Zoran Bobič Šonc

Optimalni solverumi Apolloniosovih problema šestarom i ravnalom[1]

Sažetak: Apolloniosovi problemi su problemi teinometriskih (geometriskih) konstrukcija šestarom i ravnalom koje je postavio grčki matematičar Apollonios iz Perga u III. stoljeću prije n. ere. Problemi se odnose na titenaciju, tj. smještenje cirkulusa (kruga) među druge teinometriske formoide (običja), kao među: točke, direkte, rektoliniske formoide (trigone, kvadrate, ortogone, rombe), a prvenstveno među zadane hemicirkuluse i cirkuluse. Konstrukcije solveruma Apolloniosovih problema su se pojavljivale tokom 23 stoljeća u trima povijesnim etapama i to: u prvoj etapi III. stoljeća pr.n.ere po Apolloniosu kao apsolutne konstrukcije, u drugoj etapi krajem XVI. stoljeća po Getaldićevoj metodi dilongacije radiusa kao apsolutne konstrukcije i konačno u trećoj etapi krajem XX. stoljeća nakon pojave procedentne logokodusne teinometrije. Do danas su novoeuklidikom optimalno riješeni svi izvorni i naknadni Apolloniosovi problemi i to isključivo upotrebom šestara i ravnala primjenom 'apsolutnih' i 'procedentnih' teinometriskih konstrukcija. Izneseni su kratka povijest i filozofija Apollniusovih problema, a karakteristične konstrukcije solveruma prikazane su fazama konstruiranja.

Ključne riječi: Apollonios, Apolloniosovi galski problemi, Apolloniosovi problemi, Blanuša, cirkulus, euklidika, geometrija, Getaldić, hemicirkulus, logokodus Ķ novoeuklidika, procedencija, teinometrija, titenacija

---

[1] Članak je doslovno prenesen iz rukopisa. (opaska urednika)
-Izvođenje konstrukcija šestarom i ravnalom znači da se one izvode samo pomoću kružnih lukova i pravih linija, a u praksi ravnim crtama
-U članku su korišteni znanstveni termini matematike i teinometrije, kako bi se izneseno štivo moglo jednoznačno koristiti i prevoditi na druge jezike. Za srednje školstvo potrebno je štivo pojednostaviti i koristiti termine na pojedinom jeziku u skladu s uzrastom učenika. (opaska autora)

1. Povijest i filozofija Apolloniosovih problema

Po spoznaji drevnih civilizacija stare ere Sunce je stvoritelj svega materijalnog svijeta i svega života na Zemlji, pa je stoga bilo vrhunsko božanstvo (Ra, Apollon). Sunce se po njima tako nalazi u svemu postojećem. Time je od davnina nastala težnja matematičara da u sve oblike protežnosti materijalnog svijeta mogu smjestiti simbol Sunčevog diska prikazanim cirkulusom (krugom) i simbol Sunčevih zraka prikazanih direktusima (pravcima). Stoga bi se sve konstrukcije protežnosti mogle dati grafički prikazati samo pomoću šestara (cirklusa) i ravnala (lineala) koje se u praksi nadomještava crtačkim trokutnicima[2].

U teinometriji[3] diametar cirkulusa može predstavljati projekcije cirkulusa na okomitoj ravnini iz čega proizlazi da se sve u teinometriji može konstruirati samo pomoću cirkulusa[4].Vrhunac u razradi takve filozofije teinometriskih konstrukcija donio je u znanosti glasoviti Apollonios iz Perga (262 - 196) koji je znao reći: "geometriske" konstrukcije nalaze se skrivene u igri širenja krugova nastalih od padanja kišnih kapi na površinu vode, slika 1. Ukratko, u krugovima kišne lokve krije se sva "geometrija".

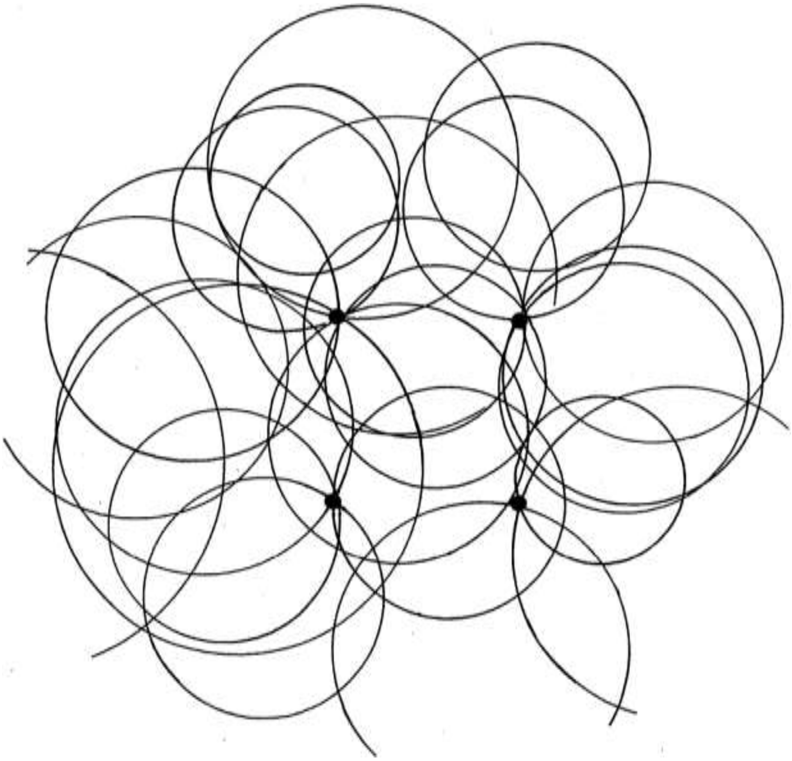
Apollonios je smatrao da se cirkulus kao Sunčev oblik treba naći u svim konstrukcijama protežnosti, tj. da bi se mogao dati smjestiti u sve konstrukcije protežnosti, i one s više krugova, pa je po tome nazvan "kralj krugova", od grčki bazileis kiklosis. Tako su nastali teinometriski problemi smještenja cirkulu- sa među ostale teinometriske oblike (formoide) koji su po Apolloniusu nazvani Apolloniosovi problemi.

Dio teinometrije koji proučava i rješava probleme smještenja jedne teinometriske oblike u druge naziva se 'titenalna teinometrija', od grč. titenaj, što znači smjestiti, njem. *Einbettung*, rus. *smješčenije*, fran. *immersion*, engl. *imbeddings*.Vrhunac titenalne teinometrije je u povijesti matematike donio glasoviti matematičar XX. stoljeća akademik Danilo Blanuša (1903. - 1987.) rodom iz Osijeka kada je višedimenzionalne zakrivljene prostore smjestio u euklidske prostore. Titenaciju zakrivljenih višedimenzionalnih prostora nastavio je njegov učenik Ivan Ivanšić na Sveučilištu u Zagrebu.

[2]Crtački trokutnik je tehničko pomagalo u obliku trokuta i služi za crtanje, a crtaći trokut je trokut koji se dobiva crtanjem, tj. lik koji se crta.

[3]**Teinometrija je matematička disciplina koja znači izmjeru protežnosti, grč. teine, protežnost. Termin "geometrija" koristi se i dalje u okviru njegovog osnovnog značenja izmjere planeta Zemlje i njenog tla, zajedno s terminima: geografija, geodezija, geoskopija, geofizika, geologija i dr. Ge znači tlo, Zemlja.**

[4] Stranice ortotrigona tj. pravokutnog trokuta u biti su projekcije cirkulusa, pa Pitagorov teorem vrijedi tako i za cirkuluse.



Sl. 1.: Apolloniusov kvadrat među krugovima kišne lokve
Izgled nepravilnog kvadrata je optička varka

Vrhunskom titenalnom teinometriom je 'novoeuklidika'[5], u koju spada i procedentna logokodusna tei- nometrija, postala daljnja nadgradnja 'euklidike' antičke Grčke.

Apolloniusovi problemi su se u povijesti od preko dva milenija rješavali u trima karakterističnim periodama i mogu se svrstati u tri osnovne grupe koje čine:

1. Izvorni Apolloniosovi problemi tzv. arheproblemi koje je postavio sam Apollonios u III. stoljeću pr.n.ere.

2. Apolloniosovi galski problemi koje je apsolutnim konstrukcijama riješio Dubrovčanin Marin Getaldić u tadašnjoj Galiji, rimsko-francuskoj provinciji, krajem XVI. stoljeća, i

3. Apolloniosovi novoproblemi koji su razrađeni i riješeni kao konstrukcije mijene protežnosti nakon pojave procedentne logokodusne teinometrije krajem XX. stoljeća.

5Novoeuklidika je daljni razvoj i nadgradnja euklidike antičke Grčke uvođenjem: kretanja točke i formoida zakrivljenih i višedimenzionalnih prostora i matematičko programirane mijene protežnosti, mutoteinometrije (Lobačevski, Rieman, Hilbert, Blanuša).

Svi solverumi Apolloniosovih problema mogu se danas konstruirati čisto teinometriski, šestarom i ravnalom optimalnim konstrukcijama i to kao:

a) **Apsolutne konstrukcije** su matematički apsolutno točne u svojoj konačnosti i one su radikalne s prebrojivim teinometriskim potezima. Apsolutne konstrukcije su i radikalne konstrukcije limesa procedentnih konstrukcija, koji se također mogu konstruirati po programiranim ciklusima, logokodusima; na primjer, dijagonala kvadrata kao limes beskonačne procedencije.

b) **Procedentne konstrukcije** predstavljaju slijed radikalnih konstrukcija koje se konstruiraju po logokodusu koji pouzdano i postupno vodi u limes. Kao takve su prirodno nužno aproksimativne s rastućom točnošću približavanja limesu koji predstavlja traženu nikad dostignutu konačnu konstrukciju.

2. Apsolutne konstrukcije Apolloniosovih problema

U apsolutne solverume Apolloniosovih problema spadaju konstrukcije koje je kao daljnju razradu izvornih problema postavio glasoviti pariški matematičar Francois Viete (1540. - 1603.). Sve te postavljene probleme poznate kao Apolloniosovi galski problemi[6] razradio je i riješio na originalan način njegov genijalan učenik Marin Getaldić (1566. - 1627.) rodom iz Dubrovnika, krajem XVI. stoljeća.

Getaldić je svoje konstrukcije rješenja Apolloniosovih galskih problema objavio u Veneciji 1607. godine na latinskom jeziku pod naslovom: *Apollonius Redivivus, seu* (ili) *restituta Apollonii Pergae*.

Apolloniusovi galski problemi sadržavaju konstrukcije rješenja titenacije (smještaja) i to: direkte između zadane katatenuze (osnovice) i rektoliniskih likova (trigona, kvadrata, ortogona, romba), direkte između cirkulusa i drugog direktusa, posebno titenacije određenog cirkulusa radiusa $_{t}\,r$ između cirkulusa i točke.

Apolloniosove galske probleme je Getaldić idealno riješio kao apsolutne konstrukcije matematički krajnje točne s prebrojivim teinometriskim koracima šestarom i ravnalom. To je bilo u Padovi, gdje je predavao G. Galilej, prava senzacija. Od tada Getaldića i Galileja veže značajno prijateljstvo popraćeno s međusobnim dopisivanjem.

Rješenja Apolloniosovih galskih problema titenacije cirkulusa između dva zadana cirkulusa Getaldić je objavio u Veneciji 1607. godine pod naslovom:

6Galski problemi su nastali u Galiji kako se tada nazivala rimska provincija u Francuskoj naseljena keltskim plemenima. U doba Rimljana se provincija naseobine Hrvata nazivala Croatia, starogrčki Kroateja, pa Hrvatsku često i danas internacionalno tako nazivaju.

MARINI

GHETALDI

PATRITII

R A G V S I N I. Apollonius
Rediuiuus.

Seu,

RESTITVTA APOLLONII PARGAEI

Inclinationum Geometria.

CVM P R. I V I L E G I I S.

VE N E T I I S

Apud Bemardum luntam
M DC VII

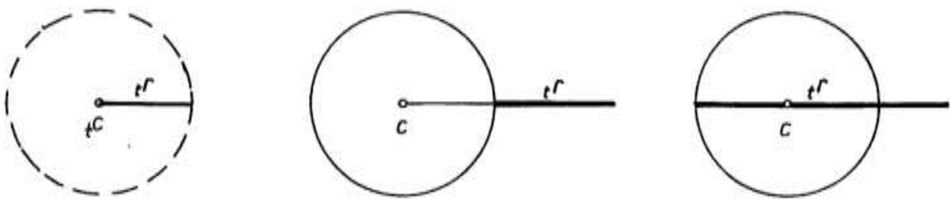
Sl. 2.: Preslika naslova Getaldićeve knjige

Supplementum Apollonii Galli. Vrhunac ortodoksne euklidske titenacije Getal- dić dostiže u djelima:

- *Razrada i rješenja* 42 *problema trigona i cirkulusa,* Venecija, 1607., 162 stranice.
- *Rješenja* 4 *Apolloniosovih problema titenacije direkte*, Venecija, 1607., 130 stranica.
- *Nadogradnja problema i rješenja Apolloniosovih kružnica sa* 29 *matematičkih lema,* Venecija, 1608.
- *Razrada geometriskih problema algebarskom analizom i sintezom*, Rim, 1630., posthumno, 354 stranice.

Probleme titenacije cirkulusa Getaldić je riješio svojom genijalnom idejom na način da je traženom titenalnom cirkulusu unaprijed odredio njegovu veličinu određenjem njegovog radiusa $_t r$. Time su svi galski problemi titenacije cir- kulusa mogli biti riješeni zadivljujućim apsolutnim konstrukcijama šestarem i ravnalom.

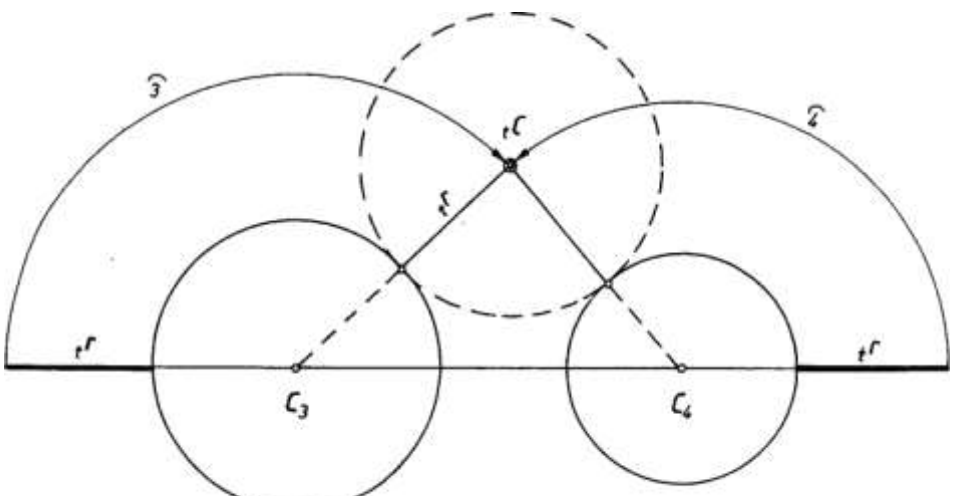
Ta originalna Getaldićeva metoda postavljanja titenalnog radiusa $_t r$ na određeno mjesto na početku konstrukcije nazvana je **metodom dilongacije radiusa** čija dva osnovna položaja dilongacije radiusa prikazuje slika 3.



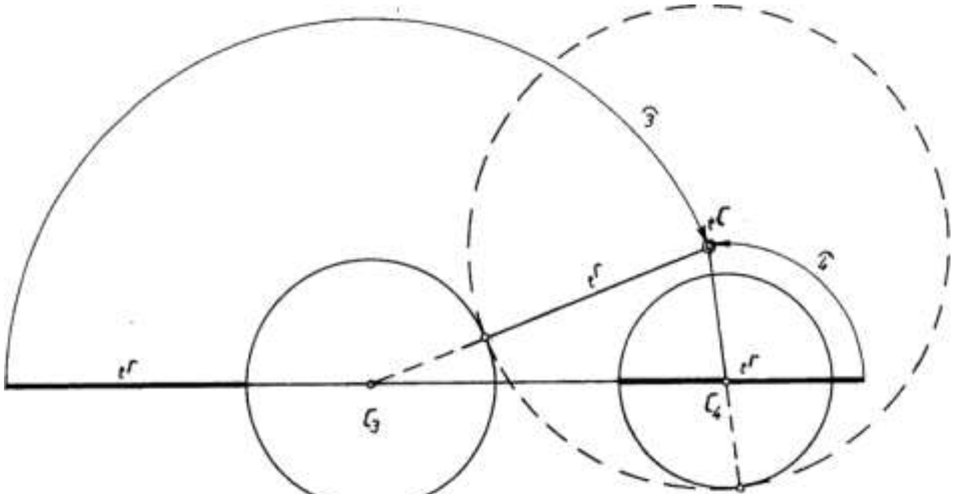
a) b) c)

Sl. 3.: a) Getaldićev titenalan cirkulus određen radiusom $_t r$, b) Getaldićeva dilongacija $_t r$ u produžetku radiusa zadanog cirkulusa, c) Getaldićeva dilongacija $_t r$ preko diametra zadanog cirkulusa

Karakteristične konstrukcije solveruma dva Apolloniosova galska problema titenacije cirkulusa s $_t r$ među dva zadana cirkulusa s centrima C_1 i C_2 radiusa r_1 i r_2 prikazuju slike 4. i 5. s primjenom cirkulusa C_3 i C_4.



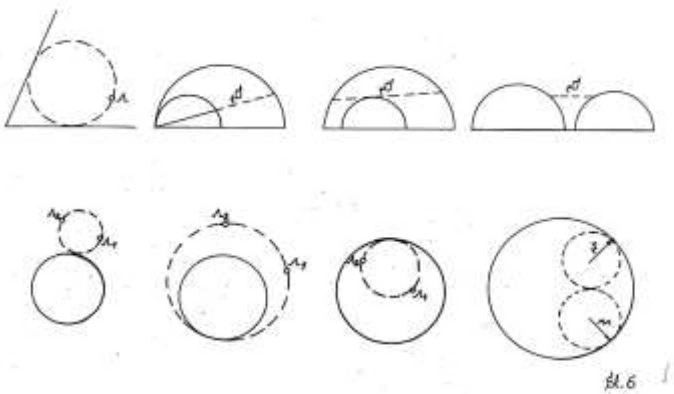
Sl. 4.: Intro-titenacija cirkulusa radiusa $_t r$ Getaldićevom metodom dilongacije radiusa



Sl. 5.: Introperi-titenacija cirkulusa radiusa $_t r$ metodom dilongacije radiusa

Prikaz ostalih Getaldićevih titenacija cirkulusa Apolloniosovih galskih problema izlazi iz okvira ovog članka.

Možemo sa zadovoljstvom konstatirati da su za mnoge titenacije zadane direkte i cirkulusa, za koje se smatralo da su konstruktivno neprovedive *casus irproducibilis*, pronađene krajem XX. stoljeća apsolutne konstrukcije kao što su za probleme prikazane na slici 6.



Sl. 6.: Apolloniosovi problemi titenacije riješeni apsolutnim konstrukcijama šestarom i ravnalom

3. Procedentne konstrukcije titenacije cirkulusa

Nakon pojave Getaldićevih apsolutnih konstrukcija titenacije ostao je povijesni problem solveruma izvornih Apolloniosovih problema koji se odnose na titenaciju cirkulusa u Talesovom hemicirkulusu među druge hemicirkuluse i na titenaciju cirkulusa među tri zadana cirkulusa.

Problem konstrukcija ovih Apolloniosovih problema ostao je otvoren sve do pojave procedentne **logokodusne teinometrije**[7] sredinom sedamdesetih godina XX. stoljeća u Zagrebu. Logokodusna teinometrija donijela je optimalna rješenja za sve Apolloniosove probleme i dokazala da mnoge konstrukcije tite- nacije ne mogu biti apsolutne jer pripadaju teinometriji procedentne prirodne mijene protežnosti. One su kao takve procedentne i time nužno aproksimativne a tek u nedostižnom limesu bi mogle biti apsolutne.

Osnovno svojstvo logokodusne teinometrije je to da se matematička točnost konstrukcija može programirati brojem primjene logokodusnih ciklusa u približavanju limesu procedencije. Praktičnu maksimalnu točnost logokodusnih konstrukcija određuje debljina crte konstrukcije na kojoj se konstrukcija procedencije beskonačno ponavlja, a time praktično na crti zaustavlja i postaje finiskonstrukcijajla tj. radikalna (lat. *finis*, kraj, granica).

Procedentnom logokodusnom teinometrijom su tako riješeni svi preostali naznačeni Apolloniosovi problemi titenacije cirkulusa šestarom i ravnalom.

Naznačene dvije grupe Apolloniosovih problema titenacije cirkulusa konstruiraju se šestarom i ravnalom primjenom osam postulatnih teorema i primjenom konstrukcije procedentnog tangentog trigona, tantrigona, s kojim je određen tražen cirkulus.

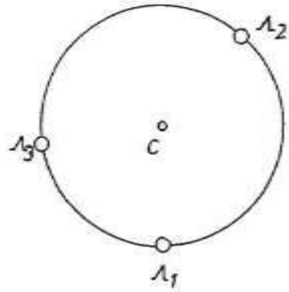
3.1. Osam postulata solveruma Apolloniosovih problema

Postulati su odabrani axiomi i teoremi na kojima se temelje analize i konstrukcije solveruma dotičnih problema. U konstrukcijama titenacije cirkulusa primjenjuju se uglavnom osam odabranih teorema koji su ovdje u funkciji postulata i koji su kako slijedi:

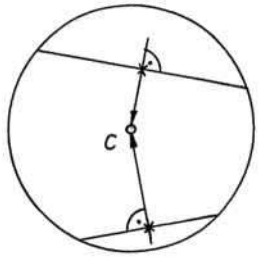
1) Svaki cirkulus određen je s tri točke cirkule (kružnice), slika

2) Simetrala svake tetive cirkulusa prolazi kroz centar cirkulusa

7)Matematičke kondicije (uvjeti) za *logokodus procedencije* su: l) Da osigurava procedenciju. 2) Da osigurava konvergenciju u određen limes. 3) Da se procedencija može prekidati u bilo kojoj točki. 4) Da konvergencija ne ovisi o početnoj točki, inicistigma ¡C. Da konvergencija ne ovisi o grafičkoj točnosti konstruiranja.

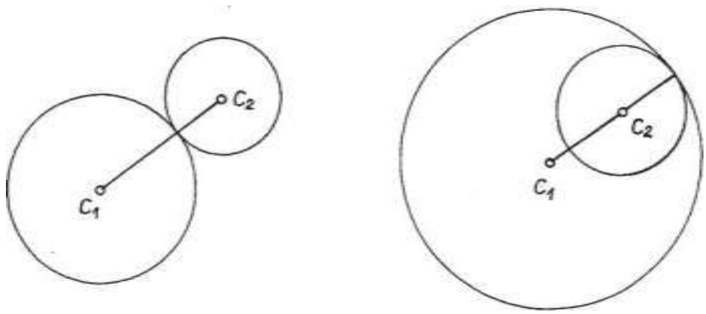


Sl. 7.



Sl. 8.

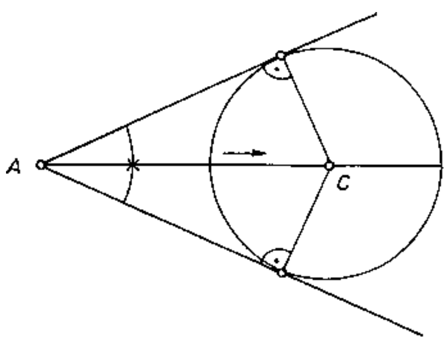
3) Dva cirkulusa se dodiruju u točki koja se nalazi na direktusu diacentrate (spojnice centara) cirkulusa



a) b)

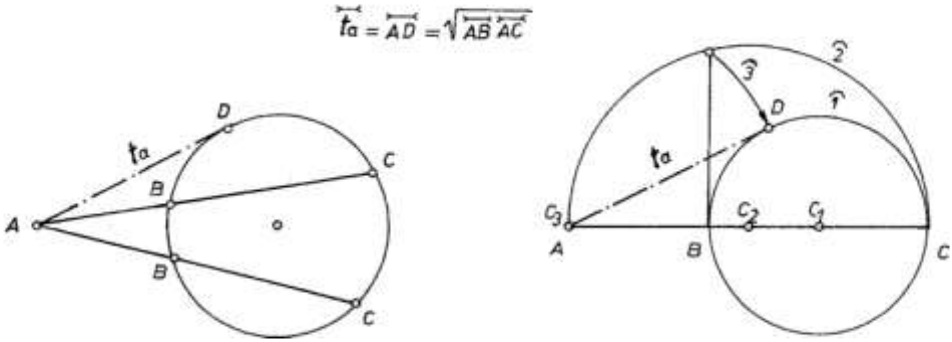
Sl. 9.

4) Simetrala gonusa kojemu su gonale (krakovi) tangente na cirkulus prolazi kroz centar cirkulusa



Sl. 10.

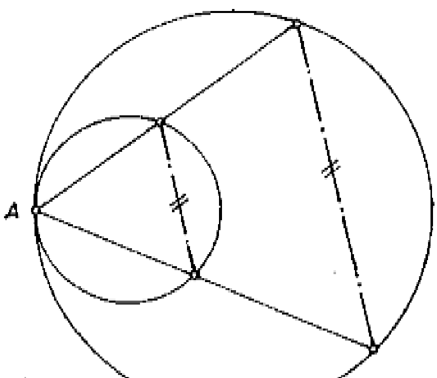
5) Tangenta na cirkulus je teinometriska sredina vanjskog odsječka (AB) i duljine sekate (AC) cirkulusa iz iste točke (Å)



a) b)

Sl. 11.

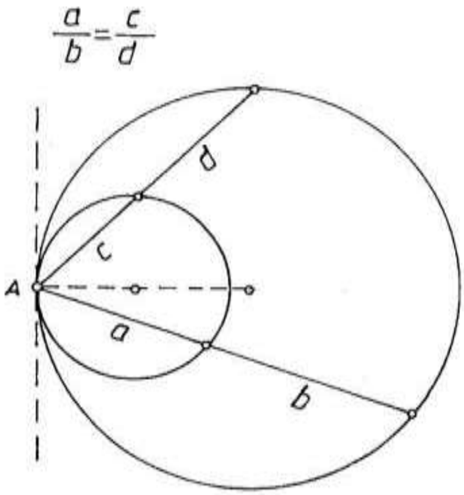
6) Tetive između dviju radijala kotangentnih cirkulusa su paralelne



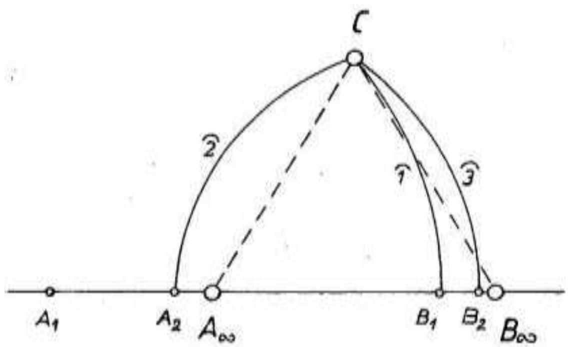
Sl. 12.

7) Parsusi (dijelovi) radijala iz iste točke (Å) kotangentnih cirkulusa su proporcionalni (slika 13)

8) Svaka procedentna konstrukcija ima svoj matematički program, logokodus *Ķ* slijeda konačnih promjena, permuta, svojih elemenata koji vodi u konstrukciju limesa procedencije. (slika 14)



Sl. 13.

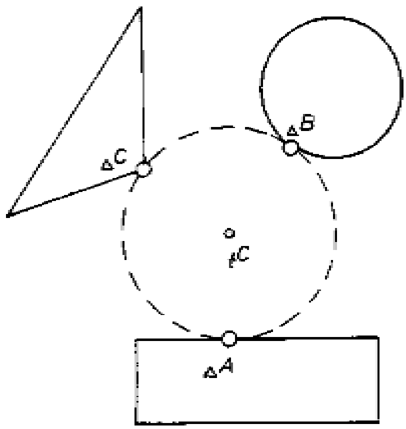


Sl.14. Procedentna logokodusna konstrukcija tato-trigona (pravilnog) s vrhom u Ċ primjenom kružnih lukova procedentnog radiusa A_nCi B_nC

3.2. Procedentan tantrigon

Tantrigon predstavlja skraćeni naziv za tangentan trigon koji, u procedentnoj logokodusnoj teinometriji, služi da se traženi titenalan cirkulus konstruira na temelju triju procedentnih točaka $_{\Delta}A_n$, $_{\Delta}B_n$, $_{\Delta}C_n$ trigona, primjenom prvog postulata konstruiranja Apolloniosovih problema.

Vrhovi tantrigona predstavljaju točke u kojima traženi titenalan cirkulus dodiruje zadane formoide (obličja) titenacije, po čemu se i naziva tantrigon, kako prikazuje primjer na slici 15.



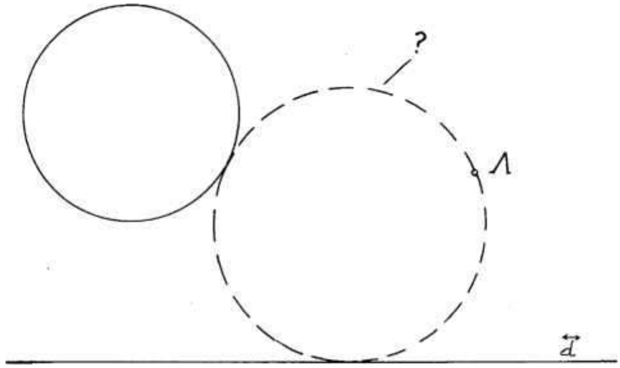
Sl. 15.: Tantrigon $_{\Delta}$ABC titecirkulusa $_{t}$Cir

Tantrigon predstavlja osnovnu konstrukciju adekvatnog logokodusa procedencije i u svakoj slijedećoj konstrukciji ciklusa logokodusa mijenja svoj oblik koji se postupno približava veličini cirkulusa u limesu, u čemu se sastoji procedencija tantrigona.

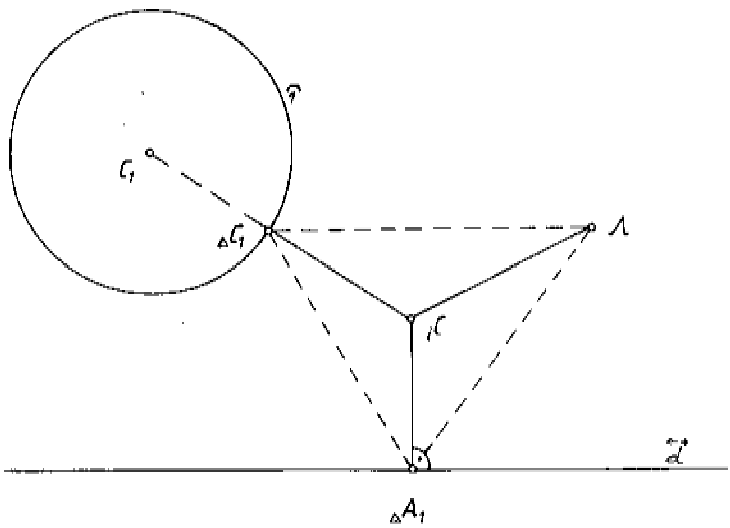
Simetrale stranica tantrigona određuju u logokodusu novi centar titenalnog cirkulusa, čime se postiže procedencija ka limesu solveruma. Vrhovi tantrigona se konstruiraju konstrukcijom radijala prema zadanim formoidima iz centra titenalnog cirkulusa. Radijale su uvijek okomite na tangente zadanih formoida.

Titenacija cirkulusa primjenom tantrigona može se zorno prikazati na slijedećim primjerima koji ujedno predstavljaju konstrukcije solveruma za tri Apolloniosova problema.

1. Primjer: Titenacija cirkulusa između zadanih formoida: točke Λ (lokus), direktusa d i cirkulusa Cir_1, slika 16.

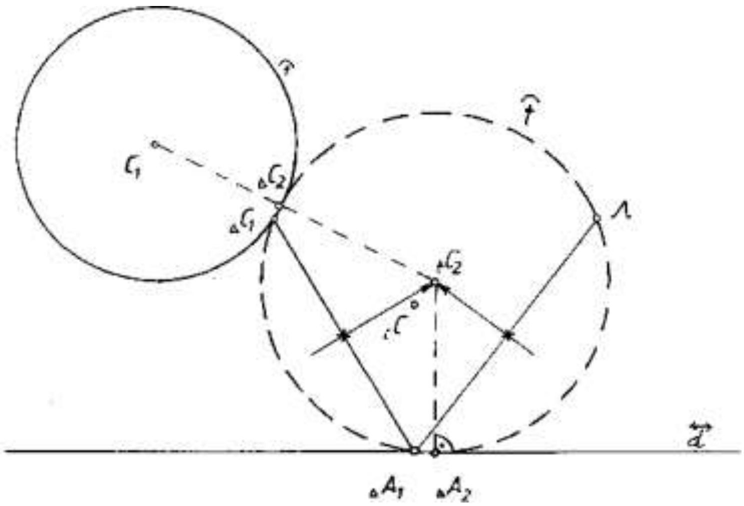


Slika 16. a) Apolloniosov problemum titenacije cirkulusa



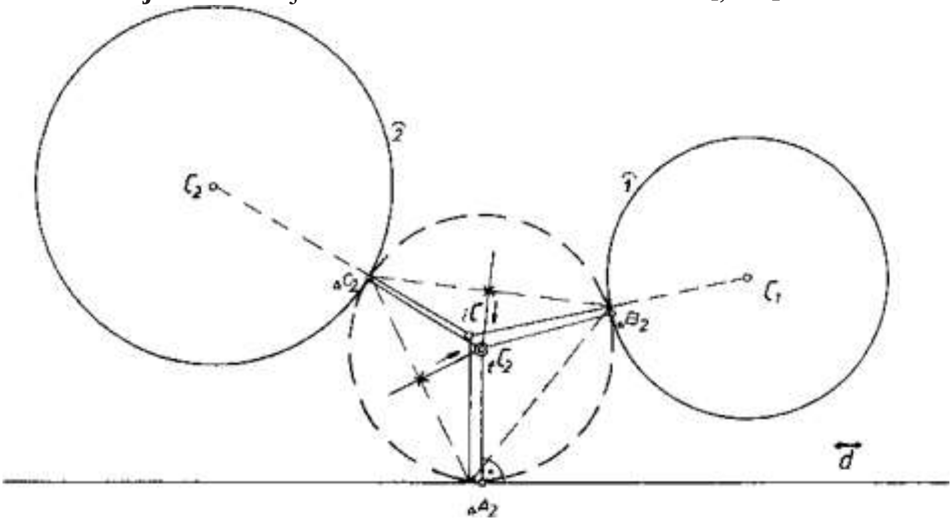
Sl. 16.b) Konstrukcija vrhova tantrigona $_{\Delta}A_1\, \Lambda\, _{\Delta}C_1$

Logokodus titenacije cirkulusa ima svoje karakteristične faze konstrukcije. Konstrukcija logokodusa započinje proizvoljnim određivanjem točke centra početnog inicijalnog titenalnog cirkulusa $_{i}$Cir u regiji (području) u kojoj se predviđa njegovo mjesto u limesu. Iz tako određenog inicicentra povlače se radijale i konstruira prvi tantrigon čije simetrale stranica (tenuza) određuju novi centar $_{t}C_{2}$ titenalnog cirkulusa, što prikazuju slike b) i c) na slici 16.



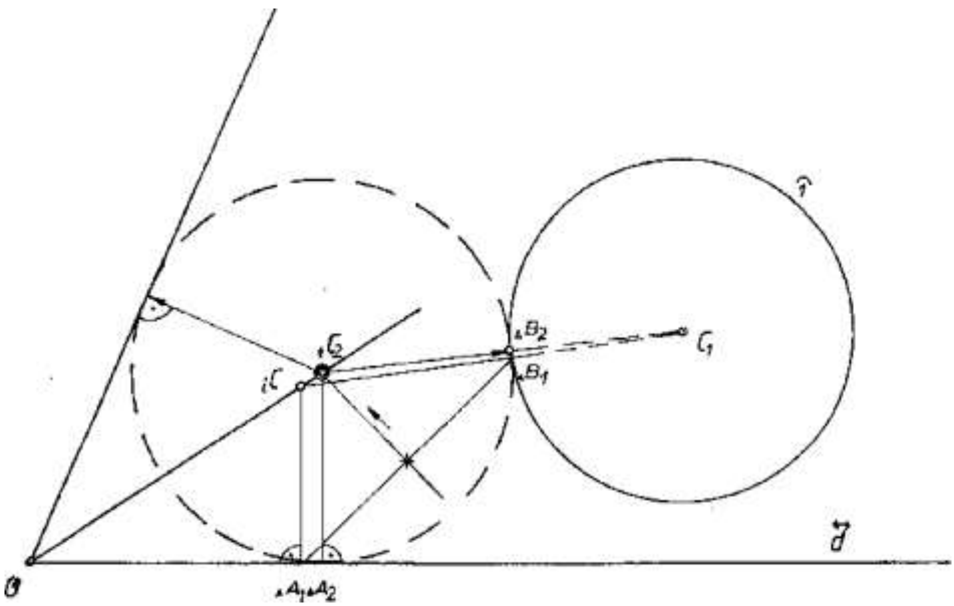
Sl. l6. c) Konstrukcija slijedećeg centra $_{t}C_{2}$ titecirkulusa

2. Primjer: Titenacija cirkulusa među dva cirkulusa Cir_1, Cir_2 i direktusa d



Sl. 17.

3. Primjer: Titenacija cirkulusa između cirkulusa Cir_1 i gonala (krakova) gonusa

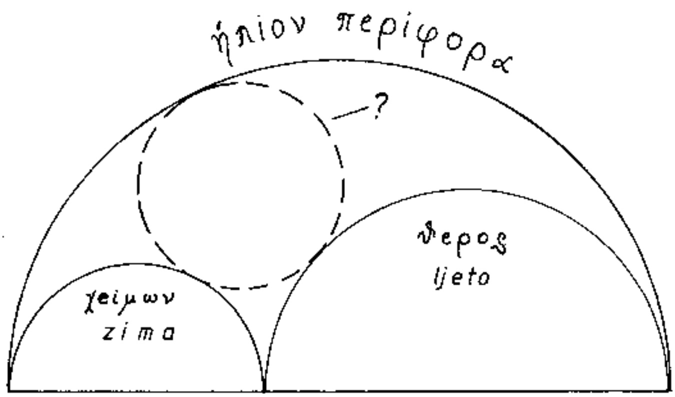


Sl. 18.

4. Solverumi izvornih Apolloniosovih problema

4.1. Titenacija cirkulusa između hemicirkulusa

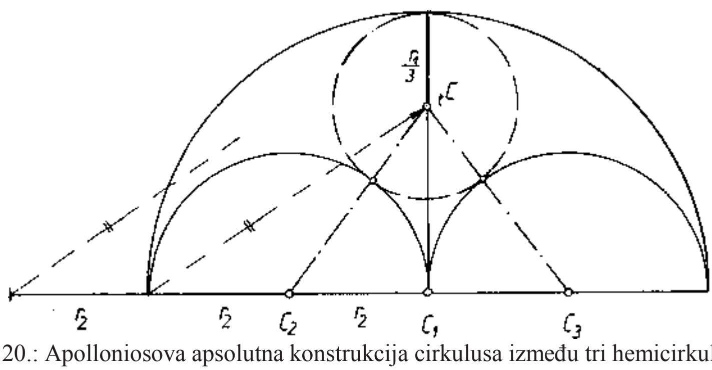
Problem se sastoji u tome kako konstruirati cirkulus ispod Talesovog Sunčevog svoda zvanog perifora, tako da dodiruje još dva hemicirkulusa ispod perifore. Jedan hemicirkulus predstavlja putanju Sunca iznad horizonta zimi u položaju perihela a drugi predstavlja dulju putanju Sunca ljeti u položaju afela.



Sl. 19.: Izvoran Apolloniosov problem titenacije cirkulusa

Problem s dva jednaka hemicirkulusa riješio je još Apollonios tako da je ustanovio da radius ${}_tr$ titecirkulusa ${}_t$Cir treba iznositi trećinu radiusa hemicirkulusa perifore.(sl.20.)

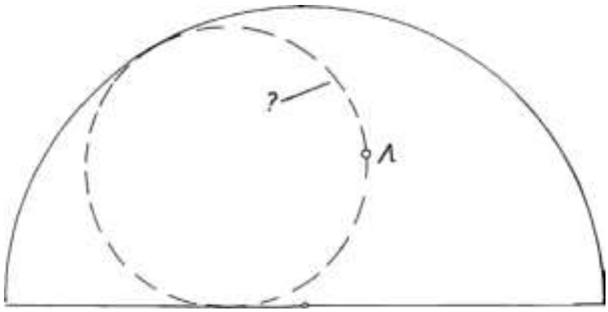
Ova Apolloniosova konstrukcija bila je na papirusnom svitku pohranjena u glasovitoj knjižnici u Aleksandriji i izgorjela je u požaru 640. godine nove ere. Naime, u knjižnicu su upaljenim bakljama upali Arapi s Istoka i zračna struja kojom su se prozračivali tuneli knjižnice povukla je plamen baklji na papiruse



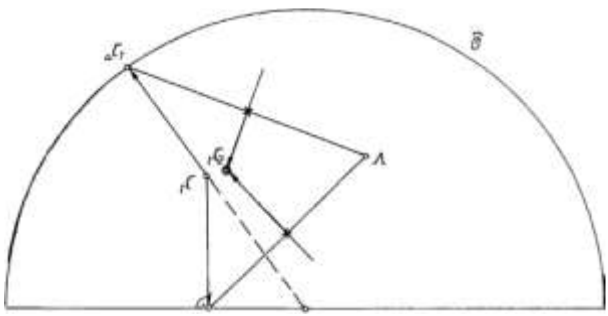
Sl. 20.: Apolloniosova apsolutna konstrukcija cirkulusa između tri hemicirkulusa

i zapalila ih. Konstrukcija je ostala zapamćena generaciskom predajom Apolloniosovih učenika u Srednjoj Aziji.

Konstrukcije ostalih slučajeva titenacije cirkulusa između tri hemicirkulusa su procedentne. One se temelje na konstrukciji logokodusa s procedentnim tantrigonom i prikazuju ih slike 21, 22, 23, 24, 25 i 26.

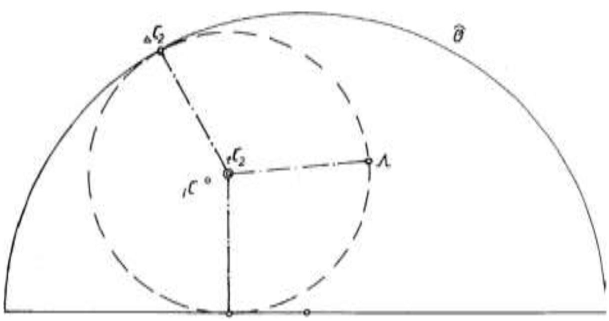


a)



„»7 0

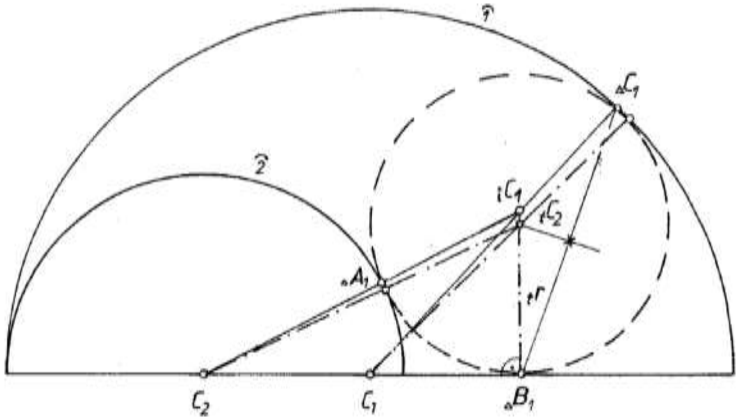
b)



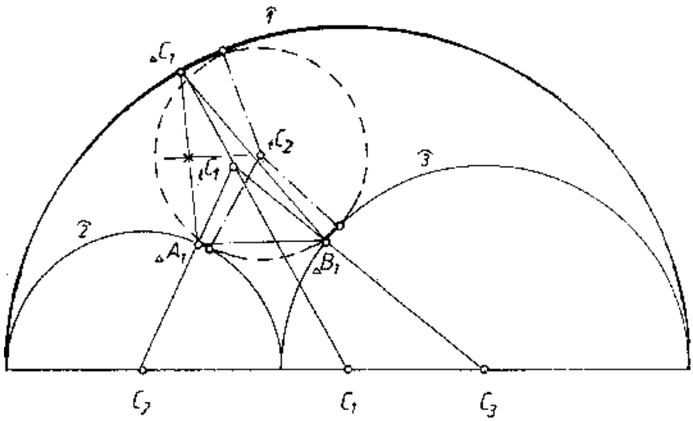
c)

Sl. 21.

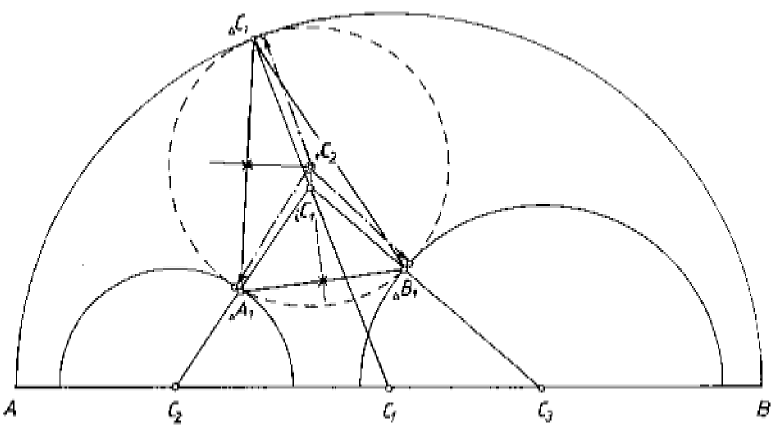
Sl. 24.

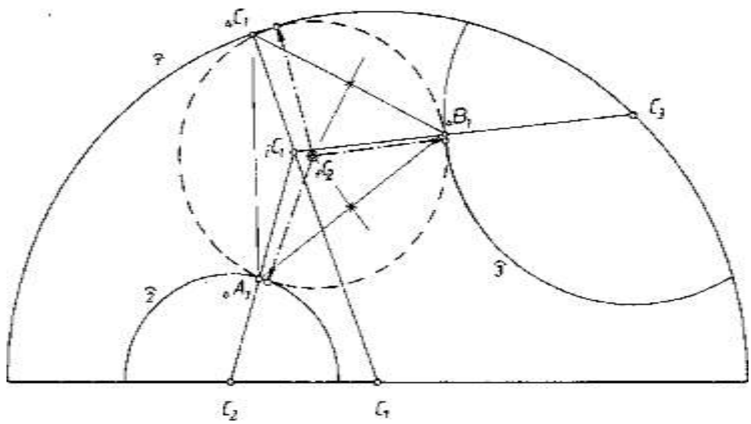


Sl. 22.: Titenacija cirkulusa između dva hemicirkulusa

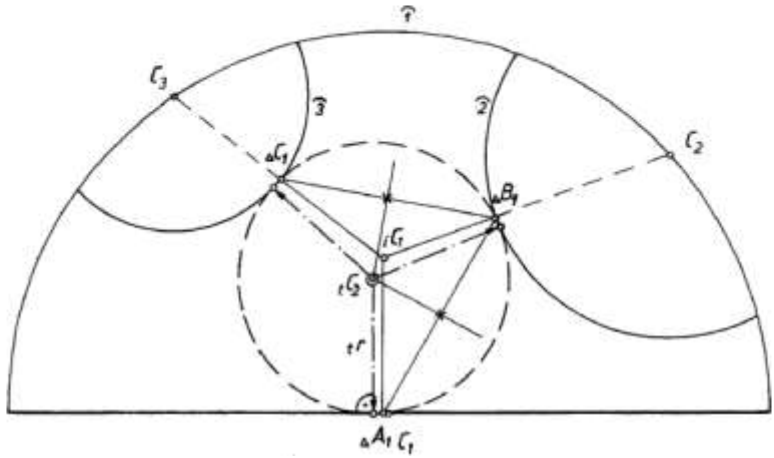


Sl. 23.





Sl. 25.



Sl. 26.

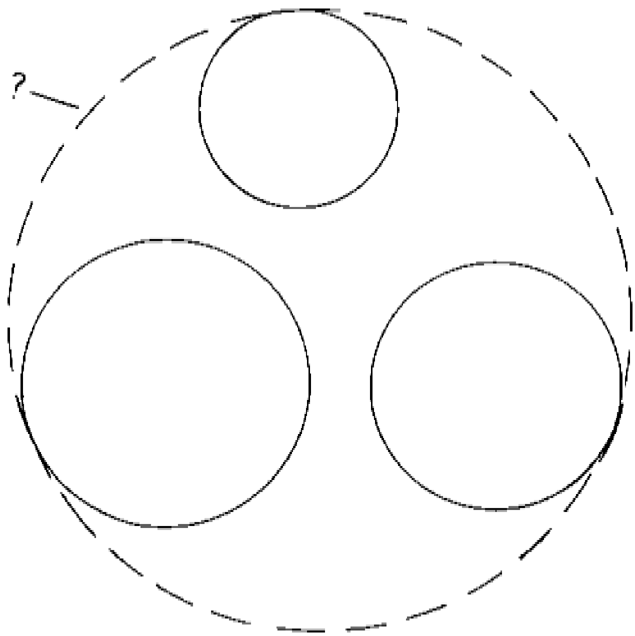
4.2. Titenacija cirkulusa između tri cirkulusa

Za Apolloniosove probleme s trima cirkulusima ne mogu postojati apsolutne konstrukcije već se ti problemi mogu optimalno riješiti primjenom proceden- tne logokodusne teinometrije. Tako se u strojarstvu ne mogu okretati tri zupčanika koji se međusobno dodiruju, temeljno je svojstvo diskretne materije kosmosa, u kojem je kontinuum samo privid (R. Bošković).

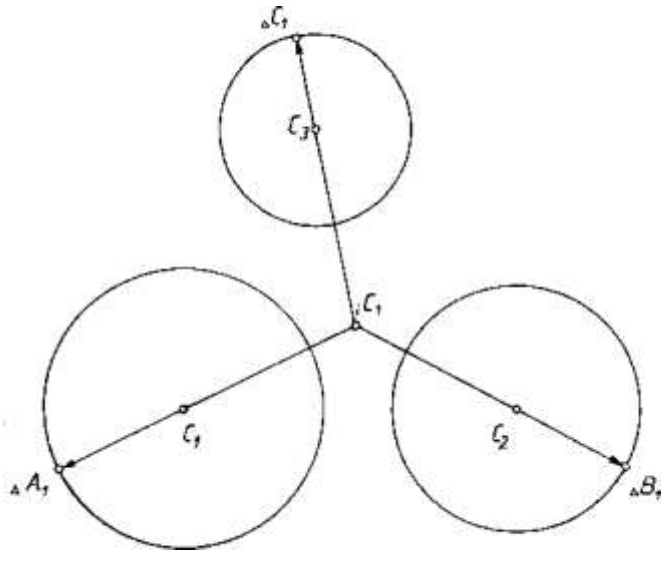
Svi se ovi solverumi konstruiraju čisto teinometriski šestarom i ravnalom istim logokodusom i redosljedom faza konstruiranja koje su: proizvoljno odabiranje centra ${}_iC_1$, zatim konstruiranje adekvatnog tantrigona ${}_\Delta A_{1\Delta}B_{1\Delta}C_1$ i konstruiranje slijedećeg centra ${}_tC_2$ titecirkulusa ${}_t$Cir simetralama stranica tantrigona.

Sl. 24.

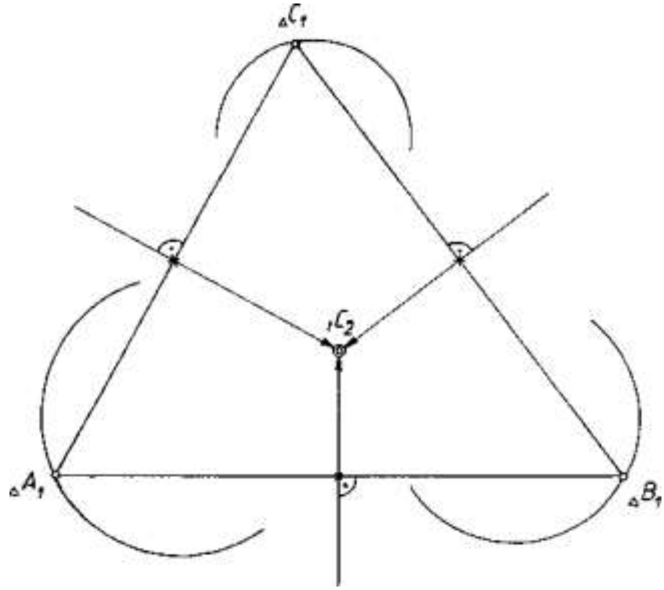
Konstrukcije solveruma izvornih Apolloniosovih problema triju cirkulusa prikazane su po fazama konstruiranja na slikama 27, 28, 29 i 30.



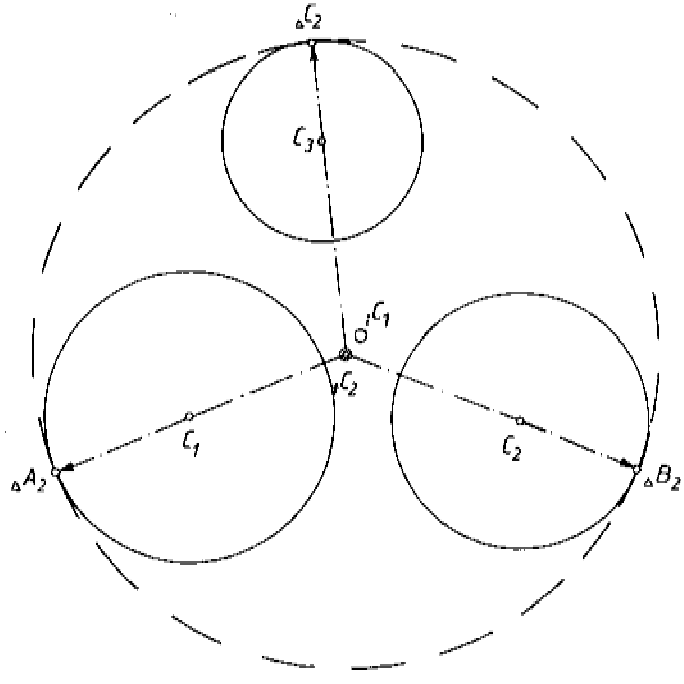
Sl. 27.a



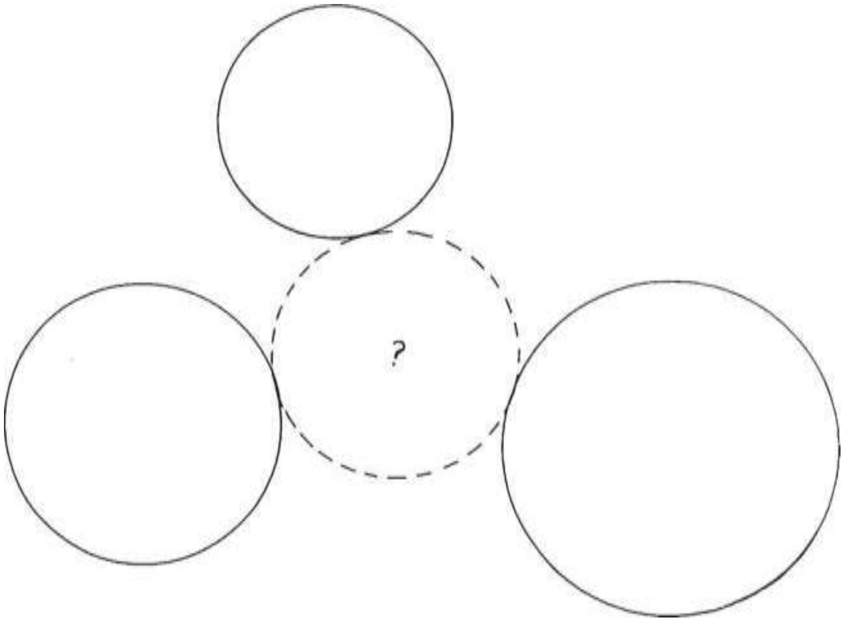
Sl. 27.b



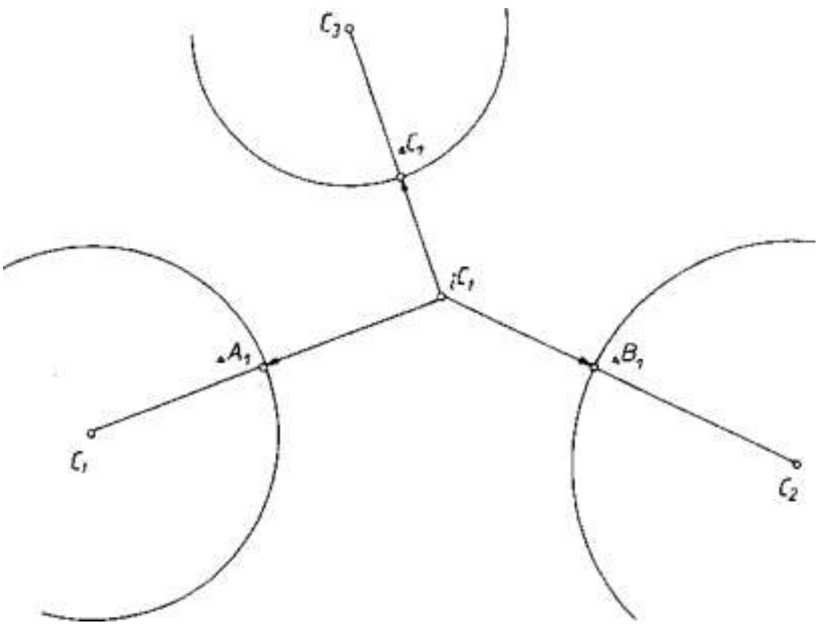
Sl. 27.c



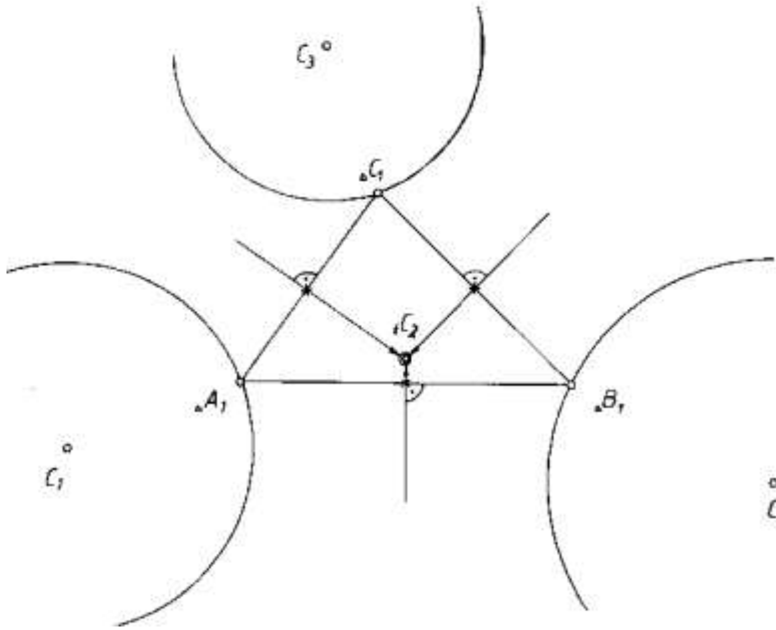
Sl. 27.d



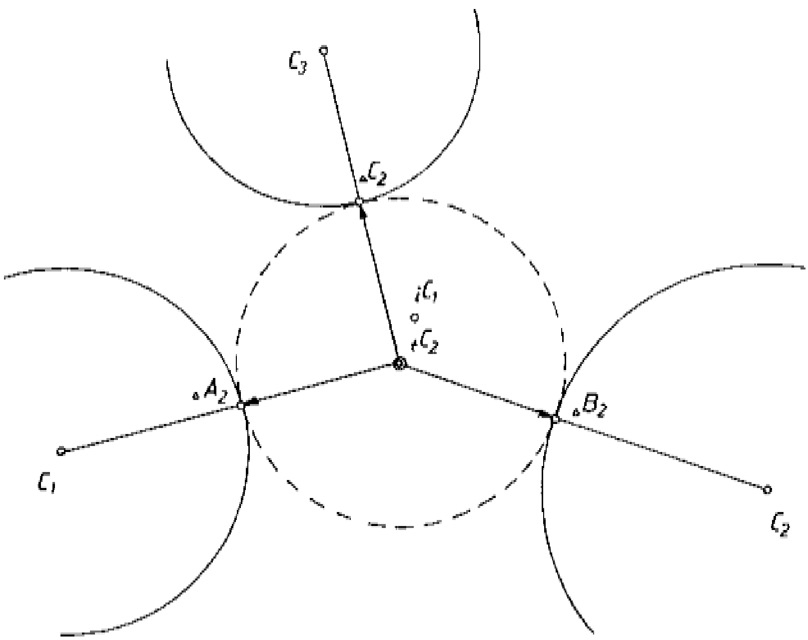
Sl. 28.a



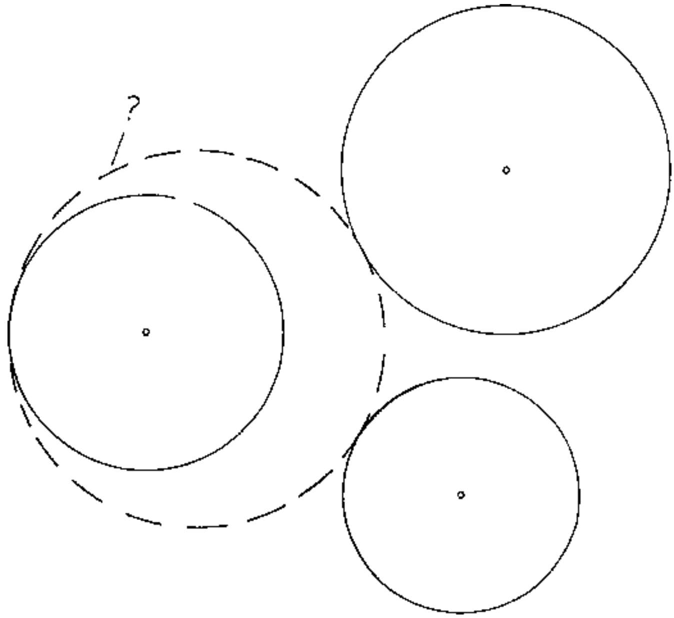
Sl. 28.b



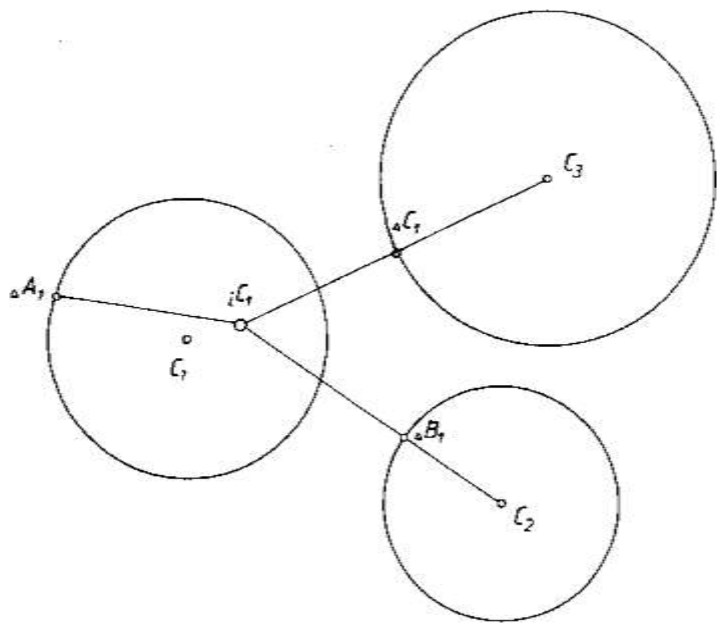
Sl. 28.c



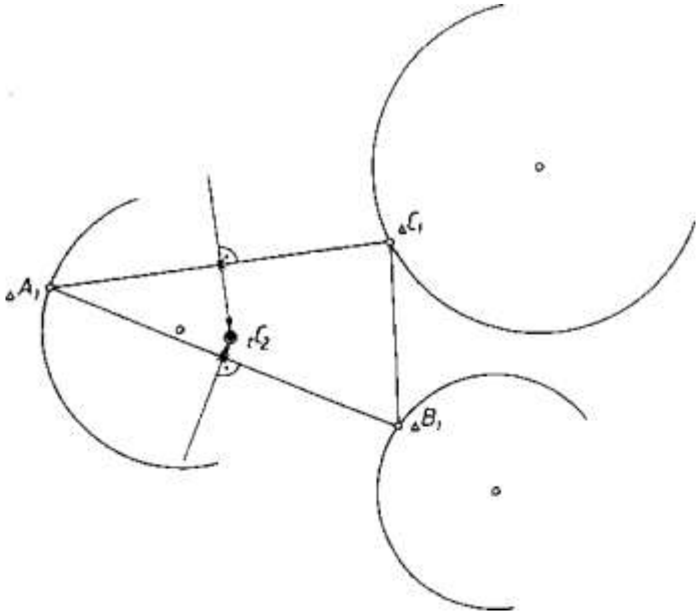
Sl. 28.d



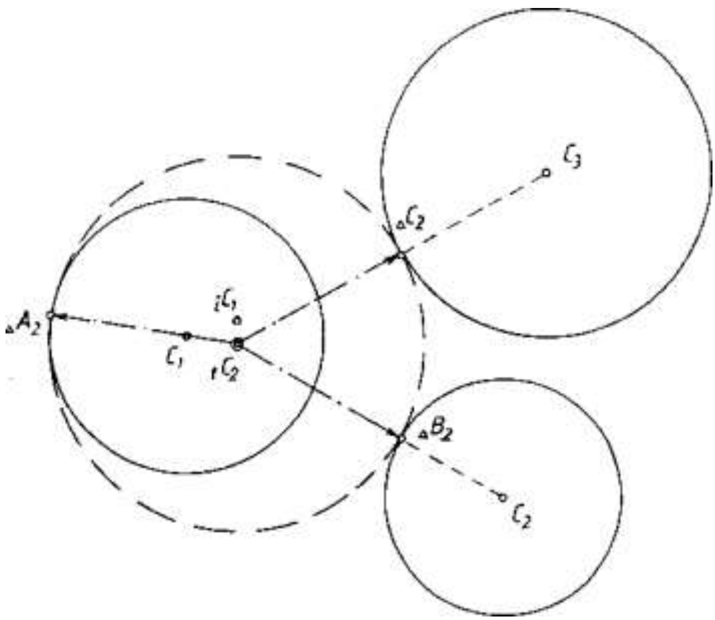
Sl. 29.a



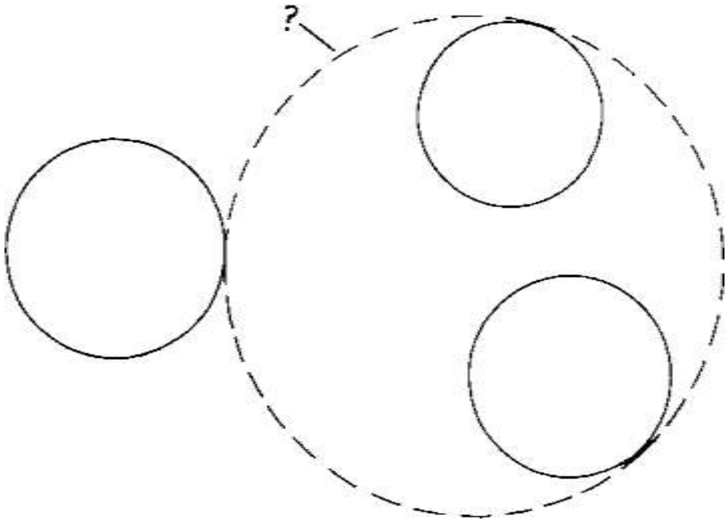
Sl. 29.b



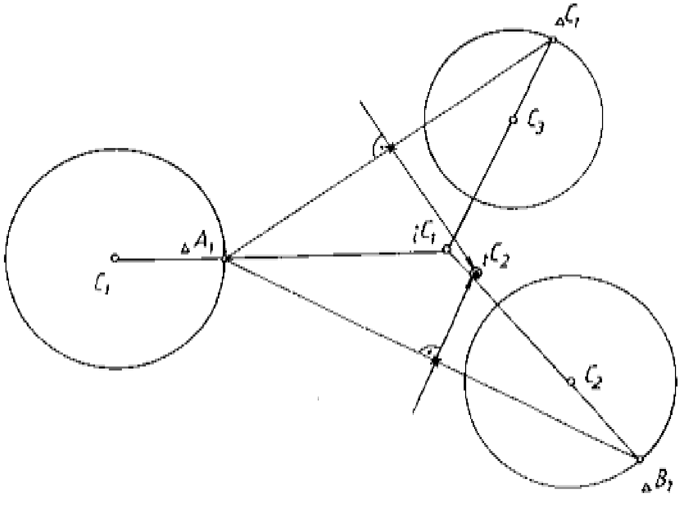
Sl. 29.c



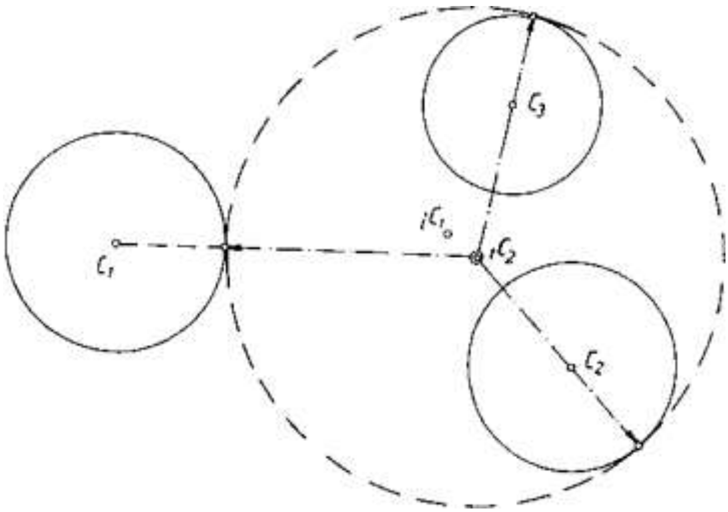
Sl. 29.d



Sl. 30.a



Sl. 30.b



Sl. 30.c

Nakon više od dva milenija od pojave Apolloniosovih problema ostaje radost konstruiranja njihovih solveruma budućim generacijama.

Zaključak

Izvorni Apolloniosovi problemi u III. stoljeću pr.n.ere zajedno s kasnije donesenim novim problemima i njihovim rješenjima krajem XVI. i krajem XX. stoljeća su danas svi rješivi šestarom i ravnalom optimalnim konstrukcijama i s minimalnim brojem teinometriskih poteza, Konstrukcije solveruma mogu biti ‘apsolutne’ koje su matematički točne u svojoj konačnosti i ‘procedentne’ koje su po prirodi nužno aproksimativne i čija se točnost može programirati. Procedentne konstrukcije imaju svoje adekvatne logokoduse, programe, procedencije koji pouzdano vode procedenciju preko željene točnosti u traženi limes. Procedentne konstrukcije praktično završavaju na debljini crte konstrukcije na kojoj se grafički beskonačno ponavljaju.

Znanstveni ideali naših predaka matematičara postaju tako radost ostvarenja prosperiteta stvaralaštva i zalog za uspješne znanstvene budućnosti *homo ingeniussa*, inženjera.

“Bijeli cvijet raste tamo gdje ga nitko ne traži.” *Vladimir Devide*

Literatura

1. Aristotel: *Metafizika i fizika*, prijevod izvornika, Tomislav Ladan, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1985. - 1987.
2. Blanuša Danilo: O nekim problemima smještavanja u geometriji, (titenacija, *Eibettung*, *immersion*, *imbeddings*), *Zbornik radova Srpske Aka.*, Mat. inst., knj. I. 1951., 91-100.
3. Blanuša Danilo: Einige Resultate Uber die Einbettung zweidimensionaler Raumformen konstanter Krumung in hohere Raume konstanter Krumung, *Proc. of the Int. Congress of Math.*, Vol. II, Amsterdam, 1954., 204-205.
4. Blanuša Danilo: Immersion de tores euclidiens à parallelogramme. fondamental de forme que conque dans une space spherique ou elliptique a trois dimensions, *Glasnik mat.-fiz. i astr*. T.9,1954., 15-25.
5. Blanuša Danilo: Uber die Einbettung hyperbolischer Raume in euklidische Raume, *Monatsh. f. Math*., 59, Wien, 1955., 217-229.
6. Blanuša Danilo: Immersion des spaces elliptiques dans des espaces euclidiens a l'aide de coordonnees de Weierstrass, *Glasnik mat.-fiz. i astr*., 10, 1955.,181-182.
7. Blanuša Danilo: Međusobno izometričko smještanje prostora od neizmjerno mnogo dimenzija s konstantnom zakrivljenosti, *Rad Jug. Aka.*, 302,1955., 87-111.
8. Blanuša Danilo: Quelques identites algebriques concernant les moyennes aritmetriques et geometriques, *Glasnik mat.-fiz. i astr.* T.11., 1956., 17-22.
9. Blanuša Danilo: A Simple Method of Imbedding Elliptic S|pace in Euclidean Space, *Glasnik mat.-fiz. i astr.*, T.12,1957.,189-200.
10. Blanuša Danilo: C-Isometric Imbednigs of the Hiyperbolic Plane and of Cylinders with Hyperbolic Metric in Spherical Space, *Annali di Matematica pura ed appli- cata* (IV), Vol.LVII, 1962., 321-337.
11. Blanuša Danilo: Isometric Imbedding of the Hyperbolic *n*-Space in a Spherical (6*n*-4) Space, *Glasnik mat.-fiz. i astr*., 19,1964., 55-61.
12. Blanuša Danilo: Imbeddings of some 3-dimensional Euclidean Spatial Forms in Spaces of Constant Curvature, *Rad JAZU*, Vol.531, 1965., 257-262.
13. Blanuša Danilo: *Viša matematika u četiri toma*, Tehnička knjiga , Zagreb,1963.-1974.
14. Borić Marijana: Marin Getaldić između tradicionalnog i novovjekovnog pristupa znanosti, 7. *simpozij Povijest i filozofija tehnike*, Kiklos - krug knjige, Zagreb, 2018.
15. Bronstein I. N. - Semendjajev K. A.: *Spravočnik po matematike dlja inženjerov i učaščihsja vtuzov*, Moskva,1980.
16. Dadić Žarko: *Razvoj matematike*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.
17. Devide Vladimir: *Matematička logika*, Matematički institut, Beograd,1964.,1972.
18. Getaldić Marin: *Apollonius Redivivus seu restituta Apolonii Pergaei*, Venezia, 1607.
19. Getaldić Marin: *Supplementum Apollonii Galli seu exsuscitata Apollonii Pergaei*, Venezia, 1607.
20. Getaldić Marin: *Apollonius Redivivus, seu restitutae Apolonii Pergaeide inclinationibus geometriae, liber secundus*, Venezia, 1613.
21. Heiberg J.L.: *Apollonii Pergaei quae graece extant cum commentariis antiques*, Lipsiae, 1891. - 93.
22. Kalin Boris: *Povijest filozofije*, Školska knjiga, Zagreb, 1982.
23. *Matematičeskij enciklopedičeskij slovar*, Moskva, 1988.
24. Ogilvy C. Stanley: Unterhaltsame Geometrie, Friedr. Viewag&Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1979.

25. Šonc B. Zoran: *Principi titenalne teinometrije (geometrije smještenja), konstrukcije šestarom i ravnalom*, rukopis, Zagreb,1991, 2007, 2017.
26. Šonc B. Zoran: *Principi i praksa logokodusne teinometrije mutoidije (mijene)*, rukopis, Zagreb, 1999.
27. Šonc B. Zoran: *Teinomatrija, geometrija, korotacije približavanja i udaljavanja molekula materije*, rukopis, Zagreb, 2014.
28. Šonc B.Zoran: *Solverumi* (*rješenja*) *Malfattijevog problema titenacije (smještenja) tricirkulusa u trigon šestarom i ravnalom,* rukopis, Zagreb, 2019.
29. Šonc B. Zoran: *Konstrukcija Steinerovog moniloida* (*ogrlice*) *šestarom i ravnalom*, rukopis, Zagreb, 2018.
30. Šonc B. Zoran: Lexikon euklidike i novoeuklidike, termini i konstrukcije, rukopis, Zagreb, 2019.
31. Tesla Nikola: *Moji pronalasci*, Jugoslovenska akademija znanosti i umjetnosti, Školska knjiga, Zagreb,1977.
32. Van der Waender Bartel Leerdert: *Probuždajuščajasja nauka, Matematika drevnog Egipta, Babilona i Grčke*, ruski prijevod s holandskog, Mat. Moskva, 1959.

ZAHVALE

- Izričitu zahvalnost upućujem visoko cijenjenom i poštovanom sveučilišnom profesoru dr.sc. Darku Fischeru na transponiranju logokodusa konstrukcije Apollonijevih problema u suvremen kompjuterski medij, čime je brojem iteracija logokodusa omogućeno programirano postizavanje željene grafičke točnosti, do najtanje crte, konstrukcija primjenom samo kružnice i dužina.

- Trajno i srdačno zahvaljujem kolegi s fakulteta sveučilišnom profesoru dr. sc. Zvonku Benčiću, glavnom uredniku zbornika PIFT-e, na urednoj, brižljivoj i požrtvovnoj ediciji mojih članka i uvođenja novih termina u novoj logokodusnoj geometriji.