračnog raspora

(8754; 0,9947J; 0,9947J)

5. IZMJENIČNE STRUJE

5.1. Definicija

Zakoni električnog strujanja, koje smo do sada upoznali, utvrđeni su za slučaj ako je strujni krug priključen na izvor istosmjernog konstantnog napona. U takvom slučaju, i struja je istosmjerna. Međutim, u tehnici ili u životu općenito, upotreba izmjeničnih struja nezaobilazna je. Radi toga je neophodno upoznati osnovne zakonitosti i manifestacije izmjeničnih struja. Pod nazivom izmjenična struja podrazumijeva se struja koja tijekom vremena periodično mijenja jakost i smjer. Ako se struja, napon i unutarnji napon vremenski mijenjaju, piše se:

$$i = F(t) \quad , \quad u = f(t) \quad , \quad e = f(t) \quad .$$

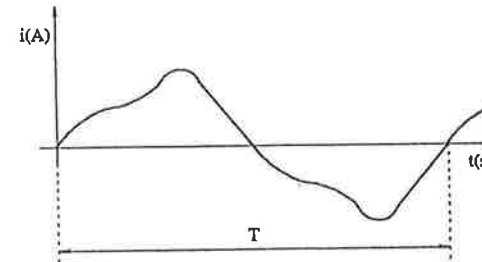
Ako su pak promatrane veličine periodično promjenljive, piše se:

$$i = f(t+nT) \quad , \quad u = f(t+nT) \quad , \quad e = f(t+nT) \quad ,$$

gdje je: T - vrijeme trajanja jednog perioda, ili kratko perioda

n - prirodni broj

Očito, u različitim trenucima unutar jednog perioda, izmjenične veličine imat će različite iznose. Zbog toga se kod izmjeničnih veličina govori o trenutnim vrijednostima koje se označavaju malim slovima i, u ili e.



Slika 111. Izmjenična struja načelno može biti proizvoljnog oblika

Da bi veličina bila izmjenična, potrebno je da u jednom dijelu perioda ima suprotan predznak, smjer. Izmjenična struja se, dakle, tijekom jednog perioda mijenja po iznosu i smjeru (slika 111). U jednom periodu struja (ili napon) napravi jedan ciklus. Mijenja se, recimo, od nule do maksimuma, ide ponovo do nule, zatim dalje pada do negativnog maksimuma i konačno se vrati na nulu, da bi se u nastavku ciklusi ponavljali.

Važna je pojava u radu s izmjeničnim veličinama broj perioda u sekundi. Ta veličina naziva se *frekvencija* i označava se slovom f. Jedinica za mjerenje

frekvencije je herc i označava se s Hz:

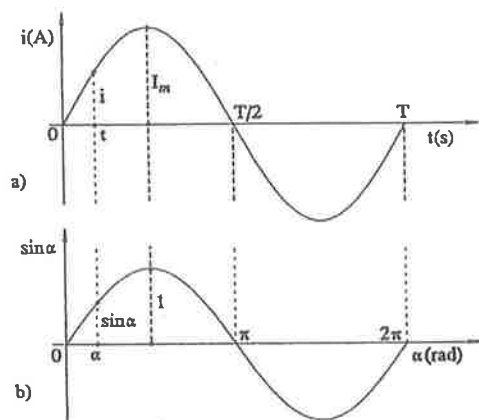
$$[f] \text{ Hz} = \frac{1}{s} .$$

Iz definicije frekvencije slijedi:

$$f = \frac{1}{T} . \quad (161)$$

Oblik izmjenične struje načelno može biti proizvoljan, ali u elektrotehnici se pod tim nazivom podrazumijeva sinusni periodični oblik.

Sada ćemo formulirati izraz za jednu sinusno promjenljivu veličinu, npr. sinusnu struju. U tu svrhu ćemo se poslužiti sličnošću koja postoji između naše izmjenične struje i sinusoide.



Slika 112. Izvod izraza za sinusno promjenljivu izmjeničnu struju: a) grafički dijagram izmjenične struje, b) sinusoide

Iz usporedbi krivulja na slici 112 može se uspostaviti omjer:

$$i : I_m = \sin \alpha : 1 ,$$

iz čega izlazi:

$$i = I_m \sin \alpha .$$

Da bi struju izrazili kao funkciju vremena, iz slike 112 ćemo se ponovo poslužiti sličnošću:

$$t : T = \alpha : 2\pi ,$$

iz čega izlazi:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} t = 2\pi ft .$$

Produkt $2\pi f$ naziva se *kružna frekvencija* i označava se ω :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} . \quad (162)$$

Sada izmjeničnu struju možemo izraziti kao:

$$i = I_m \sin \omega t . \quad (163)$$

Za napone također vrijedi:

$$u = U_m \sin \omega t , \quad (164)$$

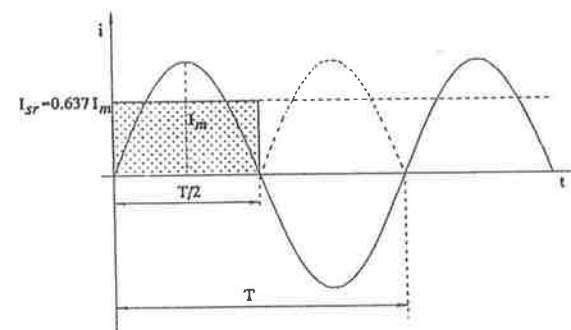
$$e = E_m \sin \omega t . \quad (165)$$

5.2. Karakteristične vrijednosti izmjenične struje

Pri definiranju izmjenične struje služili smo se *trenutnom* (i) i *maksimalnom strujom* (I_m). U svakodnevnoj praksi koriste se *srednja* I_{sr} i *efektivna vrijednost izmjenične struje* I .

5.2.1. Srednja vrijednost izmjenične struje

Zamislimo da se izmjenična struja primijeni u procesu elektrolize. Svaki put pri promjeni smjera struje, došlo bi do promjene smjera u kemijskom procesu. Radi toga elektrolitičkog efekta ne bi ni bilo. Da bi se izmjenična struja mogla koristiti u procesu elektrolize, treba je ispraviti (slika 113). Tada bi izvršeni elektrolitički efekt bio kao da je kroz isto vrijeme bila priključena istosmjerna struja po iznosu jednaka srednjoj vrijednosti izmjenične struje.



Slika 113. Srednja vrijednost izmjenične struje

Matematički iskazano, prema slici 113, to bi bilo:

$$I_{sr} \frac{T}{2} = \int_0^{T/2} i dt,$$

ili

$$I_{sr} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt. \quad (166)$$

Ako se u (166) uvrsti $i = I_m \sin \omega t$, dobije se:

$$I_{sr} = \frac{2I_m}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} \left| -\cos \omega t \right|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} I_m,$$

$$I_{sr} = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m. \quad (167)$$

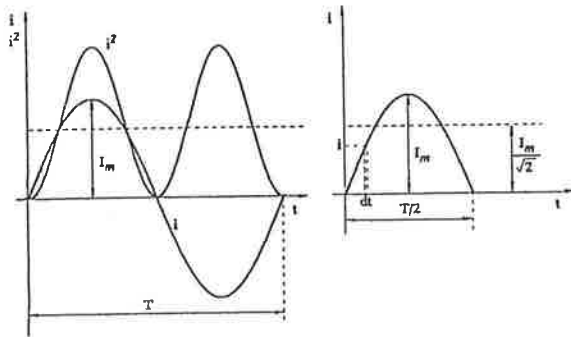
Za srednje vrijednosti napona također vrijedi:

$$U_{sr} = 0,637 U_m, \quad E_{sr} = 0,637 E_m.$$

Gornja granica $T/2$ uzeta je radi toga što bi integral s gornjom granicom T , kao rezultat, dao nulu.

5.2.2. Efektivna vrijednost izmjenične struje

Izmjenična struja stalno mijenja iznos, a ipak svakodnevno za nju kažemo da ima neki trajni iznos, npr. 5A. Što to znači? Ako se na trošilo otpora R priključi izmjenična struja, razvija se određena količina topline. Ako bi se ta količina topline izmjerila, po Joulovom zakonu moglo bi se izračunati istosmjernu struju koja bi bila potrebna da se ostvari isti toplinski efekt.



Slika 114. Efektivna vrijednost izmjenične struje

Dakle, efektivna je vrijednost izmjenične struje jednaka onoj vrijednosti istosmjerne struje kojom bi se ostvario jednak toplinski efekt za isto vrijeme.

Ako se Joulov zakon (74) primjeni na izmjeničnu struju, može se napisati u obliku:

$$dQ = i^2 R dt.$$

Kada se usporedi toplinski efekt istosmjerne i izmjenične struje kroz vrijeme T , na osnovu definicije efektivne vrijednosti, može se napisati:

$$RI^2 T = \int_0^T Ri^2 dt,$$

iz čega slijedi efektivna vrijednost izmjenične struje:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (168)$$

Ako se u (168) unesu zamjene $i = I_m \sin \omega t$ i $\sin^2 \omega t = 1/2(1 - \cos 2\omega t)$, rješenjem integrala dobije se:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (169)$$

Također vrijedi:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad i \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Kod efektivnih vrijednosti ne piše se indeks. Ako se izmjenična vrijednost označi samo velikim slovom bez indeksa (I , U , E), misli se na efektivnu vrijednost.

5.2.3. Međusobni odnosi srednje, efektivne i maksimalne vrijednosti

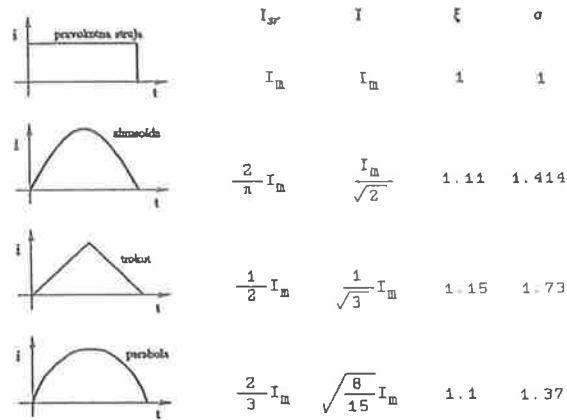
Iznosi efektivne i srednje vrijednosti u odnosu na maksimalnu vrijednost navedeni su za sinusni oblik izmjeničnih veličina. Međutim, često se u elektrotehnici javljaju i drugačiji periodični oblici. Pored sinusa, poluperiod može imati oblik pravokutnika, parabole, trokuta itd. Radi toga su uvedeni faktori koji su karakteristični za određeni oblik periodične funkcije:

$$\text{faktor oblika } \xi = \frac{I}{I_{sr}}, \quad \text{za sinusoidu } \xi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

$$\text{tjemeni faktor } \sigma = \frac{I_{max}}{I}, \quad \text{za sinusoidu } \sigma = \sqrt{2} = 1,414$$

$$\text{srednji faktor } \zeta = \frac{I_{sr}}{I_{max}}, \quad \text{za sinusoidu } \zeta = \frac{2}{\pi} = 0,637$$

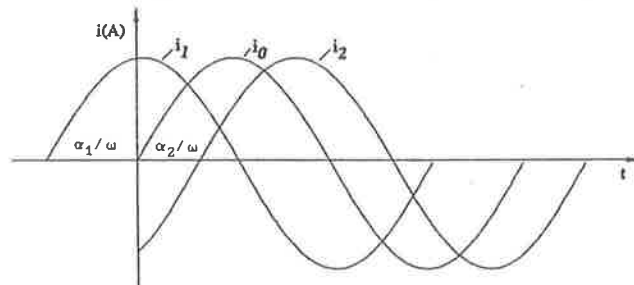
Na slici 115. navedene su karakteristične vrijednosti za nekoliko različitih oblika izmjenične struje.



Slika 115. Karakteristični faktori za četiri različita oblika izmjenične struje

5.2.4. Fazni kut

U strujnom krugu s istosmjernim izvorom u svakom promatranom trenutku (osim u toku prijelazne pojave u krugu s induktivitetom ili kapacitetom) iznos struje razmjeran je narinutom naponu. U nekom smislu može se reći da su struja i napon istovremeni. Ako, pak, promatramo dvije ili više izmjeničnih veličina, njihove sinusoide ne moraju počinjati istovremeno; među njima može postojati vremenski pomak. Promatramo tri struje iste frekvencije od kojih je jedna referentna i_0 . Struja i_1 neka u odnosu na referentnu prednjači za kut α_1 , druga neka zaostaje za kut α_2 .



Slika 116. Vremenski pomak triju izmjeničnih struja iste frekvencije

Na slici 116. prikazane su struje:

$$\begin{aligned} i_0 &= I_m \sin \omega t \\ i_1 &= I_m \sin(\omega t + \alpha_1) \\ i_2 &= I_m \sin(\omega t - \alpha_2) \end{aligned}$$

U trenutku $t=0$ struja $i_0=0$. U istom trenutku struja i_1 ima pozitivan iznos. Kaže se da ta struja prednjači u odnosu na i_0 , pa kut α_1 ima pozitivan predznak. Struja i_2 u tom trenutku ima negativnu vrijednost. Vrijednost nula imat će tek u trenutku α_2/ω . Ova struja zaostaje u odnosu na i_0 za kut α_2 što odgovara vremenu $t=\alpha_2/\omega$. Kut α_2 ima negativan predznak.

Kut prema referentnoj veličini naziva se *fazni pomak*.

Ako se struja gleda prema naponu, napon se uzima kao referentni i glasi:

$$u = U_m \sin \omega t,$$

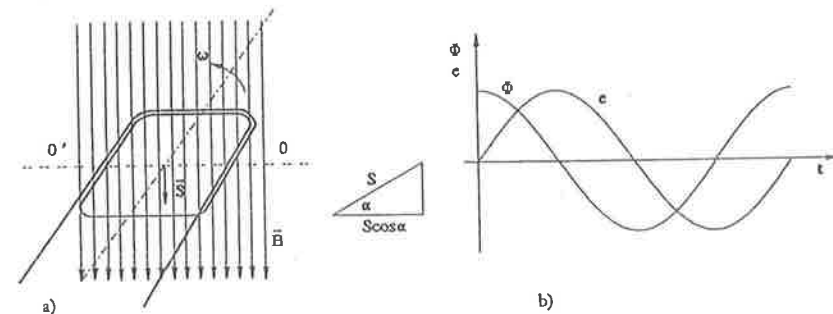
pa će struja prema naponu biti:

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (170)$$

Ovdje kut φ predstavlja fazni pomak struje prema naponu. Predznak plus ispred φ znači da struja prednjači naponu, a minus da zaostaje.

5.3. Nastajanje izmjeničnog napona

Izmjenična struja nastaje pod utjecajem izmjeničnog napona. Takav napon se stvara u generatorima. Ovdje će biti pokazan princip kako se stvara izmjenični napon (slika 117).



Slika 117. Nastajanje izmjeničnog napona

Svitek izrađen od N zavoja ima površinu S i nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije B . Os vrtnje svitka stoji okomito na silnici indukcije (slika 117a). Neka se svitek okreće konstantnom kutnom brzinom

ω. U položaju 0 - 0' kada silnice upadaju okomito na površinu S svitka obuhvaća najveći tok:

$$\phi_m = BS.$$

Kada strana svitka opiše kut α, tok kroz svitak iznositi će:

$$\phi = \phi_m \cos \alpha,$$

ili

$$\phi = \phi_m \cos \omega t. \quad (171)$$

Primjenom zakona elektromagnetske indukcije dobit će se:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} = -N \phi_m \frac{d}{dt} (\cos \omega t),$$

$$e = N \omega \phi_m \sin \omega t.$$

Kada je $\omega t = \pi/2$, inducirani napon primi najveći iznos:

$$E_m = N \omega \phi_m,$$

pa se za trenutnu vrijednost napona može pisati:

$$e = E_m \sin \omega t. \quad (172)$$

Ako se usporede jednačbe za tok (171):

$$\phi = \phi_m \cos \omega t = \phi_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

i inducirani napon (172), vidjet će se da napon zaostaje za tokom za kut $\varphi = \pi/2$. Iz ovoga slijedi pravilo koje treba zapamtiti:

Inducirani napon uvijek zaostaje za tokom koji ga je proizveo.

Na osnovu (169) iz maksimalnog inducirano napona $E_m = N \omega \Phi_m$ može se odrediti njegova efektivna vrijednost:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi N f \phi_m}{\sqrt{2}}, \quad (173)$$

$$E = 4,44 N f \phi_m.$$

Ovaj izraz za inducirani napon pratit će nas kod svih strojeva za izmjeničnu struju.

Nekoliko riječi o frekvenciji.

Standardna frekvencija elektroenergetskog sustava u Hrvatskoj, kao i u većini zemalja svijeta, iznosi 50Hz. U USA ta je frekvencija 60Hz.

U telefoniji se koriste izmjenične struje induktorske frekvencije od 15 od 50Hz i tonske frekvencije od 300 do 2.700Hz.

U radiotehnici koriste se frekvencije do stotine megaherca, a u radarskoj

tehnici frekvencije su i veće. To su frekvencije prostiranja elektromagnetskih valova i uz to se veže pojam valne duljine λ. Ako je brzina prostiranja vala jednaka brzini svjetlosti, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, te ako znamo period ili frekvenciju, možemo izračunati valnu duljinu:

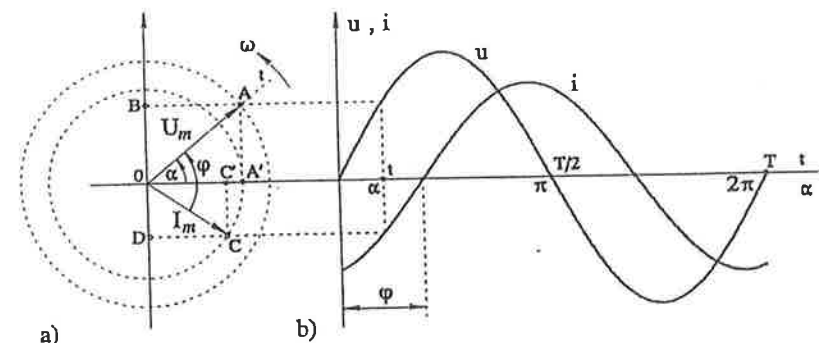
$$\lambda = cT = \frac{c}{f}. \quad (174)$$

Valna duljina obrnuto je razmjerna frekvenciji: što je veća frekvencija, kraća je valna duljina i obrnuto.

5.4. Prikazivanje izmjeničnih veličina fazorima

Izmjenični naponi i struje, kao harmoničke veličine, predočuju se analitičkim sinusnim funkcijama i grafičkim dijagramima. Osim toga, mogu se prikazati rotirajućim radijvektorima u ravnini (tzv. *fazorima*) i kompleksnim brojevima.

Da bismo se mogli u analizi strujnih krugova poslužiti fazorima, u nekoliko rečenica ćemo ih definirati.



Slika 118. Prikaz izmjeničnih veličina fazorima; a) rotirajući radijvektori, b) trenutne vrijednosti izmjenične struje i napona određene položajem radijvektora

Nastanak sinusoide može se prikazati kao projekcija rotirajućeg radijvektora na okomitu os. Na slici 118a. prikazana su dva radijvektora duljine U_m i I_m , koji rotiraju konstantnom kutnom brzinom ω . Ako radijvektor U_m u trenutku $t=0$, zauzima vodoravni položaj, nakon vremena t opisat će kut $\alpha = \omega t$. Njegova projekcija $AA' = U_m \sin \omega t$ upravo je jednaka trenutnoj vrijednosti izmjeničnog napona.

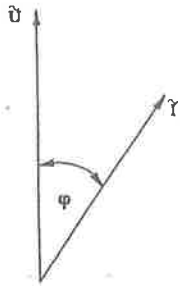
Uzmimo sada drugi radijvektor I_m koji rotira zajedno s U_m istom kutnom brzinom i koji zaostaje iza prvoga za kut φ , (kaže se da su napon i struja

pomaknuti za kut φ). Njegova trenutna vrijednost, prema slici 118, je: $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$.

Radijvektori U_m i I_m na slici 118. rotiraju s kutnom brzinom ω , pri čemu vremenska os t miruje. Isti događaj možemo zamisliti i drugačije. Uzmimo da radijvektori miruju, a da se vremenska os okreće brzinom ω u smjeru kazaljki na satu (suprotno od smjera vrtnje radijvektora).

Pri analizi strujnih krugova izmjenične struje i pri energetskim proračunima dovoljno je poznavati samo efektivne vrijednosti struja i napona te pripadajuće fazne pomake. Dakle, ne zanimaju nas trenutne vrijednosti, rotiranje vremenske osi i maksimalne vrijednosti. Radi toga se radi s mirujućim radijvektorima čiji moduli imaju efektivne vrijednosti, odnosno $U_m/\sqrt{2}$ i $I_m/\sqrt{2}$.

Pri crtanju dijagrama s radijvektorima (fazorskih dijagrama) uvijek se jedna veličina uzima kao referentna i postavi u okomiti ili vodoravni položaj. Ostale veličine se crtaju u skladu s njihovim faznim pomacima, kao na slici 119. U daljnjem tekstu radijvektore ćemo nazivati fazorima i označavati ih kao npr. \vec{U} .

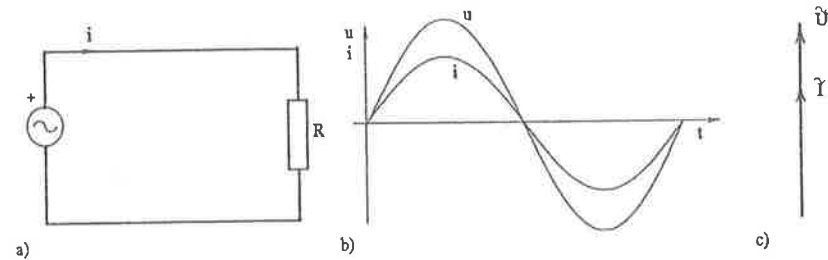


Slika 119. Fazorski dijagram napona i struje

5.5. Radni otpor, induktivitet i kapacitet u krugu izmjenične struje

U strujnom krugu istosmjerne struje, u stacionarnom stanju struji se suprostavlja samo radni otpor. U stacionarnom stanju induktivitet ne predstavlja aktivni element, a kapacitet prekida strujni krug. Kako se ponašaju ovi elementi u strujnom krugu izmjenične struje? Vidjet ćemo to pojedinačno za R , L i C , a zatim u kombinaciji.

5.5.1. Radni otpor



Slika 120. Radni otpor u krugu izmjenične struje: a) shema strujnog kruga, b) trenutne vrijednosti napona i struje, c) fazorski dijagram

Iz jednadžbe naponske ravnoteže za strujni krug na slici 120a, prema II. Kirchhoffovu zakonu ($u=iR$), dobije se struja:

$$i = \frac{u}{R}$$

Ako je narinuti napon: $u = U_m \sin \omega t$, tada struja u strujnom krugu glasi:

$$i = \frac{U_m}{R} \sin \omega t,$$

ili:

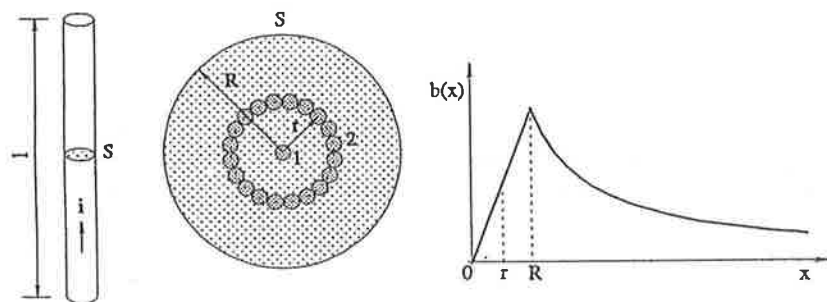
$$i = I_m \sin \omega t,$$

gdje je: $I_m = U_m/R$

Kada se u strujni krug izmjenične struje priključi samo radni otpor, struja i napon su u fazi, fazni kut $\varphi=0$. Struja je u svakom trenutku razmjerna naponu. Nadalje, iz $I_m = U_m/R$ diobom jednadžbe s $\sqrt{2}$ dobije se $I=U/R$. Za efektivne vrijednosti napona i struje vrijedi Ohmov zakon u onom obliku kako smo ga upoznali za istosmjernu struju.

5.5.1.1. Površinski ili skin-efekt

Ako radni otpor nekog elementa u krugu istosmjerne struje iznosi R , kada kroz njega protječe izmjenična struja, radni otpor tog elementa prividno poraste. Ova je pojava izrazita kod visokih frekvencija, a kod 50 Hz praktično se može zanemariti, osim ako je masivni vodič okružen feromagnetnom sredinom (npr. utor električnog stroja). Promatrajmo kao primjer segment ravnog vodiča duljine l (slika 121a) čiji je poprečni presjek S uvećano prikazan slikom 121b. Zamislimo da je taj vodič, kojim protječe



Slika 121. Objašnjenje skin-efekta

izmjenična struja frekvencije f , izrađen kao snop velikog broja tankih "vodiča". Cjelokupni magnetski tok, koji stvara izmjenična struja, ulančuje zamišljeni "vodič" u osi realnog vodiča (položaj 1 na slici 121b), uslijed čega se u njemu inducira napon samoindukcije e . Taj je napon suprotnog predznaka od napona u koji je izvana narinut na promatrani vodič (Lencov zakon). Struja u zamišljenom "vodiču" bit će razmjerna razlici napona $u - e$. Ulančeni tok s prvim zamišljenim slojem "vodiča" izvan vodiča u osi nešto je manji, pa je tu manji i napon samoindukcije. Radi toga je struja u tom sloju nešto veća od struje u osi. Svaki slijedeći sloj "vodiča" ima manji ulančeni tok i veću gustoću struje. Struja, dakle, raste prema rubu vodiča, gdje je ulančeni tok najmanji.

Posljedica promjenljivosti toka je pojava da je u sredini presjeka vodiča gustoća struje manja, a prema rubu presjeka sve je veća. Kaže se da je struja potisnuta prema rubu vodiča.

Ta pojava se naziva *skin efekt*. Pravidno, prema izmjeničnoj struji isti se element vodiča ponaša kao da mu je otpor povećan.

Ako se promatra struja od ruba prema sredini vodiča, zapaža se da joj gustoća opada. Govori se o dubini prodiranja struje u vodič koja iznosi:

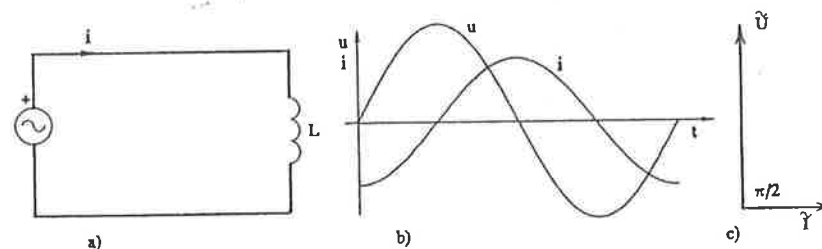
$$d = \frac{1}{\sqrt{0,5 \omega \mu \kappa}} \quad m. \quad (175)$$

To je ona dubina na kojoj će iznos struje pasti na 0.368 ($1/e$) vrijednosti struje na rubu vodiča.

- Prisjetimo se da je:
- ω kružna frekvencija, $2\pi f$
 - μ permeabilnost vodiča
 - κ specifična vodljivost.

5.5.2. Induktivitet u krugu izmjenične struje

Da bismo pojednostavnili analizu, zamislimo da strujni krug, sa zanemarivim radnim otporom, sadrži zavojnicu sa zračnom jezgrom induktiviteta L (slika 122). Izvor stvara sinusni napon koji u zatvorenom



Slika 122. Induktivitet u krugu izmjenične struje: a) strujni krug, b) trenutne vrijednosti napona i struje, c) fazorski dijagram

strujnom krugu održava struju. Uslijed toga, a u skladu sa zakonom elektromagnetske indukcije u zavojnici će se inducirati napon samoindukcije:

$$e = -L \frac{di}{dt}.$$

Prema II. Kirchhoffovu zakonu, za sliku 122a., vrijedi:

$$u + e = 0,$$

ili:

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

Separacijom varijabli ovaj se izraz može napisati u obliku:

$$di = \frac{u}{L} dt.$$

Narinuti napon je sinusan, odnosno:

$$u = U_m \sin \omega t,$$

pa će struja u strujnom krugu biti:

$$i = \frac{U_m}{L} \int \sin \omega t dt.$$

što daje:

$$i = -\frac{U_m}{\omega L} \cos \omega t,$$

ili konačno:

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (176)$$

Maksimalni je iznos ove struje:

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \quad (177)$$

a efektivna vrijednost:

$$I = \frac{U}{\omega L}. \quad (178)$$

Taj izraz podsjeća na Ohmov zakon. Nazivnik ωL u tom bi slučaju imao smisao otpora. Da bismo utvrdili prirodu veličine ωL , najprije nađimo jedinicu za mjerenje:

$$[\omega L] \frac{1}{s} \frac{Vs}{A} = \frac{V}{A} = \Omega.$$

Jedinica je, dakle, ista kao kod radnog otpora R . Tu ćemo veličinu nazvati induktivni otpor i označiti s X_L :

$$X_L = \omega L. \quad (179)$$

Sada se može napisati:

$$I = \frac{U}{X_L}, \quad (180)$$

a iz toga možemo dobiti pad napona na induktivitetu L ili na induktivnom otporu X_L :

$$U = I X_L. \quad (181)$$

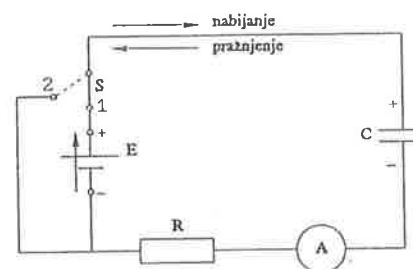
Usporedi li se izrazi za narinuti napon i struju u strujnom krugu s induktivitetom (slika 122a):

$$u = U_m \sin \omega t \quad i = I_m \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

zaključuje se da struja kasni za naponom za kut $\varphi = \pi/2$.

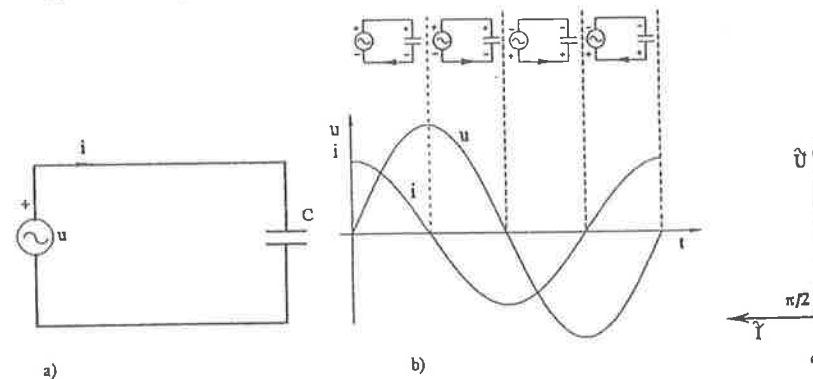
5.5.3. Kapacitet u strujnom krugu izmjenične struje

Prilikom priključka kondenzatora na izvor istosmjernog napona na njegovim se pločama skuplja električni naboj, odnosno strujnim krugom teče struja nabijanja kondenzatora $i = I_m e^{-t/T}$. Pri tome, napon kondenzatora naraste na $u = U(1 - e^{-t/T})$. Ako se hoće isključiti napon izvora, a da strujni krug ostane zatvoren, sklopka S na slici 123 se prebaci iz položaja 1 u položaj 2. Usljed napona kondenzatora, kojeg je smjer suprotan naponu izvora, strujnim krugom će poteći struja pražnjenja kondenzatora koja ima suprotan smjer od struje punjenja. Kada bismo sklopku S mijenjali položaj f puta u



Slika 123. Objašnjenje procesa nabijanja i pražnjenja kondenzatora

sekundi, utvrdili bismo da će jakost struje u promatranom strujnom krugu biti upravo proporcionalna tom ritmu. Uskoro ćemo utvrditi da jakost izmjenične struje neposredno zavisi o frekvenciji i narinutom naponu. Promatramo jednostavan strujni krug koji na izvor izmjeničnog napona $u = U_m \sin \omega t$ ima priključen samo kapacitet C ($R=0$, $L=0$), kao na slici 124a.



Slika 124. Kapacitet u strujnom krugu izmjenične struje: a) shema strujnog kruga, b) trenutne vrijednosti napona i struje, c) fazorski dijagram

Budući da vrijedi:

$$q = Cu \quad ; \quad i = \frac{dq}{dt} ,$$

$$i = C \frac{du}{dt} = U_m C \frac{d(\sin \omega t)}{dt} ,$$

dobiva se:

$$i = U_m \omega C \cos \omega t .$$

Maksimalna vrijednost struje dobije se kada je $\omega t = 0$:

$$I_m = U_m \omega C = U_m 2\pi f C . \quad (182)$$

Ovo smo već ranije naslutili: što je veća frekvencija narinutog napona, pri istom kapacitetu C , bit će veća struja u strujnom krugu.

Da bi izraz (182) dobio izgled Ohmova zakona, preuredit će se u:

$$I_m = \frac{U_m}{1/\omega C} .$$

Nazivnik očito ima prirodu otpora, a budući da je posljedica kapaciteta, označit ćemo ga s X_C i napisati:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \Omega , \quad (183)$$

odnosno:

$$I_m = \frac{U_m}{X_C} \quad \text{ili} \quad I = \frac{U}{X_C} . \quad (184)$$

Trenutna struja, kao funkcija vremena, ima oblik:

$$i = I_m \cos \omega t ,$$

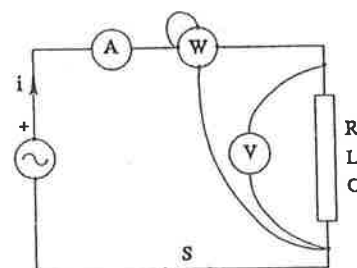
ili

$$i = I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) . \quad (185)$$

Iz usporedbe napona i struje strujnog kruga s kapacitetom C vidi se da struja prethodi naponu za kut $\varphi = \pi/2$ (slika 124).

5.6. Snaga i energija izmjenične struje

U općem slučaju pasivni strujni krug može biti sklop elemenata R , L i C . Neka kut između struje i napona izvora iznosi φ . Najprije ćemo razmotriti snagu za opći slučaj (slika 125), a zatim rezultat primijeniti na posebne slučajeve, kada se u strujnom krugu ima samo R ili L ili C .



Slika 125. Mjerenje izmjenične struje, napona i snage na trošilu kombinacije elemenata R, L, C

Ako su napon i struja određeni izrazima:

$$u = U_m \sin \omega t ,$$

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) ,$$

tada se trenutna vrijednost snage dobije kao:

$$p = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) .$$

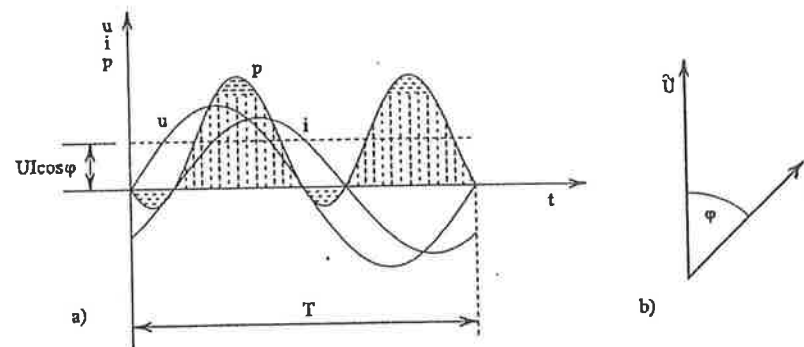
Zamjenom

$$\sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] ,$$

izlazi:

$$p = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] . \quad (186)$$

Iz ovog izraza slijedi da je snaga izmjenične struje također periodična harmonijska funkcija, ali dvostruke frekvencije u odnosu na napon i struju



Slika 126. Radna snaga trošila na slici 125.

(slika 126). Ta funkcija oscilira oko osi koja je paralelna s vremenskom osi t i od nje je udaljena za iznos $UI \cos \varphi$. Razvijena snaga će kroz vrijeme t proizvesti električnu energiju koja se, radi promjenljivosti snage, može izračunati iz:

$$W = \int_0^t p dt . \quad (187)$$

Shvatimo li energiju kao: $W=Pt$, umnožak prosječne snage P i vremena t , možemo napisati:

$$Pt = \int_0^t p dt ,$$

Uvrštavanjem (186), uz proizvoljno odabrano vrijeme $t=T$, dobije se:

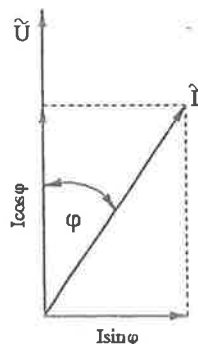
$$P = \frac{UI}{T} \int_0^T \cos \varphi dt - \frac{UI}{T} \int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt .$$

Drugi integral jednak je nuli pa je prosječna snaga:

$$P = UI \cos \varphi \quad [W] . \quad (188)$$

Obratimo pažnju na sliku 126a. $\int_0^T p dt$ daje površinu koja je okomito iscrtkana. Vodoravno iscrtkane površine (pri vrhovima poluperioda) međusobno se poništavaju, jer se nalaze na suprotnim stranama osi t .

Integral, u stvari, odgovara površini pravokutnika koji tvore $UI \cos \varphi$ i T . Dakle, prosječna snaga se dobije kao umnožak efektivne vrijednosti napona i struje s kosinusom kuta φ koji zatvaraju vektori napona i struje. Vidimo da pored umnoška napona i struje, snagu određuje i faktor $\cos \varphi$. Radi toga se $\cos \varphi$ naziva *faktor snage*. Za isti iznos napona i struje najveća je snaga pri $\varphi=0$ kada su fazori napona i struje kolinearni. Tada se snaga dobije istim



Slika 127. Radna i jalova komponenta struje

izrazom kao kod istosmjerne struje: $P=UI$. Inače, kod proizvoljnog φ , umnožak napona i struje daje tzv. prividnu snagu:

$$S = UI \quad [VA] , \quad (189)$$

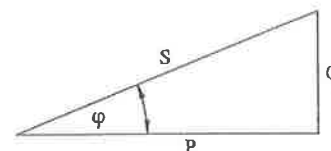
koja se mjeri u voltamperima.

Faktor snage nema fizikalnog značenja: on je matematički operator, koji pomaže da se odredi iznos projekcije struje na napon. Taj dio struje naziva se radna komponenta struje. Otuda se nameće potreba da se odredi i jalova komponenta struje: $I \sin \varphi$ (slika 127).

Na taj način definirana se i jalova ili reaktivna snaga:

$$Q = UI \sin \varphi \quad [VAR] . \quad (190)$$

Jedinica za mjerenje jalove snage je voltamper reaktivno (VAR), da bi se razlikovalo od prividne snage (VA). Snage P , S i Q čine trokut snage koji je prikazan na slici 128.



Slika 128. Trokut snage

Iz izraza za radnu, jalovu i prividnu snagu:

$$\begin{aligned} P &= UI \cos \varphi , \\ Q &= UI \sin \varphi , \\ S &= UI , \end{aligned}$$

izlazi da vrijedi relacija:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} . \quad (191)$$

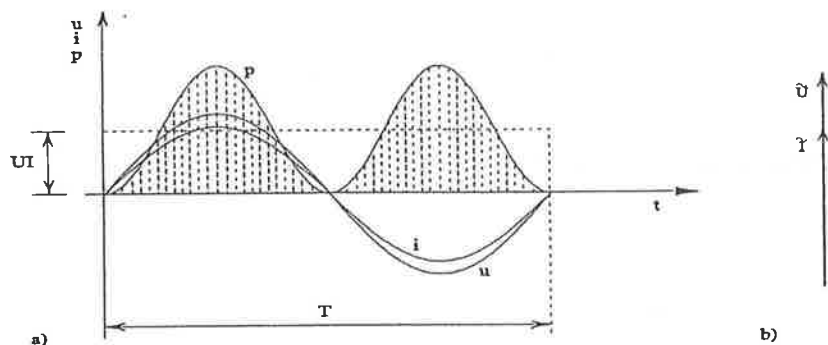
Ako su poznati napon, struja i snaga, lako se izračuna $\cos \varphi$:

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} . \quad (192)$$

Razmotrimo sada tri posebna slučaja:

- ① Najprije uzmimo da je $\varphi=0$. Na izvor izmjeničnog napona priključen je samo radni otpor (slika 120a). Na osnovu izraza za trenutnu vrijednost snage (186):

$$\begin{aligned} p &= UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] , \\ \text{uz } \varphi=0, \text{ izlazi:} \\ p &= UI[1 - \cos 2\omega t] . \end{aligned} \quad (193)$$



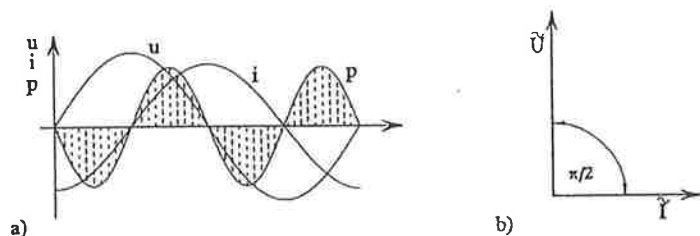
Slika 129. Radna snaga kada trošilo sadrži samo radni otpor

Trenutna snaga oscilira oko iznosa UI . To je istovremeno srednja vrijednost snage. Iz slike 129 vidljivo je da $\int^T p dt$ daje površinu koja je po iznosu jednaka pravokutniku kojeg su stranice UI i T .

- ② Neka je na strujni krug priključen samo induktivitet L (slika 122a). Tada je kut $\varphi = \pi/2$, a trenutna snaga:

$$p = -UI \sin 2\omega t, \quad (194)$$

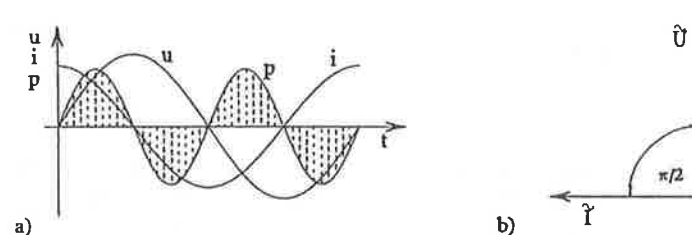
što znači da trenutna snaga oscilira oko vremenske osi. Integral $\int^T p dt$ jednak je nuli. Prema slici 130 iscrtkane površine poluperioda



Slika 130. Kada je u krugu samo induktivitet, nema radne snage

međusobno se poništavaju. Radne snage nema. Govorimo o jalovoj snazi $Q = UI \sin \varphi$.

- ③ Slično stanje nastaje ako se na izmjenični napon priključi kapacitet C (slika 124a). U ovom slučaju struja prethodi naponu za $\pi/2$.



Slika 131. Kada je u strujnom krugu samo kapacitet, nema radne snage

Srednja snaga:

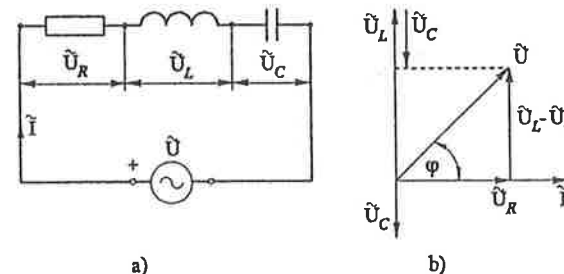
$$p = UI \sin 2\omega t,$$

oscilira oko vremenske osi t (slika 131), pa je očito da je integral $\int^T p dt$ jednak nuli, što znači da nema razvijene energije ni u ovom slučaju.

5.7. Kombinacija elemenata R, L, C u strujnom krugu izmjenične struje

Do sada smo vidjeli jednostavne strujne krugove s R ili L ili C i upoznali induktivnu i kapacitivnu reaktanciju X_L i X_C . Nadalje, upoznali smo snagu strujnog kruga s kombinacijom elemenata R , L i C , ali pri tome nismo vodili računa o tome kako su međusobno spojeni ovi elementi. Dobili smo općeniti izraz za snagu kombiniranog spoja, a da nismo ulazili u problem proračuna ukupne struje ni ukupnog otpora. Sada ćemo to uraditi.

5.7.1. Serijski spoj elemenata R, L i C



Slika 132. Serijski spoj elemenata R, L i C: a) shema spoja, b) fazorski dijagram

Za fazore napona i struja u strujnom krugu na slici 132a, mogu se primijeniti Kirchhoffovi zakoni:

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C, \\ \vec{I} &= \vec{I}_R = \vec{I}_L = \vec{I}_C.\end{aligned}$$

Ako se kao referentna veličina uzme fazor struje \vec{I} , vrijedi fazorski dijagram prema slici 132b. Pad napona na radnom otporu u fazi je sa strujom. Pad napona na induktivnoj reaktanciji prethodi struji $\pi/2$, a pad napona na kapacitivnoj reaktanciji kasni za strujom $\pi/2$.

Na osnovi dijagrama na slici 132b slijedi:

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2.$$

Ako se u gornju jednadžbu uvrsti $U_R = IR$; $U_L = IX_L$; $U_C = IX_C$; dobije se:

$$U^2 = I^2 R^2 + I^2 (X_L - X_C)^2,$$

odnosno:

$$U = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Ako se ovu jednadžbu podijeli s I , dobit će se:

$$\frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Izraz na desnoj strani predstavlja otpor strujnog kruga koji ima u seriju spojene elemente R , L i C (slika 132a). To je, u stvari, kombinacija radnog otpora i reaktancija koja se naziva *impedancija* i označava slovom Z :

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad (195)$$

ili

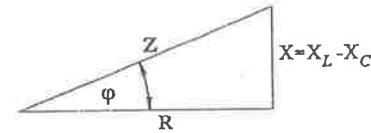
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (196)$$

Trokutu napona (slika 132b) razmjernan je trokut otpora (slika 133) koji se dobije dijeljenjem fazorske jednadžbe napona s fazorom struje \vec{I} . Sada se može odrediti kut φ između ukupnog napona i struje:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R}, \quad (197)$$

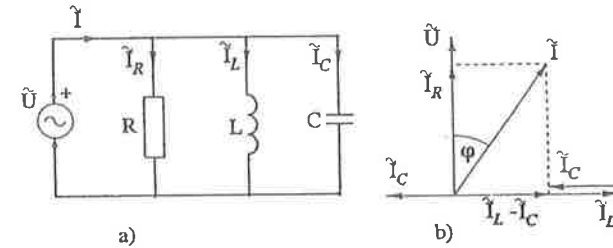
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}. \quad (198)$$

Hoće li fazni kut biti induktivan (struja zaostaje za naponom) ili kapacitivan (struja prethodi naponu), zavisi o tome koja reaktancija (X_L ili X_C) prevladava.



Slika 133. Trokut otpora

5.7.2. Paralelni spoj elemenata R , L i C



Slika 134. Paralelni spoj elemenata R, L, C : a) shema spoja, b) fazorski dijagram

Za fazore napona i struja paralelnog spoja elemenata R, L, C (slika 134), vrijede Kirchhoffovi zakoni na osnovu kojih se može napisati:

$$\vec{U} = \vec{U}_R = \vec{U}_L = \vec{U}_C,$$

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C,$$

što je prikazano fazorskim dijagramom (slika 134b), gdje je kao referentna veličina uzet napon.

Iz slike 134. se vidi da za odnose struja i napona vrijedi:

$$\vec{I}_R = \frac{\vec{U}}{R}, \quad \text{struja je u fazi s naponom } (\varphi = 0),$$

$$\vec{I}_L = \frac{\vec{U}}{X_L}, \quad \text{struja kasni za naponom } (\varphi = +\frac{\pi}{2}),$$

$$\vec{I}_C = \frac{\vec{U}}{X_C}, \quad \text{struja prethodi pred naponom } (\varphi = -\frac{\pi}{2}).$$

Ako se umjesto otpora uvedu vodljivosti, gdje je:

$$G = 1/R, \quad \text{omska vodljivost,} \quad (199)$$

$$B_L = 1/X_C = 1/\omega L, \quad \text{induktivna vodljivost,} \quad (200)$$

$$B_C = 1/X_L = \omega C, \quad \text{kapacitivna vodljivost,} \quad (201)$$

tada fazorska jednadžba za struje glasi:

$$\vec{I} = \vec{U}G + \vec{U}B_L - \vec{U}B_C.$$

Iz vektorskog dijagrama izlazi efektivna vrijednost ukupne struje:

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2,$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{(UG)^2 + (UB_L - UB_C)^2},$$

ili:

$$I = U \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = U \sqrt{G^2 + B^2}. \quad (202)$$

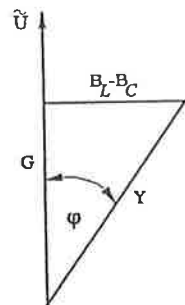
Izraz $\sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{G^2 + B^2}$ predstavlja ukupnu vodljivost paralelnih grana i označava se s Y :

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad (203)$$

iz čega izlazi:

$$I = UY. \quad (204)$$

Odnos vodljivosti pojedinih grana prikazan je slikom 135.



Slika 135. Odnos vodljivosti

Fazni kut napona izvora i ukupne struje izračunava se iz trokuta vodljivosti:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = \frac{B_L - B_C}{G} = \frac{B}{G}, \quad (205)$$

a odavde izlazi:

$$\varphi = \arctan \frac{B}{G}. \quad (206)$$

Ako prevladava induktivna reaktancija, ukupna struja zaostaje za naponom izvora ($\varphi > 0$). Ako prevladava kapacitivna reaktancija, ukupna struja prethodi naponu izvora ($\varphi < 0$).

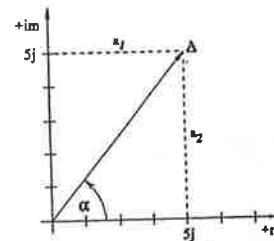
5.8. Primjena simboličke metode u rješavanju mreža izmjenične struje

U rješavanju jednostavnih strujnih krugova do sada smo se služili grafičkom metodom pomoću fazora. No već kod malo složenije mreže ta metoda ne bi bila od velike koristi. Radi toga je uveden simbolički način predstavljanja fazora kompleksnim brojem. Na taj su način geometrijske operacije s fazorima zamijenjene algebarskim operacijama s kompleksnim brojevima. Fazorska i simbolička metoda u rješavanju mreža izmjenične struje zamjenjuje sistem diferencijalnih jednačbi.

5.8.1. Nekoliko napomena o kompleksnim brojevima

Radi jednostavnije provedbe analize, pri proračunu izmjeničnih električnih mreža, primijenjuje se simbolički račun. Podsjetit ćemo se na neka pravila povezana s kompleksnim brojevima.

- Kompleksna ravnina definirana je s dvije međusobno okomite osi kojih sjecište nazivamo ishodište.
- Na vodoravnu os nanosi se realni, a na okomitu imaginarni broj.
- Imaginarna jedinica je $j = \sqrt{-1}$.
- Svakoj točki ovakve ravnine jednoznačno pripada jedan realni i jedan imaginarni broj. To znači da je točka određena jednim kompleksnim brojem.



Slika 136. Kompleksna ravnina s kompleksnim brojem

Kompleksni broj se može prikazati u tri oblika:

$$1. \quad \underline{A} = a_1 + ja_2. \quad (207)$$

Za kompleksni broj \underline{A} na slici 136 to znači:

$$\underline{A} = 4 + j5.$$

2. Prema slici 136 također vrijedi:

$$a_1 = A \cos \alpha,$$

$$a_2 = A \sin \alpha,$$

$$\underline{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha \quad \text{ili} \quad \underline{A} = A (\cos \alpha + j \sin \alpha). \quad (208)$$

3. Kompleksni broj se može prikazati Eulerovom formulom kao eksponencijalna funkcija:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha}. \quad (209)$$

Sva tri oblika imaju isto matematičko značenje, a u praksi će se primijeniti onaj oblik koji je najpogodniji za analizu.

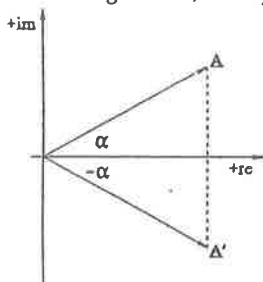
Veza između veličina za sve oblike glasi:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad (210)$$

$$\alpha = \arctg \frac{a_2}{a_1}. \quad (211)$$

A je apsolutni iznos ili modul kompleksnog broja, a kut α je njegov argument.

- Konjugirano-kompleksnim brojevima nazivaju se dva kompleksna broja jednakih modula i argumenta, ali suprotnih predznaka argumenata (slika 137).



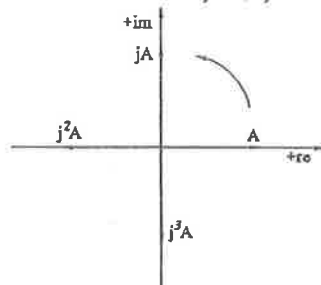
Slika 137. Konjugirano kompleksni brojevi

$$\underline{A} = a_1 + ja_2 \quad \underline{A}' = a_1 - ja_2, \quad (212)$$

$$\underline{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha \quad \underline{A}' = A \cos \alpha - jA \sin \alpha, \quad (213)$$

$$\underline{A} = A e^{j\alpha} \quad \underline{A}' = A e^{-j\alpha}. \quad (214)$$

- Ako se kompleksni broj \underline{A} nalazi u realnoj osi (kut $\alpha=0$), tada je određen s $\underline{A}=A$. Ako se nalazi u imaginarnoj osi, tada je određen s $\underline{A}=jA$.
- Množenjem s $j = \sqrt{-1}$ kompleksni broj \underline{A} se zakreće u pozitivnom smjeru za kut $\pi/2$. Ako se množenje s j primijeni na kompleksni broj koji leži u + realnoj osi, isti seli u + imaginarnu os. Množenjem s j^2 , kompleksni broj seli u negativnu realnu os, zakrene se za kut π . Ako se množi iznosom j^3 , kompleksni broj će se naći u negativnoj imaginarnoj osi ($3\pi/2$). Množenjem s j^4 , kompleksni broj se zakrene za 2π radijana, tj. dođe u početni položaj (slika 138).



Slika 138. Zakretanje vektora za $\pi/2$

5.8.2. Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi se zbrajaju tako da se posebno zbroje realni a posebno imaginarni dijelovi. Npr. ako su zadana dva kompleksna broja: $\underline{Z}_1=R_1+jX$ i $\underline{Z}_2=R_2+jX_2$ tada je njihova suma:

$$\underline{Z} = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2). \quad (215)$$

Kompleksni brojevi se oduzimaju tako da se posebno oduzmu realni a posebno imaginarni dijelovi. Iz $\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = 0$ izlazi da su dva kompleksna broja jednaka onda kada su im posebno jednaki realni dijelovi i posebno jednaki imaginarni dijelovi.

5.8.3. Množenje kompleksnih brojeva

Ako su dva kompleksna broja zadana u algebarskom obliku, oni se množe tako da se oba dijela jednog broja množe s oba dijela drugog kompleksnog broja. Npr.: $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = (R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) = R_1R_2 - X_1X_2 + j(R_1X_2 + R_2X_1) = R + jX$. (216)

Ako su kompleksni brojevi dati u eksponencijalnom obliku, množenje je još jednostavnije:

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = Z_1 e^{j\varphi_1} Z_2 e^{j\varphi_2} = Z_1 Z_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = Z e^{j\varphi}. \quad (217)$$

Umnožak dvaju kompleksnih brojeva daje novi kompleksni broj čiji je modul jednak umnošku dvaju modula, a argument mu je zbroj dvaju argumenata.

5.8.4. Dijeljenje kompleksnih brojeva

Ako su kompleksni brojevi dati u algebarskom obliku, tada se dijele tako da se razlomak proširi s konjugirano kompleksnim brojem nazivnika. Vidimo to na primjeru:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{R_1 + jX_1}{R_2 + jX_2} = \frac{R_1 + jX_1}{R_2 + jX_2} \frac{R_2 - jX_2}{R_2 - jX_2} = \frac{R_1R_2 + X_1X_2}{R_2^2 + X_2^2} + j \frac{R_2X_1 - R_1X_2}{R_2^2 + X_2^2} = R + jX, \quad (218)$$

$$\underline{Z} = R + jX.$$

Ako su kompleksni brojevi zadani u eksponencijalnom obliku, dijeljenje je znatno jednostavnije:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1 e^{j\varphi_1}}{Z_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = Z e^{j\varphi} = \underline{Z}. \quad (219)$$

Novi modul je jednak količniku modula, a argument je jednak razlici argumenata.

5.8.5. Potenciranje i korjenovanje kompleksnog broja

Na osnovu 5.8.3. za potenciranje kompleksnog broja vrijedi:

$$\underline{Z}^n = Z^n e^{jn\varphi} = Z^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi). \quad (220)$$

Budući da je vađenje korijena inverzna operacija potenciranja, treba voditi

računa da n -ti korijen nekog broja ima n rješenja. Za korjenovanje zadanog kompleksnog broja $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ vrijedi:

$$\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{Z} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + j \sin \frac{\varphi}{n} \right). \quad (221)$$

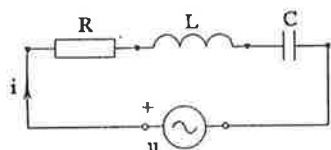
5.8.6. Logaritam kompleksnog broja

Ako je kompleksni broj zadan u eksponencijalnom obliku, $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$, tada prirodni logaritam daje:

$$\ln \underline{Z} = \ln(Ze^{j\varphi}) = \ln Z + j\varphi, \quad (222)$$

što opet daje kompleksni broj.

5.8.7. Primjena na serijski spoj R, L, C. Kompleksna impedancija



Slika 139. Serijski spoj elemenata R, L i C

Za strujni krug na slici 139 s naponom izvora: $u = U_m \sin \omega t$ vrijedi diferencijalna jednačina:

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (224)$$

Partikularno rješenje jednačine (224) je:

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi), \quad (225)$$

gdje je nepoznato I_m i φ . Da bismo odredili ove iznose, primjenit ćemo simboličku metodu.

Jednačina za struju (225) u simboličkom obliku predstavlja se kompleksnim brojem:

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t - \varphi)}, \quad (226)$$

a njena derivacija i integral:

$$\frac{di}{dt} = j\omega I_m e^{j\omega t - j\varphi},$$

$$\int i dt = \frac{1}{j\omega} I_m e^{j\omega t - j\varphi}.$$

Ako se ovo unese kao zamjena u (224), dobit će se algebarska jednačina s kompleksnim brojevima:

$$U_m e^{j\omega t} = R I_m e^{j\omega t} e^{-j\varphi} + L j\omega I_m e^{j\omega t} e^{-j\varphi} + \frac{1}{C} \frac{1}{j\omega} I_m e^{j\omega t} e^{-j\varphi}. \quad (227)$$

Dijeljenjem ove jednačine s $\sqrt{2} e^{j\omega t}$ prelazi se na mirujuće fazore s efektivnim vrijednostima:

$$U e^{j0} = R I e^{-j\varphi} + I e^{-j\varphi} j\omega L + I e^{-j\varphi} \frac{1}{j\omega C},$$

što se može napisati kao:

$$\underline{U} = \underline{I} R + L j\omega \underline{I} - \frac{j}{\omega C} \underline{I}, \quad (228)$$

odnosno:

$$\underline{U} = \underline{I} \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right],$$

što se može kraće napisati:

$$\underline{U} = \underline{I} [R + j(X_L - X_C)],$$

ili

$$\underline{U} = \underline{I} (R + jX).$$

Izrazi u zagradama predstavljaju kompleksnu impedanciju:

$$\underline{Z} = R + jX, \quad (229)$$

pa se može napisati:

$$\underline{U} = \underline{I} \underline{Z},$$

ili

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}, \quad (230)$$

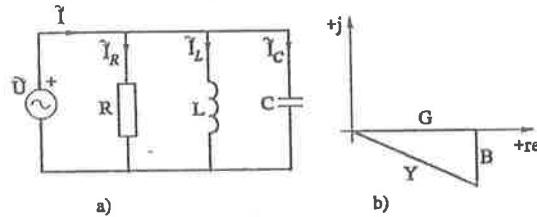
što predstavlja Ohmov zakon u kompleksnoj formi za strujni krug izmjenične struje.

Jednačina (224), u stvari, predstavlja II. Kirchhoffov zakon za trenutne vrijednosti napona i struje za strujni krug na slici 139. Nadalje, jednačina (228) je taj isti zakon napisan u kompleksnom obliku. Na osnovu toga se može napisati opći oblik II. Kirchhoffova zakona koji vrijedi u izmjeničnim mrežama:

$$\sum_1^g \underline{E}_n = \sum_1^g \underline{I}_n \underline{Z}_n,$$

gdje je g broj grana koje sačinjavaju konturu, a E_n , I_n i Z_n kompleksne EMS, struje i impedancije elemenata koji se nalaze u promatranoj konturi.

5.8.8. Primjena na paralelni spoj R,L,C. Kompleksna vodljivost



Slika 140. Paralelni spoj elemenata R,L,C: a) shema spoja, b) trokut vodljivosti

Prema Kirchhoffovim zakonima, za trenutne vrijednosti napona i struje za shemu na slici 140a vrijede jednadžbe:

$$u = u_R = u_L = u_C,$$

$$i = i_R + i_L + i_C.$$

Od ranije znamo da vrijedi:

$$i_R = Gu, \quad i_L = \frac{1}{L} \int u dt, \quad i_C = C \frac{du}{dt},$$

pa se može pisati:

$$i = Gu + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt}. \quad (231)$$

Iz analogije s prethodnim primjerom (serijski spoj R, L i C) slijedi kompleksna fazorska jednadžba s efektivnim vrijednostima:

$$\tilde{I} = G\tilde{U} + \frac{1}{L} \frac{\tilde{U}}{j\omega} + Cj\omega\tilde{U}, \quad (232)$$

što daje:

$$\tilde{I} = \tilde{U} \left[G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right],$$

$$\tilde{I} = \tilde{U} [G + j(B_C - B_L)] = \tilde{U} [G - j(B_L - B_C)],$$

$$\tilde{I} = \tilde{U}(G - jB). \quad (233)$$

Reaktivna vodljivost imaće predznak + ako prevladava kapacitivna vodljivost, a predznak minus ako prevladava induktivna vodljivost.

Dijeljenjem jednadžbe (233) s fazorom napona dobije se kompleksna vodljivost:

$$Y = \frac{\tilde{I}}{\tilde{U}} = G - jB, \quad (234)$$

što daje:

$$\underline{Y} = Y e^{-j\varphi}, \quad (235)$$

ili:

$$\underline{Y} = Y(\cos\varphi - j\sin\varphi), \quad (236)$$

gdje je:

$$Y\cos\varphi = G, \quad Y\sin\varphi = B.$$

Izraz (234) se može napisati i u obliku:

$$\tilde{I} = \tilde{U}Y \quad \text{ili} \quad \tilde{U} = \frac{\tilde{I}}{Y}. \quad (237)$$

Jednadžba (231) za strujni krug na slici 140. predstavlja I. Kirchhoffov zakon za trenutne vrijednosti, a jednadžba (232) taj isti zakon u kompleksnom obliku. Uopćeno, I. Kirchhoffov zakon u simboličkom obliku glasi:

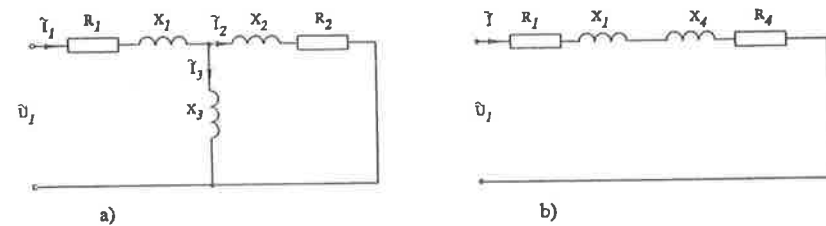
$$\sum_1^g \tilde{I}_n = 0,$$

gdje je g broj grana koje izlaze iz promatranog čvorišta.

Vidimo da je forma Kirchhoffovih zakona za mreže istosmjernih i izmjeničnih struja ista, s tim što su zakoni za izmjenične mreže napisani u kompleksnom obliku.

Primjer proračuna ukupne impedancije simboličkim računom:

Za strujni krug na slici 141. zadano je: $R_1=R_2=2\Omega$, $X_1=X_2=X_3=3\Omega$ i $U=100V$. Treba odrediti ukupnu kompleksnu impedanciju strujnog kruga i struju I_1 .



Slika 141. Izračunavanje ukupne impedancije iz kombiniranog spoja više impedancija: a) zadana shema, b) transfigurirana shema

Najprije ćemo uvesti kompleksne impedancije za sve tri grane strujnog kruga:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= R_1 + jX_1 & \underline{Z}_1 &= 2 + j3 \\ \underline{Z}_2 &= R_2 + jX_2 & \underline{Z}_2 &= 2 + j3 \\ \underline{Z}_3 &= R_3 + jX_3 & \underline{Z}_3 &= j3 \end{aligned}$$

Potom treba odrediti kompleksnu impedanciju paralelnog spoja grana 2 i 3, po pravilima paralelnog spajanja otpora, a zatim ukupnu impedanciju i struju I_1 :

$$\underline{Z}_4 = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(2+j3)(j3)}{2+j3+j3} = \frac{-9+j6}{2+j6} \cdot \frac{2-j6}{2-j6}$$

$$\underline{Z}_4 = \frac{(-9+j6)(2-j6)}{2^2+6^2} = \frac{9}{20} + j\frac{33}{20}$$

Ukupnu impedanciju dobit ćemo kao zbroj impedancija \underline{Z}_1 i \underline{Z}_4

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 = 2+j3 + \frac{9}{20} + j\frac{33}{20} = \frac{49}{20} + j\frac{93}{20}$$

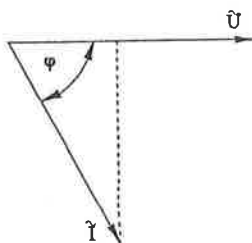
$$\underline{Z} = \frac{49}{20} + j\frac{93}{20}$$

Traženu struju dobit ćemo diobom modula napona (napon uzimamo kao referentnu veličinu!) i ukupne impedancije:

$$\underline{I}_1 = \frac{100}{\left(\frac{49}{20} + j\frac{93}{20}\right) \left(\frac{49}{20} - j\frac{93}{20}\right)}$$

$$\underline{I}_1 = 8.87 - j16.83$$

$$I_1 = 19.03 \text{ A}, \quad \varphi = -62^\circ 12' 33''$$



Slika 142. Fazorski dijagram napona i struje za shemu na slici 141.

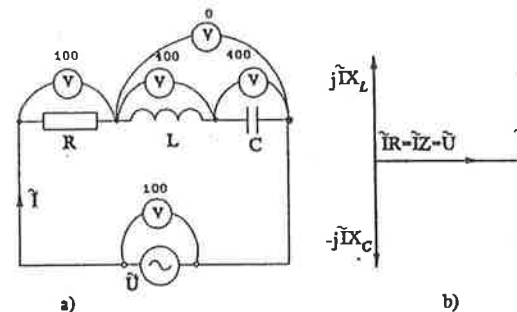
5.9. Rezonancija u strujnim krugovima izmjenične struje

Neka je zadan strujni krug u kojem su serijski spojeni R, L i C. Razmatrat ćemo poseban slučaj kada L, C i f imaju takve vrijednosti koje daju:

$$X_L = X_C$$

Tada je: $X=0$, $Z=R$, $\varphi=0$.

Impedancija je u ovom slučaju jednaka radnom otporu, a struja je u fazi s narinutim naponom. Ako je radni otpor malen, u ovom strujnom krugu struja će biti relativno velika, a naponi na X_L i X_C mogu biti znatno veći od napona izvora. Pogledajmo to na primjeru (slika 143).



Slika 143. Strujni krug u kojem može nastati naponska rezonancija: a) shema strujnog kruga b) fazorski dijagram pri naponskoj rezonanciji

Zadani su podaci: $R=5\Omega$, $X_L=20\Omega$, $X_C=20\Omega$, a narinuti napon $U=100V$. Treba odrediti napone na pojedinim elementima i grupi LC. Iz:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

izlazi da je impedancija jednaka radnom otporu:

$$Z = R = 5\Omega$$

a struja:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A}$$

Sada se mogu izračunati naponi pojedinih elemenata:

$$U_R = IR = 20 \cdot 5 = 100 \text{ V}$$

$$U_L = IX_L = 20 \cdot 20 = 400 \text{ V}$$

$$U_C = IX_C = 20 \cdot 20 = 400 \text{ V}$$

Izlazi da su naponi na elementima L i C jednaki po iznosu, ali suprotni po smjeru. To znači da je zbroj napona na elementima jednak nuli, što se

može potvrditi mjerenjem napona kao na slici 143. U našem primjeru napon na elementima L i C četiri je puta veći od napona izvora. Ova pojava može izazvati tako velike napone koji će uništiti elemente L i C.

Stanje kada se kompenziraju naponi na elementima L i C naziva se *serijskom* ili *naponskom rezonancijom*. Uvjet za pojavu naponske rezonancije glasi:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} . \quad (238)$$

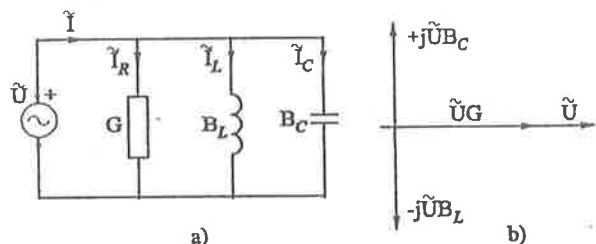
Iz (238) slijede odnosi ovih veličina:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} , \quad (239)$$

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} , \quad (240)$$

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} . \quad (241)$$

Iz ovoga izlazi da se rezonancija može postići podešavanjem frekvencije, induktiviteta ili kapaciteta.



Slika 144. Strujni krug u kojem može nastati strujna rezonancija: a) shema spoja, b) fazorski dijagram pri strujnoj rezonanciji

Slično se događa i ako su elementi R, L i C spojeni paralelno (slika 144). U ovom se primjeru struje kompenziraju pa se ova rezonancija naziva *paralelna* ili *strujna rezonancija* koja nastupa kada je $B_L = B_C$. Izlazi da su uvjeti za pojavu strujne rezonancije isti kao za naponsku rezonanciju (238):

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} .$$

Kod elektroenergetskih postrojenja rezonancija se izbjegava da u pojedinim dijelovima ne bi došlo do velikih napona i struja. U radiotehnici

rezonancija se koristi za podešavanje. Strujni krug antene kod radioaparata ima svitak (L) i kondenzator (C) spojene u seriju. Odašiljači u prijemniku induciraju napon svoje frekvencije. Kad se podesivi kondenzator prijemnika postavi tako da se strujni krug nalazi u rezonanciji na frekvenciji željene stanice, struja koja odgovara toj frekvenciji velika je. Uslijed toga se na krajevima kondenzatora javlja veliki napon. Na taj se način za jedan položaj kondenzatora strujni krug nalazi u rezonanciji samo s jednom frekvencijom. Druga će frekvencija razviti sasvim male struje pa se signal neće čuti.

Vratimo se ponovo na uvjet neophodan za rezonanciju:

$$(2\pi f)^2 = \frac{1}{LC} ,$$

ili:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1/C}{L}} . \quad (242)$$

Frekvencija pri kojoj nastupa rezonancija naziva se *vlastitom frekvencijom* električnog strujnog kruga. Uočavamo da jednačba (242) ima isti opis kao i jednačba za frekvenciju mehaničkog vibracijskog sustava:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} . \quad (243)$$

Usporedbom se vidi da induktivitet odgovara masi ili inerciji, a kapacitet recipročnoj vrijednosti koeficijenta krutosti.

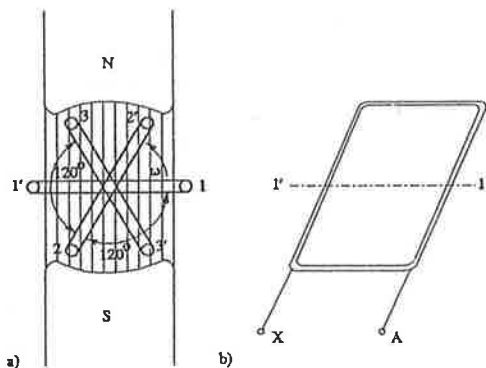
Usporedbom matematičkih opisa elemenata električnog i mehaničkog sustava otkriva se iznenađujuća međusobna sličnost koja se po njihovu izgledu i građi nikako ne bi mogla pretpostaviti. Ispada da se ta dva sustava, unatoč vizuelnim i stvarnim različitostima, mogu opisati jednakim matematičkim relacijama. Svaki element jednog sustava ima svođ dvojnika u drugom sustavu. Njihovi su matematički opisi jednaki pa zato kažemo da su međusobno *analogni*.

5.10. Višefazne struje

5.10.1. Trofazne struje

Do sada smo promatrali strujni krug izmjenične struje s jednim naponom izvora kojega je struja zatvarala određeni kut φ prema naponu. U tom slučaju govori se o jednofaznom izvoru. Na slici 118 vidjeli smo princip kako nastaje taj izmjenični napon. Uzmimo sada isti princip, samo umjesto jednog svitka, na rotor smjestimo tri svitka, i to tako da im se osi poklapaju,

a pozitivne normale ravnina svitaka međusobno zatvaraju kut $2\pi/3$ radijana = 120° (slika 145a).



Slika 145. Nastajanje trofaznog napona: a) raspored svitaka u prostoru, b) jedan izdvojeni svitak sa N zavoja

Usporedba induciranih napona pojedinih namota

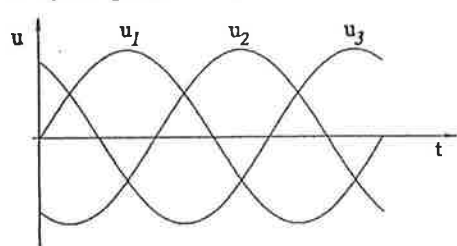
Prilikom vrtnje rotora brzinom ω , u svakom od tri svitka (slika 145a) ponavljat će se ono što smo utvrdili prema slici 117, s tim što će inducirani napon $u=f(t)$ svakog svitka odgovarati položaju svitka u tom trenutku. Napon u pojedinom svitku imat će vrijednost:

$$(1 - 1') : u_1 = U_m \sin \omega t ,$$

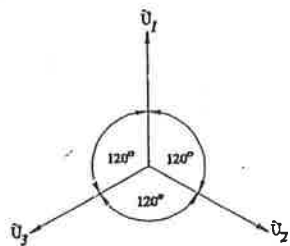
$$(2 - 2') : u_2 = U_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) ,$$

$$(3 - 3') : u_3 = U_m \sin \left(\omega t - 2 \frac{2\pi}{3} \right) .$$

Ovdje se pretpostavlja da su sva tri svitka geometrijski identična.



Slika 146. Vremenski pomak napona kod trofaznog sustava



Slika 147. Fazorski prikaz sustava napona iz slike 146.

Ako se fazor napona u_1 postavi u realnu os, a cijeli sustav napona napiše u kompleksnom obliku, dobit će se:

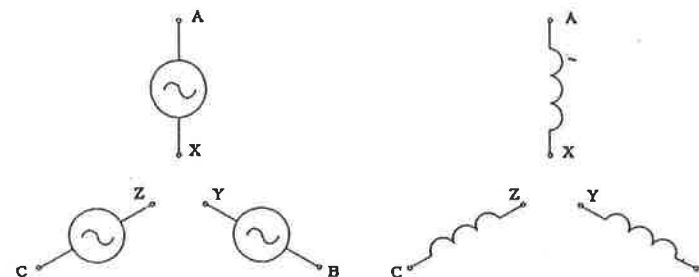
$$\vec{U}_1 = U ,$$

$$\vec{U}_2 = U e^{-j2\pi/3} ,$$

$$\vec{U}_3 = U e^{-j4\pi/3} ,$$

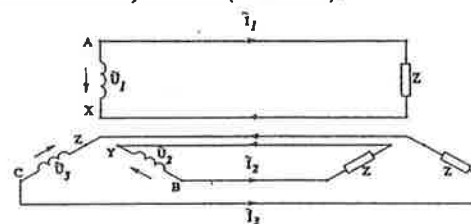
gdje je $U = U_m / \sqrt{2}$, efektivna vrijednost napona.

Običaj je da se kao referentna os uzme ordinata koordinatnog sustava pa će fazorski dijagram promatranog (trofaznog) sustava napona biti kao na slici 147.

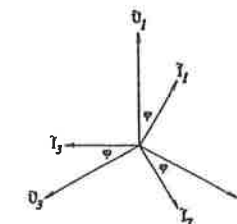


Slika 148. Svitak svake faze kao izvor jednog faznog napona

Svaki pojedini namot predstavlja izvor jednog napona (slika 148). Ako ih promatramo zajedno, govorimo o sustavu napona. Sada možemo svaki od ta tri izvora opteretiti s po jednom impedancijom \underline{Z} . Neka su te impedancije međusobno jednake (slika 149).



Slika 149. Šestožični trofazni prijenosni sustav

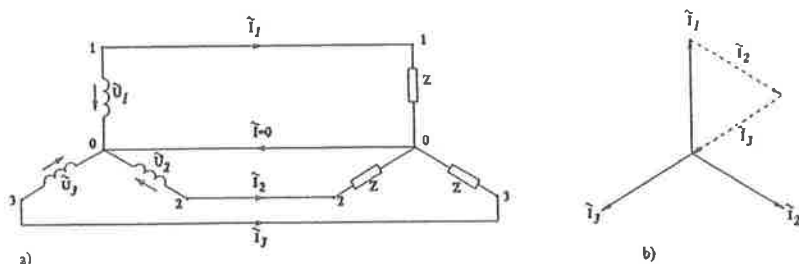


Slika 150. Odnos napona i struja trofaznog sustava

Slika 149. predstavlja simetrični sustav. Kod simetričnog sustava sve su struje jednake po iznosu i fazno pomaknute za 120° (kao i naponi), što znači da je kut između napona i struje (φ) za svaki strujni krug jednak.

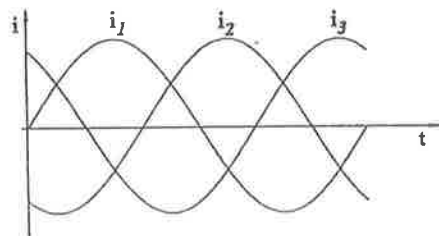
Zbog tri izvora imamo tri struje pa se govori o tri faze. Fazorski dijagram napona i struja simetričnog trofaznog sustava prikazan je na slici 150.

Što će se dogoditi ako se tri točke (X, Y, Z) izvora spoje u jednu točku? Te tri točke bit će dovedene na isti potencijal, ali se naponi U_1 , U_2 i U_3 neće promijeniti. To se, dakle, smije napraviti. Kaže se da je sustav spojen u *zvijezdu*, a zajednička točka naziva se *zvjezdlište*. Ako se to isto uradi na strani trošila, dobit ćemo dvije točke koje se sada međusobno spajaju jednim vodom. Kroz taj vod teče suma struja sva tri prethodna voda koja je jednaka nuli (slika 151).



Slika 151. Četverožilni trofazni prijenosni sustav: a) shema spoja izvora i trošila, b) fazorski dijagram struja

Za simetrični trofazni sustav, gdje su sve tri struje jednakog iznosa i kasne za pripadajućim naponom za isti kut φ , slika trenutnih trofaznih struja (slika 152) jednaka je kao slika napona (Slika 146).



Slika 152. Struje simetričnog trofaznog sustava

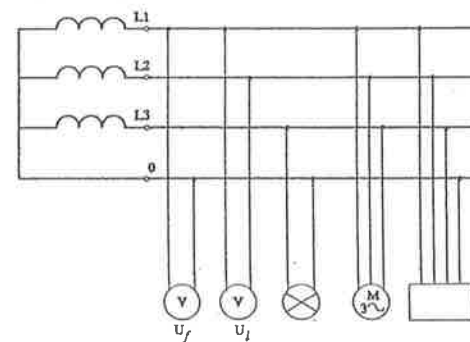
Spajanjem triju vodiča u jedan, šestožilni vod postaje četverožilni. Kod simetričnog sustava nije potreban ni onaj četvrti vod, jer kroz njega ne teče struja. Prema slici 152 u svakom trenutku suma je struja jednaka nuli. Isto se vidi iz fazorskog dijagrama struja (slika 151b). Na osnovi toga može se zaključiti da je razlika potencijala zvjezdlišta izvora i trošila jednaka nuli. Zvjezdlište se još naziva *nultočka*.

Iz svega što je do sada rečeno, nameće se zaključak o prednosti trofaznog sustava u odnosu na jednofazni. Za prijenos jednake količine električne energije potrebno je upola manje vodiča. Do sada smo vidjeli da se može spajanje izvora i trošila izvesti spojem zvijezda. Kasnije ćemo vidjeti da se ti isti trofazni elementi mogu spojiti i u trokut. Obradit ćemo odnose struja i napona za oba načina posebno. Promatrani izvor može biti generator, a uvjetno i transformator. Za sada napomenimo samo to da se trofazni generator kao izvor napona uvijek spaja u zvijezdu radi eliminiranja trećeg harmonika iz oblika napona.

Napon između stezaljki jednog namota (faze) naziva se fazni napon, U_f . Napon između krajnjih točaka dvaju namota (između dviju linija voda, međufazni napon), naziva se linijski napon, U_l . Slično vrijedi za struje. Fazna je struja ona struja koja teče namotom jedne faze, I_f . Linijska struja je ona struja koja teče linijskim vodom.

5.10.2. Odnos napona i struja za spoj namota u zvijezdu

Na slici 153 prikazani su primjeri jednofaznog i trofaznog spajanja trošila na trofazni izvor spojen u zvijezdu (Y). Jednofazno trošilo jednim se krajem spaja na fazni vod, a drugim na nulvod.



Slika 153. Spajanje jednofaznih i trofaznih trošila na trofazni izvor s nul vodom

Iz slike 154 vidi se da je svaka fazna struja izvora ujedno i linijska:

$$\tilde{I}_f = \tilde{I}_l \quad (244)$$

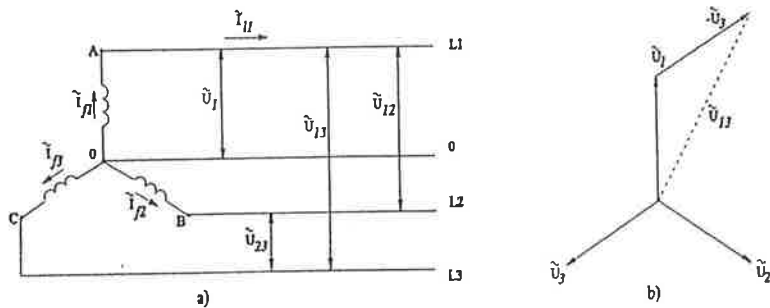
a prema slici 154b. za napone izlazi:

$$\tilde{U}_{13} = \tilde{U}_1 - \tilde{U}_3 \quad (\text{ili} \quad \tilde{U}_{13} = \tilde{U}_{f1} - \tilde{U}_{f3}; U_{f1} = U_{f2} = U_{f3}), \quad (245)$$

pri čemu za module vrijedi:

$$U_l = 2 U_f \cos 30^\circ = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} U_f,$$

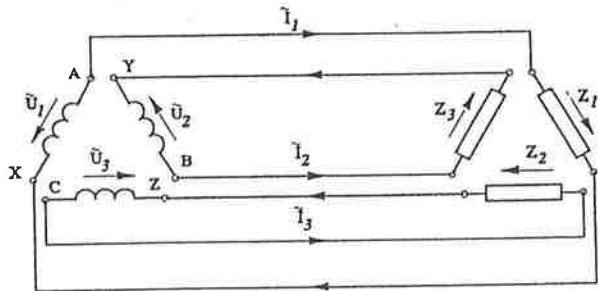
$$U_l = \sqrt{3} U_f. \quad (246)$$



Slika 154. Odnos linijskih i faznih napona i struja za spoj namota u zvijezdu

5.10.3. Spoj namota u trokut

Spoj na slici 149. preuredimo u spoj kao na slici 155.

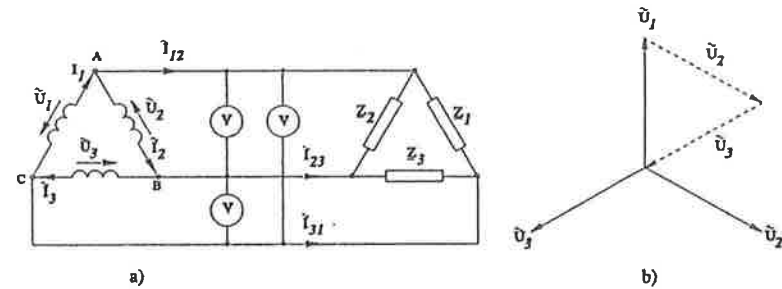


Slika 155. Uvod za spoj trofaznog namota u trokut

Što će se dogoditi ako se međusobno spoje točke?

- A i Y (početak prvog i kraj drugog namota).
- B i Z (početak drugog i kraj trećeg namota).
- C i X (početak trećeg i kraj prvog namota).

Dobit će se jedan zatvoreni strujni krug u obliku trokuta kojeg su vrhovi izvori trofaznog napona (slika 156a). Unutar stvorenog strujnog kruga protječe struja samo ako se on optereti vanjskim opterećenjem. Bez opterećenja nema struje unutar trokuta. Ako je trokut u praznom hodu, vektorska suma napona jednaka je nuli (slika 156b). To se može potvrditi i pogledom na dijagram trenutnih vrijednosti trofaznih napona (slika 146).



Slika 156. Spoj trofaznog namota izvora u trokut: a) shema spoja izvora i trošila, b) fazorski dijagram faznih napona izvora

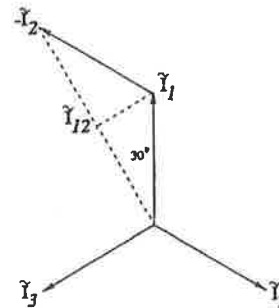
Iz slike 156a slijedi da je:

$$\vec{U}_f = \vec{U}_l. \quad (247)$$

Odnos struja će se dobiti iz fazorskog dijagrama za struje (slika 157):

$$\vec{I}_{12} = \vec{I}_1 - \vec{I}_2, \quad (248)$$

gdje jedan broj u indeksu označava faznu struju (I_1), a dva broja u indeksu linijsku struju (I_{12}).



Slika 157. Odnos linijskih i faznih struja prilikom spoja trofaznog namota u trokut

Budući da su u simetričnom sustavu moduli svih faznih struja jednaki:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_f,$$

što vrijedi i za linijske struje, iz slike 157. slijedi:

$$I_1 = 2I_f \cos 30^\circ,$$

$$I_1 = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} I_f,$$

$$I_1 = \sqrt{3} I_f. \quad (249)$$

Ponovimo odnos napona i struja za zvijezdu (znak:Y) i trokut (znak:Δ):

Zvijezda Y: $I_l = I_f,$

$$U_l = \sqrt{3} U_f.$$

Trokut Δ: $U_l = U_f,$

$$I_l = \sqrt{3} I_f.$$

Spojevi izvora i trošila međusobno su nezavisni. Ako je izvor spojen u zvijezdu, trošilo može biti spojeno u zvijezdu ili trokut i obrnuto. Oba se spoja rade po potrebi.

5.11. Snaga trofaznog sustava

Ukupna se snaga simetričnog trofaznog sustava dobije kao zbroj snaga svih triju faza:

$$P = 3 U_f I_f \cos \varphi. \quad (250)$$

Za trofazno se trošilo snaga redovno izražava linijskim vrijednostima napona i struje. Uradimo to najprije za slučaj da je trošilo spojeno u zvijezdu. Tada je:

$$U_f = \frac{U}{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad I_f = I,$$

pa slijedi:

$$P = \sqrt{3} U I \cos \varphi. \quad (251)$$

Kada je trošilo spojeno u trokut, tada je:

$$U_f = U \quad \text{i} \quad I_f = \frac{I}{\sqrt{3}},$$

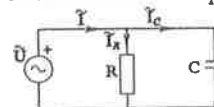
pa slijedi ponovo (251):

$$P = \sqrt{3} U I \cos \varphi.$$

Izlazi da za snagu trofaznog sustava za oba spoja (Δ i Y) vrijedi isti izraz. Kada se napon i struja u trofaznom sustavu napišu bez indeksa, podrazumijevaju se linijske vrijednosti.

ZADACI

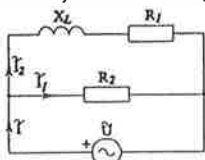
1. Pravokutni svitak duljine 10 cm i širine 4 cm sa $N=1000$ zavoja, okreće se oko osi (kao na slici 117) brzinom 3000 o/min. Os zavojnice stoji okomito na smjer indukcije $B=0.8T$ u homogenom polju. Odredite frekvenciju i efektivnu vrijednost induciranog napona. (50 Hz; 710,4 V)
2. Izračunajte količinu naboja koja protekne presjekom vodiča u toku jedne poluperiode sinusne struje frekvencije 50 Hz i efektivne vrijednosti 100 A. (0,9 C)
3. U strujnom krugu napona izvora $u=250 \sin(628t + 2\pi/3)$ protječe struja $i=50 \sin 628t$. Odredite frekvenciju te maksimalnu, efektivnu i srednju vrijednost struje. Nacrtajte fazorski dijagram s naponom u referentnoj osi. (100Hz; 50A; 35.35A; 31.85A)
4. Koliki je induktivni otpor svitka induktiviteta $L=10$ mH, pri frekvenciji 50 Hz, 500, 5000 Hz. Kolika će struja teći kroz otpore pri naponu $E=220$ V? (3,14 Ω; 31,4 Ω; 70 A; 7 A; 0,7 A)
5. Kondenzator kapaciteta $C=318$ μF spojen je na izvor $E=220$ V, 50 Hz. Izračunajte kapacitivni otpor, struju i količinu naboja koja se nakupi na kondenzatoru tokom jedne poluperiode. (10 Ω; 22 A; 0,1976 C)
6. Dva potrošača se napajaju iz iste jednofazne mreže izmjenične struje. Prvi potrošač uzima struju $I_1=250$ A, pri faktoru snage $\cos \varphi_1=0,75$. Ukupna struja oba potrošača je 400 A pri $\cos \varphi=0,62$. Uz pretpostavku da su obe struje induktivne, izračunajte struju I_2 i faktor snage $\cos \varphi_2$ drugog potrošača. (160,4 A; 0,374)
7. Za strujni krug na slici odredite iznose struja kroz radni otpor i kondenzator te ukupnu struju. Nacrtajte fazorski dijagram.



$$\begin{aligned} R &= 100 \Omega \\ C &= 6 \cdot 10^{-6} \text{ F} \\ U &= 220 \text{ V} \\ f &= 50 \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$(2,2 \text{ A}; 0,4147 \text{ A}; 2,239 \text{ A})$$

8. Za strujni krug na slici odredite impedanciju i struje pojedinih grana. Nacrtajte fazorski dijagram.



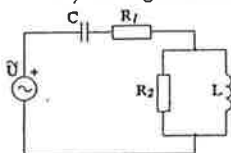
$U = 100 \text{ V}$
 $R_1 = 10 \Omega, R_2 = 20 \Omega$
 $X_L = 10 \Omega$

$(8.94\Omega; 5\text{A}; 7.07\text{A}; 11.18\text{A})$

9. Izračunajte kompleksnu impedanciju za strujni krug iz zadatka br. 3.

$(Z = 50 e^{j2\pi/3})$

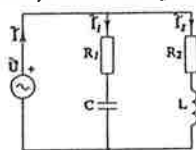
10. Za strujni krug na slici odredite ekvivalentnu kompleksnu impedanciju.



$R_1 = 100 \Omega$
 $R_2 = 1 \Omega$
 $L = 2 \text{ mH}$
 $C = 6 \mu\text{F}$
 $f = 50 \text{ Hz}$

$(Z = 100,283 - j530,065)$

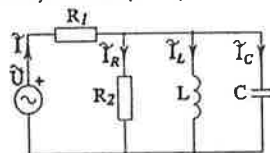
11. Za strujni krug na slici odredite ekvivalentnu kompleksnu impedanciju i struje kroz sve grane strujnog kruga.



$U = 220 \text{ V}, f = 50 \text{ Hz}$
 $R_1 = 30 \Omega$
 $R_2 = 100 \Omega$
 $C = 5 \mu\text{F}$
 $L = 0,1 \text{ H}$

$(34.4 + j33.8\Omega; 3.2 - j3.6\text{A}; 0.05 + j0.34\text{A}; 3.15 - j3.26)$

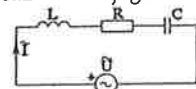
12. Za strujni krug prema slici odredite struje kroz pojedine elemente i nacrtajte fazorski dijagram. Odredite onu frekvenciju pri kojoj će ukupna struja biti najmanja.



$U = 220 \text{ V}, f = 50 \text{ Hz}$
 $R_1 = 10 \Omega$
 $R_2 = 100 \Omega$
 $L = 0,3 \text{ H}$
 $C = 10^{-5} \text{ F}$

$(2.49\text{A}; 1.95\text{A}; 2.07\text{A}; 0.61\text{A}; 91.9\text{Hz})$

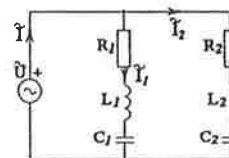
13. Za strujni krug na slici odredite prividnu, radnu i jalovu snagu i nacrtajte fazorski dijagram.



$U = 220 \text{ V}, f = 50 \text{ Hz}$
 $R = 100 \Omega, L = 1,5 \text{ H}, C = 2\mu\text{F}$

$(43\text{VA}; 3.82\text{W}; 42,83\text{VAr})$

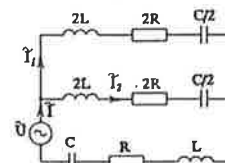
14. Za strujni krug na slici odredite ekvivalentnu kompleksnu impedanciju i struje kroz pojedine grane strujnog kruga. Nacrtajte fazorski dijagram.



$U = 220 \text{ V},$
 $f = 50 \text{ Hz}$
 $R_1 = R_2 = 20 \Omega$
 $L_1 = 3 \text{ mH}, L_2 = 5 \text{ mH}$
 $C_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ F} \quad C_2 = 7 \cdot 10^{-6} \text{ F}$

$(0.83\text{A}; 0.346\text{A}; 0.485\text{A})$

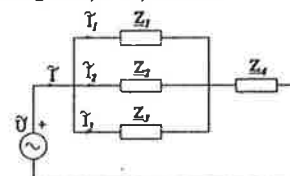
15. Za strujni krug na slici odredite ukupnu kompleksnu impedanciju i struju kroz sve tri grane.



$U = 220 \text{ V}, f = 50 \text{ Hz}$
 $R = 10 \Omega$
 $C = 8 \mu\text{F}$
 $L = 0,06 \text{ H}$

$(398e^{-j88.5}; 0.553e^{-88.5}; 0.276e^{j88.5}; 0.276e^{j88.5})$

16. Za strujni krug na slici odredite struje $\vec{I}, \vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3$ te prividnu, radnu i jalovu snagu koju daje izvor.



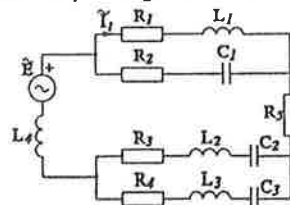
$E = 220 e^{j0}$
 $Z_1 = Z_2 = 2Z_3 = 10e^{j45}$
 $Z_4 = 15e^{j30}$

$(12.6e^{-j32}; 3.2e^{j43}; 3.2e^{-j43}; 6.4e^{j43},$
 $2776\text{VA}; 2352\text{W}; 1476\text{VAr})$

17. Dvožičnim jednofaznim vodom treba prenijeti snagu od 100 MVA na udaljenost od 100 km. Napon izvora je 100 kV, faktor snage potrošača $\cos\varphi = 0.8$, specifični otpor vodiča $2 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$. Odredite presjek vodiča tako da gubitak na otporu voda ne bude veći od 10% snage izvora.

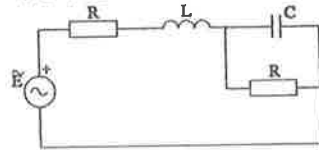
(500mm^2)

18. Za strujni krug na slici odredi izraz za struju I_1 .



$E = 220 e^{j0} \text{ V} \quad f = 50 \text{ Hz}$
 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega \quad R_5 = 100 \Omega$
 $L_1 = L_2 = 0,05 \text{ H}$
 $L_3 = L_4 = 0,02 \text{ H}$
 $C_1 = C_2 = C_3 = 3 \mu\text{F}$

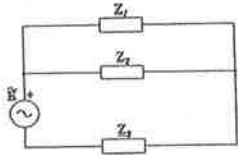
19. Za strujni krug na slici odredite induktivitet L za koji je radna snaga tri puta veća od jalove snage. Nakon toga odredite iznos EMS izvora kod kojega je prividna snaga 100 VA.



$$\begin{aligned} R &= 10 \Omega \\ C &= 1 \mu\text{F} \\ f &= 50 \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$(21.3 \times 10^{-3} \text{ H}; 25.8 \text{ Z})$$

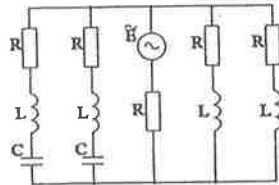
20. Za spoj na slici odredite prividnu, radnu i jalovu snagu izvora.



$$\begin{aligned} E &= 220 e^{j0} \\ Z_1 &= 100 e^{j30} \\ Z_2 &= 100 e^{j30} \\ Z_3 &= 50 e^{j45} \end{aligned}$$

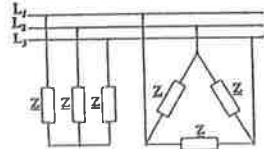
$$(558.9 \text{ VA}; 395.2 \text{ W}; 395.2 \text{ VAr})$$

21. Za strujni krug na slici odredite prividnu, radnu i jalovu snagu koju izvor daje mreži.



$$\begin{aligned} E &= 220 \text{ V } f = 50 \text{ Hz} \\ R &= 10 \Omega \\ L &= 10^{-3} \text{ H} \\ C &= 10^{-9} \text{ F} \end{aligned}$$

22. Tri identične impedancije spojene su na trofazni simetrični sustav napona. Odredite omjer prividne snage koju iz mreže uzima spoj impedancija u trokutu i zvijezdi, kao na slici.



(3)

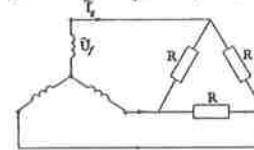
23. Trofazni elektromotor ima nazivne podatke 20 kW, 380 V, $\eta=0,835$ i $\cos\varphi = 0,85$. Odredite struju koju elektromotor uzima iz mreže pri nazivnom opterećenju i fazni napon ako je motor spojen u zvijezdu.

$$(42.8 \text{ A}; 220 \text{ V})$$

24. Na trofaznu mrežu linijskog napona 380 V priključen je asinkroni motor snage $P = 100 \text{ kW}$. Motor je nazivno opterećen i radi s $\eta=0,9$ i $\cos\varphi = 0,8$. Odredite struju koju motor uzima iz mreže i fazni napon ako je motor spojen: a) u zvijezdu, b) u trokut.

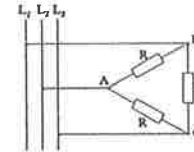
$$(211 \text{ A}; 220 \text{ V}; 380 \text{ V})$$

25. Trofazni sistem sastoji se od generatora spojenog u zvijezdu i trošila spojenog u trokut. Fazni napon generatora je $U_{fg}=400 \text{ V}$, a trošilo čine tri radna otpora $R=40\Omega$. Treba odrediti napon U_R na otporima, struju generatora I_g i struju I_R kroz otpora R .



$$(693 \text{ V}; 30 \text{ A}; 17.32 \text{ A})$$

26. Tri jednaka otpora R , spojena u trokut, spojena su na trofazni simetrični sustav napona iznosa 380 V. Ako otpor između točaka A i B iznosi $R_{AB} = 10 \Omega$ odredite:



- otpor R
- faznu struju
- linijsku struju
- faktor snage

$$(15 \Omega; 23.3 \text{ A}; 43.88 \text{ A}; 1)$$

27. Trofazni električni bojler ima tri jednaka grijača radnog otpora 3Ω . Bojler je spojen na krutu mrežu linijskog napona 380 V. Odredite prividnu, radnu i jalovu snagu bojlera ako su grijači spojeni:

- u zvijezdu
 - u trokut
- Induktivitet grijača je $L = 0,01 \text{ H}$, a frekvencija $f = 50 \text{ Hz}$.

$$\begin{aligned} &(33.250 \text{ kVA}; 22.278 \text{ kW}; 24.042 \text{ kVAr}) \\ &(99.750 \text{ kVA}; 68.910 \text{ kW}; 72.126 \text{ kVAr}) \end{aligned}$$

28. Bojler zagrije 200 litara vode za 6 sati od 20°C do 80°C , uz stupanj korisnosti $\eta = 0,85$. Napon mreže je 380/220 V. Uzeti da je $c=4186 \text{ J/kgK}$. Odredite:

- otpor grijača, ako je bojler trofazno spojen u zvijezdu
- vrijeme zagrijavanja ako pregori jedan osigurač
- vrijeme zagrijavanja ako pregori jedan grijač

$$(62.44 \Omega; 12 \text{ h}; 12 \text{ h})$$

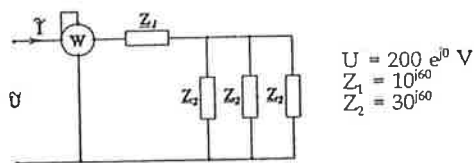
29. Zavojnica s feromagnetskom jezgrom radnog otpora $R=2 \Omega$ priključena je na izmjenični napon $U=220 \text{ V}$. Struja kroz zavojnicu iznosi 2,5 A a faktor snage je $\cos\varphi$. Odredite gubitke u bakru i željezu.

$$(12,5 \text{ W}; 42,5 \text{ W})$$

30. Zavojnica sa feromagnetskom jezgrom priključena je na izvor izmjeničnog napona frekvencije $f=50 \text{ Hz}$. Maksimalni magnetski tok u jezgri $\Phi=0,1 \text{ Vs}$. Struja kroz zavojnicu je $I=10$, a njen je radni otpor $R=0,4 \Omega$. Broj zavoja $N=100$ a snaga gubitaka $P_g=440 \text{ W}$. Odredite napon izvora te radnu i jalovu komponentu struje.

$$(222 \text{ V}; 1.98 \text{ A}; 9.8 \text{ A})$$

31. Kroz zavojnicu sa željeznom jezgrom protječe struja 2 A i pri tome uzima iz mreže snagu 20 W. Razdvojite gubitke u bakru i željezu ako se zna da zavojnica bez jezgre, priključena na isti napon, razvija snagu od 64 W pri struji od 8 A.
(4 W; 16 W)
32. Na zavojnicu sa željeznom jezgrom priključen je istosmjerni napon $U=40$ V. Tada je struja kroz zavojnicu $I=10$ A. Ako se na istu zavojnicu priključi izmjenični napon od 220 V, 50 Hz struja iznosi 2 A, a $\cos\varphi=0,12$. Odredite gubitke u bakru i gubitke u željezu.
(16 W; 36,8 W)
33. Da bi žarulja čiji su nominalni podaci $P_n=100$ W i $U_n=220$ V mogla biti priključena na izvor napona 220 V, $f=50$ Hz, potrebno je radi smanjenja napona priključiti u seriju kapacitivni otpor. Koliki treba biti kapacitet?
(121 μ F)
34. Serijski krug koji se sastoji od otpora $R=12$ Ω , reaktancije $X_L=30$ Ω i promjenjivog kapaciteta priključen je na izvor napona od 120 V, 60 Hz. Vatmetar pokazuje da strujni krug uzima snagu $P=620$ W. Na kojoj je vrijednosti podešen kondenzator.
(262 μ F)
35. Za shemu na slici zadano je:



Koliku snagu pokazuje vatmetar?

(1732 W)

6. PRILOG

6.1. Grčki alfabet

A, α	alfa	I, i	jota	P, ρ	ro
B, β	beta	K, κ	kapa	Σ , σ	sigma
Γ , γ	gama	Λ , λ	lambda	T, τ	tau
Δ , δ	delta	M, μ	mi	Y, υ	ipsilon
E, ϵ	epsilon	N, ν	ni	Φ , φ	fi
Z, ζ	zeta	Ξ , ξ	ksi	X, θ	hi
H, η	eta	O, o	omikron	Ψ , ψ	psi
Θ , θ	theta	Π , π	pi	Ω , ω	omega

6.2. Međunarodno usvojene mjerne jedinice

U brojnim knjigama stručne literature tiskanih prije petnaestak i više godine susretali smo se s nizom različitih sustava mjernih jedinica.

Od 1. siječnja 1981. god. kod nas je uveden INTERNACIONALNI SUSTAV mjernih jedinica SI (System International d'Unités) prihvaćen na XI. zasjedanju Generalne konferencije za mjere i utege u Parizu 1960. godine. Po navedenom Zakonu u našoj zemlji javno se mogu upotrebljavati samo mjerne jedinice SI sustava, s tim što se dopušta i upotreba točno određenih drugih izvansustavskih jedinica kao iznimki u pojedinim djelatnostima. U Hrvatskoj su zakonite slijedeće četiri skupine mjernih jedinica:

- Jedinice Međunarodnog mjernog sustava SI
 - sedam osnovnih
 - dvadeset imenovanih izvedenih jedinica,
 - izvedene jedinice SI bez posebnog naziva
 - Iznimno dopuštene jedinice izvan međunarodnog sustava SI
 - Decimalne jedinice imenovanih SI-jedinica koje se tvore od šesnaest prefiksa
 - Decimalne jedinice koje se tvore od iznimno dopuštenih jedinica izvan SI sustava.
- Ovdje se navode skupine 1, 2 i 4.

Naziv za veličinu	naziv jedinice	simbol
<i>1a, 7 osnovnih jedinica</i>		
duljina	metar	m
masa	kilogram	kg
vrijeme	sekunda	s
jakost električne struje	amper	A
termodinamička temperatura	kelvin	K
količina tvari	mol	mol
intenzitet svjetlosti	kandela	cd

Naziv za veličinu	naziv jedinice	simbol
<i>1b, Izvedene SI jedinice s posebnim imenom</i>		
radioaktivnost	bekerelel	Bq
rad, energija, količina topline	džul,	J
električni kapacitet	farad	F
energetska apsorbirana doza ionizirajućeg zračenja	grej	Gy
induktivitet	henri	H
frekvencija	herc	Hz
električni naboj, količina elektriciteta	kulon	C
svjetlosni tok	lumen	lm
osvijetljenost	luks	lx
sila	njutn	N
električni otpor	om	Ω
tlak, pritisak	paskal	Pa
kut (u ravnini)	radijan	rad
električna vodljivost	simens	S
ekvivalentna energetska doza ionizirajućeg zračenja	sivert	Sv
prostorni kut	steradian	Sr
magnetska indukcija	tesla	T
snaga	vat	W
magnetski tok	veber	Wb
električni potencijal, napon, elektromotorna sila	volt	V

1c) Izvedene jedinice SI bez posebnog naziva

ploština	kvadratni metar	m^2
obujam	kubični metar	m^3
dužinska (linijska masa)	kilogram po metru	kg/m
ploštinska masa	kilogram po kvadratnom metru	kg/m ²
obujamska masa	kilogram po kubnom metru	kg/m ³
brzina	metar u sekundi	m/s
ubrzanje	metar u sekundi na kvadrat	m/s ²
kutno ubrzanje	radijan u sekundi na kvadrat	rad/s ²
obujamski protok	kubni metar u sekundi	m ³ /s
maseni protok	kilogram u sekundi	kg/s
dinamička viskoznost	paskalsekunda	Pas
kinematička viskoznost	kvadratni metar u sekundi	m ² /s
jakost električnog polja	volt po metru	V/m
jakost magnetskog polja	amper po metru	A/m
entropija	džul po kelvinu	J/K
masena količina topline	džul po kilogram-kelvinu	J/KJ
termička provodljivost	vat po metarkelvinu	W/mK
energetska jakost zračenja	vat u steradianima	W/Sr
luminacija	kandela po kvadratnom metru	cd/m ²
ekspozicijska doza ionizirajućeg zračenja	kulon po kilogramu	C/kg
molarna masa	kilogram po molu	kg/mol
koncentracija materija (molaritet)	mol po kubnom metru	mol/m ³

2. Iznimno dopuštene jedinice izvan međunarodnog sustava SI (od kojih se ne tvore decimalne jedinice)

Naziv za veličinu	simbol	iznos jedinice
duljina:	morska milja	1852 m
(u pomorskom i zračnom prometu)	n mile	100 m ²
ploština:	ar	10000m ² =10 ⁴ m ²
	hektar	2 π rad
kut u ravnini:	puni kut	($\pi/2$) rad
	pravi kut	(1/90)L=($\pi/180$) rad
	stupanj	(1/60) ^o =($\pi/10800$) rad
	minuta	(1/60) ['] =($\pi/648000$) rad
	sekunda	($\pi/200$) rad
	gradus ili gon	10 ³ kg
masa:	tona	1,66053·10 ⁻²⁷ kg
	jedinica atomska mase	60 s
(u kemiji i fizici)	u	3600 s
vrijeme:	minuta	86400 s
	sat (60 min)	1852/3600 m/s=0,514 m/s
	dan (24h=1440 min)	1K
brzina:	čvor=morska milja na sat	
temperatura:	celsiusov stupanj	^o C

4. Decimalne jedinice koje se tvore od 7 iznimno dopuštenih jedinica izvan SI sustava

Naziv za veličinu	simbol	iznos jedinice
obujam, litra	L, l	dm ³
dužinska masa tekstilnog		1g/km=10 ⁻⁶ kg/m
vlakna i konca po duljini niti	tex	100000 Pa = 10 ⁵ Pa
tlak, pritisak	bar	Wh=3600 J=3,6 kJ
rad, energija, količina topline	vatsat	
energija (posebna područja fizike i kemije)		
elektronvolt	eV	1,60219·10 ⁻¹⁹ J
prividna snaga izmjenične struje		
voltamper	VA	1 W

6.3 Elektronska konfiguracija elemenata

Preuzeto iz CRC Handbook of Chemistry and Physics,
Weast 62nd edition 1981-1982

Atomic No.	Element	K		L		M			N				O				P				Q																
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
		s	s p	s p d	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f			
1	H	1																																			
2	He	2																																			
3	Li	2	1																																		
4	Be	2	2	1																																	
5	B	2	2	2	1																																
6	C	2	2	2	2																																
7	N	2	2	2	3																																
8	O	2	2	2	4																																
9	F	2	2	2	5																																
10	Ne	2	2	2	6																																
11	Na	2	2	6	1																																
12	Mg	2	2	6	2																																
13	Al	2	2	6	2	1																															
14	Si	2	2	6	2	2																															
15	P	2	2	6	2	3																															
16	S	2	2	6	2	4																															
17	Cl	2	2	6	2	5																															
18	Ar	2	2	6	2	6																															
19	K	2	2	6	2	6	1																														
20	Ca	2	2	6	2	6	2																														
21	Sc	2	2	6	2	6	2	1																													
22	Ti	2	2	6	2	6	2	2																													
23	V	2	2	6	2	6	3																														
24	Cr	2	2	6	2	6	3	5																													
25	Mn	2	2	6	2	6	4																														
26	Fe	2	2	6	2	6	4	6																													
27	Co	2	2	6	2	6	4	7																													
28	Ni	2	2	6	2	6	4	7	8																												
29	Cu	2	2	6	2	6	4	7	10																												
30	Zn	2	2	6	2	6	4	7	10																												
31	Ga	2	2	6	2	6	4	7	10	1																											
32	Ge	2	2	6	2	6	4	7	10	2																											
33	As	2	2	6	2	6	4	7	10	2	3																										
34	Se	2	2	6	2	6	4	7	10	2	4																										
35	Br	2	2	6	2	6	4	7	10	2	5																										
36	Kr	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6																										
37	Rb	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	1																									
38	Sr	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2																									
39	Y	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	1																								
40	Zr	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	2																								
41	Nb	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	3																								
42	Mo	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	4																								
43	Tc	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	5																								
44	Ru	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	6																								
45	Rh	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	7																								
46	Pd	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	8																								
47	Ag	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	9																								
48	Cd	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	10																								
49	In	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	10	1																							
50	Sn	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	10	2																							
51	Sb	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	10	2	1																						
52	Te	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	10	2	2																						
53	I	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	10	2	3																						
54	Xe	2	2	6	2	6	4	7	10	2	6	2	10	2	4																						

*Neregularno

Atomic No.	Element	K		L		M			N				O				P				Q																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
		s	s p	s p d	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f	s p d f		
55	Cs	2	2	6	2	6	10																															
56	Ba	2	2	6	2	6	10																															
57	La	2	2	6	2	6	10																															
58	Ce	2	2	6	2	6	10																															
59	Pr	2	2	6	2	6	10																															
60	Nd	2	2	6	2	6	10	</																														

UPOTRIJEBLJENE OZNAKE

A	- amper apsolutni iznos kompleksnog broja, izvršeni rad, atomska težina
\underline{A}	- kompleksni broj
a	- elektrokemijski ekvivalent
$a_{1,2}$	- realni, odnosno imaginarni dio kompleksnog broja
As	- ampersekunda
B	- magnetska indukcija (gustoća magnetskog toka)
\vec{B}	- vektor magnetske indukcije
B_C	- kapacitivna vodljivost
B_L	- induktivna vodljivost
B_r	- remanentni magnetizam
C	- kulon, električni kapacitet
c	- specifična toplina brzina svjetlosti kroz vakuum
č	- broj čvorova električne mreže
D	- gustoća električnog naboja, električna indukcija
\vec{D}	- vektor električne indukcije (vektor električnog pomaka)
d	- dubina prodiranja, udaljenost naboja kod dipola
E	- jakost električnog polja, elektromotorna sila, unutarnji napon, inducirani napon
\vec{E}	- vektor jakosti električnog polja
e	- elementarni naboj, elektron, inducirani napon - trenutna vrijednost
F	- farad električna sila, magnetska sila, sila općenito, Faradajeva konstanta
\vec{F}	- vektor sile
F'	- sila po jedinici duljine
f	- frekvencija
G	- generator, električna vodljivost
g	- zemljino ubrzanje, broj grana električne mreže
H	- henri, jakost magnetskog polja
\vec{H}	- vektor jakosti magnetskog polja

H_c	- koercitivnost željeza
Hz	- herc
h	- visina
I	- istosmjerna struja, efektivna vrijednost izmjenične struje
I_k	- struja kratkog spoja
I_{in}	- maksimalna vrijednost izmjenične struje
I_{gr}	- srednja vrijednost izmjenične struje
\vec{I}	- fazor struje
i	- trenutna vrijednost izmjenične struje
J	- gustoća električne struje džul moment tromosti
K	- koeficijent krutosti oznaka za kelvin
k	- faktor ulančenja toka, dimenzijska konstanta u Coulombovu zakonu
k'	- faktor proporcionalnosti u magnetizmu
L	- koeficijent samoindukcije
l	- dužina puta pomaka naboja, udaljenost, duljina vodiča
$M, M_{1,2}$	koeficijent međuindukcije
m	- metar, masa
N	- njutn broj zavoja
n	- broj slobodnih elektrona u jedinici volumena broj nezavisnih kontura
P	- električna snaga - radna
P_i	- snaga izvora
P_i'	- prilagođena snaga izvora
P_t	- snaga trošila
P_t'	- prilagođena snaga trošila
Q	- količina topline, količina električnog naboja, jalova (reaktivna) snaga izmjenične struje
Q_i	- influencirani naboj
Q_p	- naboj stvoren polarizacijom
Q_r	- količina pokusnog električnog naboja naboj po jedinici dužine

q	- količina električnog naboja - trenutna vrijednost
R	- Radijus, oznaka za električni otpor
R_a	- otpor ampermetra
$R_{a,b}$	- dio kliznog otpora Weatstonova mosta
R_d	- dodatni otpor
R_e	- otpor elektrolita
R_i	- otpor izvora
R_m	- magnetski otpor
R_p	- paralelni otpor
R_t	- otpor trošila
R_v	- otpor vodiča, otpor voltmetra
R_{reg}	- regulacijski otpor
R_x	- mjereni otpor
R_{20}	- otpor pri temperaturi od 20° C
R_{12}	- otpor pri transfiguraciji zvijezda/trokut
r	- radijus, međusobna udaljenost naboja
\vec{r}_o	- ort, jedinični vektor
S	- zatvorena površina, površina općenito, sklopka, prividna snaga izmjenične struje simens
s	- sekunda
T	- tesla, perioda vremenska konstanta
t	- vrijeme
U	- električni napon - istosmjerni efektivna vrijednost izmjeničnog napona
U_f	- fazni napon
U_j	- lirijski napon
\tilde{U}	- fazor napona
u	- trenutna vrijednost izmjeničnog napona
$U_{R/L/C}$	- napon na elementima R, L ili C
V	- volt, valencija, volumen

v	- brzina elektrona, brzina pomaka vodiča u magnetskom polju
W	- vat, električna energija
W_b	- veber
W_{el}	- energija električnog polja
W_{iz}	- energija izvora
W_m	- magnetska energija
w	- gustoća energije u obujmu V ,
X	- reaktancija
x	- proizvoljna duljina
X_C, X_L	- kapacitivna odnosno induktivna reaktancija
Z	- impedancija
\underline{Z}	- kompleksna impedancija
α	- kut faktor proporcionalnosti polariziranosti dielektrika temperaturni koeficijent otpora argument kompleksnog broja
α_{20}	- temperaturni koeficijent otpora pri temperaturi od 20° C
ϵ	- apsolutna dielektrična konstanta
ϵ_0	- dielektrična konstanta za vakuum
ϵ_r	- relativna dielektrična konstanta
Δ	- trofazni namot spojen u trokut
$\Delta\theta$	- prirast temperature
η	- korisnost
η'	- korisnost kod prilagođenja
θ	- kut prema vodiču iz promatrane točke magnetomotorna sila magnetski napon (protjecanje)
ϑ	- temperatura
κ	- specifična vodljivost metalnih vodiča
λ	- valna duljina
μ	- apsolutni permeabilitet
μ_0	- permeabilitet za vakuum
μ_r	- relativni permeabilitet
ξ	- faktor oblika izmjeničnih veličina
ρ	- specifični električni otpor
σ	- površinska gustoća naboja
σ_p	- površinska gustoća naboja polariziranog dielektrika
τ	- temperatura pri kojoj metal nema otpora

Y	- vodljivost izmjenične struje, trofazni namot spojen u zvijezdu
\underline{Y}	- kompleksna vodljivost
Φ	- magnetski tok
Φ_{12}	- tok obuhvaćen s dva svitka
Φ_{10}	- tok obuhvaćen samo svitkom koji ga je proizvedo, rasipni tok
φ	- potencijal, fazni kut između struje i napona
χ	- susceptibilnost (propustljivost) izolacijskog materijala, magnetska susceptibilnost
Ψ_E, Ψ	- tok električnog polja, tok vektora D
Ψ	- ulančeni magnetski tok
Ω	- om
ω	- kružna frekvencija

LITERATURA

- [1] Josip Lončar: Osnovi elektrotehnike I i II, Tehnička knjiga, Zagreb, 1956.
- [2] Viktor Pinter: Osnove elektrotehnike, knjiga prva i knjiga druga, Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.
- [3] Ante Maletić: Osnove elektrotehnike za studente strojarstva, Split, 1987.
- [4] Mario Essert, Zdravko Valter: Osnove elektrotehnike, Zagreb, 1990.
- [5] Francis Weston Sears: Elektricitet i magnetizam, Naučna knjiga, Beograd, 1963. (prijevod)
- [6] L.R.Nojman, P.L.Kalantarov: Teoriski osnovi elektrotehnike, knjiga prva, Naučna knjiga, Beograd, 1951. (prijevod)
- [7] Tehnička enciklopedija III: Elektricitet, statički, LZ, Zagreb, 1969.
- [8] Tehnička enciklopedija V: Elektrotehnika, LZ, Zagreb 1976.

ABECEDNO KAZALO

Akumulator 90
 - čelični 92
 - metal-hidrid 94
 - nikal-kadmij 92
 - olovni 90
 - srebro-cink 93
 - srebro-kadmij 93
amper 39, 82, 106
Ampèreov zakon 109, 112
ampersekunda 2
amperzavoji 111
analogani 173
anioni 80
atomska masa 1
atomska težina 82
Avogadrov broj 1

Biot-Savartov zakon 103, 104
brzina elektrona 39, 40

Coulombov zakon 2
Curieva točka 125

Čvor električne mreže 26, 71

Dielektrična čvrstoća 23, 24
dielektrična konstanta 21
 - apsolutna 23, 25
 - relativna 24
 - za vakuum i zrak 2, 3, 16, 21
dijamagnetske materije 120, 123
dogovor o smjeru električne struje 42
dubina prodiranja 150

Džul 28, 62, 63

Efekte električne struje 40, 41
ekvivalentne površinske struje 122
elektricitet 1
električna
 - energija 62
 - indukcija 21
 - influencija 20
 - snaga 61, 63
 - struja 39
 - vodljivost 44

električni
 - dipol 22
 - kapacitet 14, 15
 - napon 13
 - otpor 44, 45
 - potencijal 10, 11, 12
električno polje 3
 - homogeno 6
 - između ravnih ploča 15
 - nabijene kugle 9
 - nabijenog cilindra 7
 - ravnog vodiča 7
elektrode 80
 - anoda 80
 - katoda 80
elektrodni potencijal 85
elektrolit 80
elektrolitička
 - čelija 80
 - disocijacija 79
elektroliza 80
elektrokemijski ekvivalent 82
elektromotorna sila 46
elektron 1, 2
elektronska konfigur. elemenata 190
energija
 - električne struje 61, 62, 63
 - elektrostatskog polja 28, 29
 - magnetskog polja 130, 131, 132
Eulerova formula 163

Farad 15
Faradayev zakon
 - elektrolize, I. 82, 83
 - elektrolize, II. 82, 83
 - elektromagnetska indukcija 99, 100
Faradayeva konstanta 83
faktor
 - oblika 143, 144
 - snage 156
 - ulančenja 117
fazni
 - kut 144
 - napon 157
 - struja 157
fazor 47
fazorski dijagram 48
feromagnetizam 123

frekvencija 139, 140

Gaussov zakon 6, 22
galvanometar 68
galvanostegija 81
generator izmjenične struje 145, 174
glavni magnetski tok 116
grana mreže 71, 72, 169
grčki alfabet 186

Henri 114, 116
herc 140
histereza 125

Impedancija 100
inducirana struja 100
inducirani napon 99, 100
induktivitet 114
induktivni otpor 152
istosmjerna struja 42
izmjenična struja 141
izolator 22

Jakost
 - električnog polja 4
 - magnetskog polja 112
 - Jouleov zakon 62

Kapacitet 15
 - akumulatora 91
 - kondenzatora 15
kation 80
kemijski ekvivalentne težine 83
Kirchhoffovi zakoni
 - za istosmjernu struju 56, 60
 - za izmjeničnu struju 167, 169
koeficijent
 - krutosti 173
 - međusobne indukcije 115
 - samoindukcije 114
koercitivnost 126
kompleksna impedancija 168
kompleksni račun 163
kondenzator 15
korisnost 64
kružna frekvencija 141
kulon 2

Lencov zakon 100
linijski napon 177
linijska struja 177

Magnetomotorna sila 111
magnetska
 - indukcija 98
 - permeabilnost apsolutna 123
 - permeabilnost relativna 123
 - permeabilnost za zrak 110
 - susceptibilnost 122
magnetski
 - domen 121
 - krug 109
 - otpor 111
 - tok 97, 98
 - napon 113
masa
 - elektrona 1
 - izlučene tvari 82
 - neutrona 1
 - protona 1
međuintuktivitet 115
međusobna indukcija 115
moment dipola 22
mreža
 - linearna 72
 - nelinearna 72

Naboj 2
napon
 - polarizacije 83
 - samoindukcije 114
neutron 1
nezavisna kontura 72
nultočka 176

Ohmov zakon
 - za istosmjernu struju 45
 - za izmjeničnu struju 167
oksidacija 80
om 45
ommetar 68
osigurači 51

Pad napona 46
paramagnetske materije 120, 123
polarizacija 23
potencijal 9, 10, 11

- potenciometar 70
 pravilo
 - desne ruke 97
 - lijeve ruke 101
 prazni hod 51
 primarni kemijski izvori 84
 - alkalno MnO_2 87
 - cink-zrak 87
 - Lechlancheov članak 86
 - litijev članak 88
 - magnezijev članak 88
 - srebro-cink 88
 - Voltin članak 84
 - Živinoksid-cink 88
 prilagođavanje 65
 protjecanje 111
 proton 1
- Rasipni tok 116
 redukcija 80
 remanentni magnetizam 126
 rezonancija
 - naponska ili serijska 172
 - strujna ili paralelna 173
- Samoindukcija 113, 114
 samoinduktivnost 114
 shunt 66
 sila
 - Coulombova 2, 3
 - magnetska na naboj 101
 - magnetska na vodiču sa strujom 102
 - elektromagnetska 132
 silocijev 109
 simens 44
 simbolička metoda
 SI sustav jedinica 186
 skin efekt 149
 snaga
 - istosmjerne struje 61, 63, 64
 - izmjenične struje 154, 155
 - jalova 157
 - prividna 157
 - radna 156
 spajanje izvora
 - paralelno 59
 - serijski 58
 spajanje kondenzatora
 - kombinirano 19
 - paralelno 18
 - serijski 19
 spajanje otpora
 - kombinirano 55
 - paralelno 54
 - serijski 53
 specifična električna vodljivost 43
 specifična toplina 61
 specifični električni otpor 45, 48
 spin elektrona 121
 stacionarno stanje 148
 struja
 - izjednačenja 66
 - kratkog spoja 51
 strujni krug 41
 supravodljivost 50
 susceptibilnost 24
- Temperaturni koeficijent otpora 48
 tesla 99
 tok električnog polja 5
 transfiguracija zvijezde i trokuta 72
 trofazne struje 173
 trofazni generator 174
 trokut snaga 157
- Ukupni magnetski tok 117
 ulančeni magnetski tok 100
- Valencija 82
 valna duljina 147
 vat 63
 veber 98
 višefazne struje 173
 vlastita frekvencija 173
 vodljivost
 - induktivna 161
 - kapacitivna 161
 - omska 161
 volt 10
 vremenska konstanta 26, 112
 vrtložne struje 133
- Wheatstoneov most 68
- Zakon protjecanja 109, 112
 zvjezdište 76