

Ograničenja matematičkih modela u fizici i tehnici s osvrtom na klasični inženjerski elektromagnetizam

Sve što je meni važno je da teorija predvidi rezultate mjerenja.

Stephen W. Hawking

Sažetak: U radu se razmatra karakter matematičkih modela u fizici i tehnici te posljedično njihova ograničenja. Dok se u fizici razmatra priroda i u skladu sa znanstvenom metodom tako dolazi do fizikalnih zakona kojima se opisuju pojave u stvarnom svijetu, uloga tehnike je mijenjanje svijeta u smislu tehnološkog napretka primjenom fizikalnih zakona. Uz eksperimentalne metode, ključnu ulogu u razvoju fizike i tehnike igraju matematički modeli koji uključuju teorijsku podlogu temeljenu na fizikalnim zakonima te matematičku metodu rješavanja jednadžbi modela. Za realistične probleme, pogotovo u tehnici, nužno je približno, odnosno numeričko rješavanje odgovarajućih jednadžbi što implicira implementaciju na računalu. U postupku matematičkog modeliranja nailazi se na ograničenja na nekoliko razina. Temeljna ograničenja leže duboko u osnovi fizikalno-filozofskih postavki promatranja svijeta, a tiču se pitanja granica znanstvene spoznaje o prirodi uopće, na kakve se nailazi u fizici u vidu Heisenbergovih relacija neodređenosti, matematiци u formi Gödelova teorema nepotpunosti ili pak u osnovnim postavkama Kantove filozofije o granicama naše spoznaje. Druga klasa ograničenja odnosi se na činjenicu da su modeli pojednostavnjene simulacije razmatranih pojava, odnosno set parametara koje se uzima u obzir uvijek je ograničen. Sljedeći je korak u ograničenjima metoda rješavanja određene operatorske jednadžbe (primjerice diferencijalne jednadžbe), a posljednji je problem implementacija na računalu, tj. pitanje izračunljivosti. Činjenica je da se diferencijalne jednadžbe temelje na kontinuiranim veličinama, a ono što se procesira na računalu jesu konačni skupovi diskretnih podataka.

Nakon uvodnih razmatranja u radu se analiziraju matematičke analogije u modelima iz različitih grana fizike, a potom se razmatra povijesno-filozofski razvoj elektromagnetizma te značajke matematičkih modela u elektro-

magnetizmu. Konačno, izneseni su neki ilustrativni primjeri iz područja elektromagnetske kompatibilnosti i bioelektromagnetizma.

Ključne riječi: elektromagnetski modeli, matematički modeli, metode rješavanja, prirodni zakoni, različite klase ograničenja

Uvodna razmatranja

Jedan je od ključnih koraka u analizi prirodnih pojava razvoj i primjena odgovarajućeg matematičkog modela temeljenog na nekom fizikalnom zakonu, kao jednog od fundamentalnih koncepata znanstvene metode, s pomoću kojeg je moguće predvidjeti ponašanje realnog sustava s određenom (zadovoljavajućom) razinom preciznosti [1]. Nadalje, dok se u [1] problematiziraju značajke fizikalnog modela kao temeljnog koncepta za predočavanje realnih sustava u znanosti, problem ograničenja matematičkih modela u znanosti u smislu postojanja fundamentalnih ograničenja spoznaja o fizičkom svijetu propituje se u [2]. Tako se u okviru fizike, ali i filozofije znanosti, da postaviti pitanje postoji li ‘teorija svega’ (engl. *theory of everything* – TOE) i je li uopće dostupna u matematičkoj formi te je provjerljiva u eksperimentalnom smislu? Primjerice, veliki problem kod ‘teorije struna’ (engl. *string theory*) dosadašnja je nemogućnost eksperimentalne provjere [3].

Dostignuća znanosti XX. stoljeća upućuju na ono ‘što nije’ moguće preoračiti (brzina svjetlosti u Einsteinovoj specijalnoj teoriji relativnosti) te ‘što nije’ moguće znati (Heisenbergove relacije neodređenosti u fizici, Gödelov teorem nepotpunosti u matematici).

Drugi set ograničenja u modelima je, može se reći, praktične prirode, s obzirom na to da model predstavlja pojednostavnjenu predodžbu promatrane prirodne pojave, tj. broj varijabli koje se razmatraju uvijek je konačan. Taj set ograničenja sadržan je u formulaciji problema, u vidu dane operatorske jednadžbe (diferencijalne, integralne itd).

Sljedeće je važno pitanje koje su metode na raspolaganju za rješavanje operatorskih jednadžbi kojima je model matematički opisan. Matematički model prirodne pojave u osnovi implicira strukturu kontinuiranog karaktera (beskonačni broj stupnjeva slobode). S druge strane, velik broj problema u fizici, a pogotovo u tehnici (većina realističnih scenarija iz inženjerske prakse) svodi se na približno rješavanje diferencijalnih, integralnih, integro-diferencijalnih ili varijacijskih jednadžbi na računalo, pri čemu se pojava svodi na konačni set podataka. Dakle, svijet kontinuiranog transformira u diskretni set podataka koji obrađuje računalo.

Što se događa pri implementaciji kontinuiranog matematičkog modela implementiranog na računalo s konačnim brojem stanja? Primjerice, kod

rješavanja brojnih praktičnih problema s velikim sustavima linearnih jednadžbi nerijetko se javljaju tzv. loše uvjetovani sustavi, odnosno sustavi nepoznanica kod kojih se zbog nedovoljne preciznosti računanja dobivaju pogrešni, a katkad i potpuno besmisleni rezultati. Općenito se kod matematičkog modeliranja prirodnih pojava često nailazi na niz problema zbog prijelaza s idealiziranih kontinuiranih matematičkih operatora na skup diskretnih vrijednosti računala što se reflektira u točnosti, brzini konvergencije, stabilnosti, pojavi tzv. lažnih rješenja, numeričkih artefakata itd.

U radu se razmatra priroda matematičkih modela koji se koriste u fizici i tehnici te posljedično i nužna ograničenja koja iz toga proizlaze. Prvo su iznesene analogije u matematičkim modelima koji se koriste u različitim granama klasične fizike: mehanici, prijenosu topline, hidromehanici i elektromagnetizmu. Potom je dan sažeti prikaz povijesti razvoja osnovnih ideja u klasičnoj elektrodinamici uz neke konotacije filozofije znanosti. Slijedi poglavlje o nekim općim postavkama modela u elektromagnetizmu te primjeri ograničenja primjene nekih modela u elektromagnetskoj kompatibilnosti i bioelektromagnetizmu. Na kraju su dana neka zaključna razmatranja.

Analogije u matematičkim modelima – mehanika, termodinamika, hidromehanika, elektromagnetizam

Činjenica je da prirodni zakoni u različitim područjima fizike imaju isti matematički zapis, u vidu istih tipova diferencijalnih jednadžbi. Takve analogije nemaju samo teorijski značaj nego su desetljećima i temelj nekih važnih inženjerskih disciplina, primjerice temelj automatske regulacije. U nastavku se ukratko navode neke analogije u prijenosu topline, mehanici fluida, akustici i elektromagnetizmu.

Analogije u prijenosu topline, elektromagnetizmu i mehanici fluida

Temelji teorije toplinskih polja nastaju u XIX. stoljeću, klasičnim Fourierovim radovima. Vođenje topline kroz neku sredinu opisuje se Fourierovim zakonom:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T \quad (1)$$

gdje je \vec{q} gustoća toplinskog toka, T temperaturno polje, a λ toplinska vodljivost sredine. Količina topline \bar{Q} koja se prenese kroz infinitezimalni element izotermne plohe $d\vec{S}$ u diferencijalu vremena dt dana je izrazom:

$$\bar{Q} = \int_t \int_S \bar{q} d\bar{S} dt - \int_t \int_S \lambda \nabla T d\bar{S} dt \quad (2)$$

Pritom je veličina Q :

$$Q = \int_S \bar{q} \cdot d\bar{S} = - \int_S \lambda \nabla T d\bar{S} \quad (3)$$

toplinski tok. Iz općeg zakona održanja difuzijskog prijenosa topline da se izvesti jednadžba oblika: [4]

$$C_V \rho \frac{\partial T}{\partial t} = Q_i + \nabla(\lambda \nabla T), \quad (4)$$

gdje Q_i predstavlja volumnu gustoću unutarnjih toplinskih izvora, C_V je specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu po jedinici mase, a ρ gustoća tvari. Jednadžba (4) vrijedi uz pretpostavku homogenog i izotropnog tijela, pri čemu su parametri vremenski konstantni, a zanemaruje se promjena volumena prouzročena promjenom temperature. U slučaju razmatranja stacionarnih procesa jednadžba prijenosa topline (4) prelazi u Poissonovu jednadžbu oblika:

$$\nabla(\lambda \nabla T) = -Q_i. \quad (5)$$

Ako unutar promatranog volumena nema izvora topline, Poissonova jednadžba prelazi u Laplaceovu jednadžbu:

$$\nabla(\lambda \nabla T) = 0. \quad (6)$$

Za rješavanje jednadžbe (4) nužno je poznavati početne i rubne uvjete, dok je za rješavanje jednadžbi (5) i (6) potrebno poznavati rubne uvjete.

Do **analogije toplinskog s električnim tokom** dolazi se razmatrajući konstitutivnu jednadžbu u elektrostatici:

$$\vec{D} = -\varepsilon \nabla \varphi \quad (7)$$

gdje je \vec{D} gustoća električnog toka, ε permitivnost, a φ električni skalarni potencijal. Očita je analogija između gustoće toplinskog i električnog toka izraženih preko gradijenta temperature, odnosno skalarnog električnog potencijala. Električni tok ψ_{el} tad je definiran plošnim integralom:

$$\psi_{el} = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = - \int_S \varepsilon \nabla \varphi d\vec{S} \quad (8)$$

Poissonova jednadžba u elektrostatici je oblika:

$$\nabla(\varepsilon \nabla \varphi) = -\rho \quad (9)$$

gdje je ρ gustoća volumnog naboja. Laplaceova jednadžba za elektrostatsko polje u prostoru bez naboja je oblika:

$$\nabla(\varepsilon\nabla\varphi) = 0. \quad (10)$$

Kad se razmatra strujno polje, odnosno električno polje naboja u gibanju, treba istaknuti kako je jedan od temeljnih zakona električnih krugova, Ohmov zakon, povijesno gledano nastao upravo razmatranjem ponašanja temperaturnih polja te povlačenjem određene analogije. Tako se u diferencijalnoj formi zakon može pisati u obliku:

$$\vec{J} = -\sigma\nabla\varphi, \quad (11)$$

gdje je \vec{J} gustoća električne struje, σ specifična vodljivost, a φ električni skalarni potencijal. Električna struja tad je definirana plošnim integralom

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\int_S \sigma\nabla\varphi d\vec{S}. \quad (12)$$

Integralni oblik Ohmova zakona (11) uključuje integralne veličine: struju, napon i električni otpor, a Laplaceova jednadžba za stacionarno strujno polje je oblika:

$$\nabla(\sigma\nabla\varphi) = 0. \quad (13)$$

Nadalje, brojne su matematičke poveznice u mehanici fluida i elektromagnetizmu. Početkom XX. stoljeća elektromagnetizam, kao najmlađa disciplina klasične fizike, na sveučilištima širom Europe uglavnom se poučavao primjenom analogije iz mehanike fluida u smislu lakše vizualizacije elektromagnetskih pojava. Kao jedna od najčešćih analogija koristi se pojam nestlačivosti fluida, odnosno električnog naboja, a očita matematička analogija onda je dana u vidu jednadžbe kontinuiteta. U mehanici fluida jednadžba kontinuiteta je oblika:

$$\nabla(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial\tau} = 0, \quad (14)$$

gdje je ρ gustoća, a \vec{v} brzina gibanja fluida. U elektrodinamici pak jednadžba kontinuiteta povezuje izvore elektromagnetskog polja u vidu gustoće volumnog naboja ρ i gustoće struje \vec{J} :

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial\tau} = 0. \quad (15)$$

Tok fluida je oblika:

$$Q = \int_s \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \int_s \nabla \phi d\vec{S} \quad (16)$$

gdje ϕ predstavlja potencijal brzine.

Očite su analogije u izrazima za toplinski tok (3), električni tok (8), električnu struju (12) i tok fluida (16).

Analogije u mehanici i elektromagnetizmu

Znanost o elektricitetu kao egzaktna, rigorozna disciplina u smislu matematičkog zapisa uočenih pojava počinje Coulombovim istraživanjima sredinom osamdesetih godina XVIII. stoljeća. Sam izraz za Coulombovu električnu silu između dva naboja:

$$|\vec{F}_{el}| = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, \quad (17)$$

gdje je K odgovarajuća konstanta proporcionalnosti, q_1 i q_2 dane količine naboja, a r je udaljenost između dva naboja, analogija je na Newtonovu gravitacijsku silu između dva tijela mase m_1 , odnosno m_2 :

$$|\vec{F}_G| = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (18)$$

pri čemu je G odgovarajuća konstanta proporcionalnosti, a r udaljenost između tijela. Dok je gravitacijska sila uvijek privlačna, Coulombova sila može biti i privlačna i odbojna, ovisno o polaritetu naboja.

Nadalje, analogija Newtonove gravitacijske i Coulombove elektrostatske sile očituje se u njihovu konzervativnom karakteru, tj. rad tih sila ne ovisi u putanji nego o početnoj i krajnjoj točki. Tako je gravitacijska sila izražena negativnim gradijentom potencijalne energije:

$$\vec{F} = -\nabla W_{\text{pot}} = -m\nabla V, \quad (19)$$

pri čemu je m masa tijela na nekoj visini z iznad zemlje, a V gravitacijski potencijal:

$$V = \frac{W_{\text{pot}}}{m} = g \cdot z, \quad (20)$$

gdje je g gravitacijska konstanta. S druge strane, sila na naboj q koji se nalazi u elektrostatskom polju je oblika:

$$\vec{F} = -\nabla W_{\text{pot}} = -q\nabla\varphi, \quad (21)$$

gdje je φ elektrostatski potencijal:

$$\varphi = \frac{W_{\text{pot}}}{q}. \quad (22)$$

U oba je slučaja rad A koji se izvrši pomicanjem mase m , odnosno naboja q od neke točke r_A do točke r_B jednak razlici energije u krajnjoj i početnoj točki:

$$A = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_{r_A}^{r_B} \nabla W_{\text{pot}} \cdot d\vec{s} = W_{\text{pot}}(r_A) - W_{\text{pot}}(r_B). \quad (23)$$

Nadalje, po Newtonovim zakonima klasične mehanike sila \vec{F} mora biti jednaka promjeni količine gibanja materije:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{G}_{\text{meh}}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt} \int_V \rho_m \vec{v} dV, \quad (24)$$

gdje je \vec{G}_{meh} u mehanici impuls ili količina gibanja, ρ_m gustoća mase, a \vec{v} brzina gibanja.

Elektromagnetski impuls po analogiji na mehaniku je [5]

$$\vec{G}_{EM} = \int_V (\vec{D} \times \vec{B}) dV = \int_V \left(\frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H} \right) dV \quad (25)$$

pa je onda zakon očuvanja količine gibanja, koji uključuje i elektromagnetsku količinu gibanja oblika:

$$\frac{d}{dt} (\vec{G}_{\text{meh}} + \vec{G}_{EM}) = 0. \quad (26)$$

Odnosno, slijedi

$$\vec{G}_{\text{meh}} + \vec{G}_{EM} = \text{const}. \quad (27)$$

Vrijedi istaknuti da je postojanje naprežanja u elektromagnetskom polju te elektromagnetske količine gibanja upozorilo na fizički realitet elektromagnetskog polja. Jedna od značajnih analogija u mehanici i elektromagnetizmu tiče se pitanja energije u sustavu koji se razmatra što vodi na varijacijski račun. S druge strane, velik broj numeričkih metoda za rješavanje problema u matematičkoj fizici i inženjerstvu ima korijene u varijacijskom računu, odnosno problemu minimizacije funkcionala energije. Zahtjev za ponašanje sustava u skladu s principom minimuma energije prema računu varijacija svodi se na minimizaciju funkcionala:

$$F = \int_{t_1}^{t_2} (W_{kin} - W_{pot}) dt = \min \quad (28)$$

odnosno izraza:

$$F = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} mv^2 - W_{pot} \right) dt = \min, \quad (29)$$

gdje je m masa, a W_{pot} odgovarajuća potencijalna energija tijela u određenom položaju. S druge strane, funkcional elektromagnetske energije F koji odgovara jednadžbi (29) je oblika:

$$F = \int_{t_1}^{t_2} (W_{mag} - W_{el}) dt = \min. \quad (30)$$

Za slučaj slobodnog prostora, ako područje od interesa ne sadrži izvore, funkcional (30) je oblika:

$$F = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H} - \vec{D} \cdot \vec{E}) dV dt = \min. \quad (31)$$

Uspoređujući izraze (29) i (31) jasna je analogija potencijalne energije i energije pohranjene u električnom polju, odnosno kinetičke energije i energije pohranjene u magnetskom polju. Prema računu varijacija funkcionali (29), odnosno (31) poprimaju minimalnu vrijednost kad njegova varijacija iščezava:

$$\delta F = 0, \quad (32)$$

tj. može se pisati:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (33)$$

pri čemu je L odgovarajući lagranžijan u mehanici, odnosno elektromagnetizmu. Jednadžba (33) implicira zahtjev za pronalaženje funkcija koje će integral (29), odnosno (31), tj. pripadni funkcional minimizirati.

Sljedeća značajna analogija odnosi se na mehaničke i električne titraje. Mehanički titraji mase m obješene o oprugu u slobodnom prostoru daju se opisati preko diferencijalne jednadžbe oblika:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (34)$$

gdje je x pomak mase m od ravnotežnog položaja, a ω frekvencija titranja

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (35)$$

Električni titraji naboja q u strujnom krugu s kondenzatorom i zavojnicom (idealni titrajni krug bez gubitaka) daju se opisati preko istog tipa diferencijalne jednačbe:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad (36)$$

pri čemu je ω kružna frekvencija:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (37)$$

gdje je L induktivitet zavojnice, a C kapacitet kondenzatora. Očite su analogije između mase i naboja, ali i mase i induktiviteta u smislu mjere tromosti sustava.

Vrijedi napomenuti da su općenito u razvoju klasične fizike analogije s pojavama u mehanici išle toliko daleko da se od svake nove grane fizike očekivalo da se uklopi u koncept Newtonove mehanike. Ponekad je takav, donekle ipak radikalni pristup, imao i negativne posljedice u prihvaćanju novih ideja, kao što je to bio slučaj s Faradayevom idejom postojanja fizičkog polja i odbacivanjem njutnovskog koncepta djelovanja na daljinu.

Analogije u akustici i elektromagnetizmu

Val se općenito poima kao prijenos deformacije kroz prostor određenom brzinom, a u fizici se zapravo razlikuju tri vrste vala: mehanički valovi (poput valova zvuka), koji putuju samo unutar medija, elektromagnetski valovi koji predstavljaju samoodržavajuća titranja u vakuumu i valovi materije, koji također mogu postojati u vakuumu, a proučavaju se u kvantnoj fizici.

Jednačba akustičnog vala je oblika:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (38)$$

gdje je p tlak, a v brzina širenja vala.

U slobodnom prostoru valna jednačba za magnetsko polje je oblika:

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (39)$$

pri čemu je brzina širenja vala jednaka brzini svjetlosti c :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (40)$$

Vektorsku jednadžbu (39) moguće je raspisati po komponentana i prikazati preko tri skalarne jednadžbe, od kojih je svaka u matematičkom smislu analognu relaciji (38).

Spregnuti matematički modeli u multifizici

Vrijedi razmotriti neke modele koji objedinjuju različita polja fizike, poput gibanja čestice u elektromagnetskom polju, očuvanja konfiguracije plazme u magnetohidrodinamici ili porasta temperature u tkivu zbog elektromagnetskog zračenja (u okviru elektromagnetsko toplinske dozimetrije).

Na nabijenu česticu količine naboja q koja se nalazi u električnom polju \vec{E} djeluje sila:

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (41)$$

Prema drugom Newtonovu zakonu gibanje čestice mase m određeno je jednadžbom:

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (42)$$

Izjednačavanjem jednadžbi za silu (41) i (42) proizlazi:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E}. \quad (43)$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (43) je oblika:

$$\vec{r}(t) = \frac{q\vec{E}}{2m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0, \quad (44)$$

pri čemu je \vec{v}_0 početna brzina, a \vec{r}_0 početni položaj čestice.

Brzina gibanja čestice dana je jednadžbom:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{q\vec{E}}{m} t + \vec{v}_0. \quad (45)$$

Električno polje da se izrazi preko skalarnog potencijala φ :

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \quad (46)$$

pa je sila tad:

$$\vec{F} = -q \nabla\varphi \quad (47)$$

a jednažba (47) postaje:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -q \nabla \varphi. \quad (48)$$

U pravokutnom koordinatnom sustavu jednažba (48) razlaže se na tri skalarne jednažbe:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (49)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (50)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (51)$$

U slučaju da potencijal ovisi o sve tri prostorne koordinate, sustav jednažbi (49) – (51) analitički je nerješiv te ga je potrebno riješiti numerički.

U fizici plazme, u okviru modela magnetohidrodinamike tlak vruće plazme da se uravnotežiti izjednačavanjem gustoće sile (vektorski produkt gustoće struje \vec{J} i magnetske indukcije \vec{B}) i gradijenta tlaka na plazmu koji proizlazi iz mehanike fluida:

$$\vec{J} \times \vec{B} = -\nabla p. \quad (52)$$

U elektromagnetsko-toplinskoj dozimetriji porast temperature zbog izloženosti elektromagnetskom zračenju da se izraziti preko poopćene Pennesove jednažbe:

$$\nabla(\lambda \nabla T) + Q_b + Q_m + Q_{EM} = C_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (53)$$

gdje je Q_m volumna gustoća toplinskih izvora zbog metaboličkih procesa, Q_b volumna prokrvljenost tkiva:

$$Q_b = W_b C_{pb} (T_a - T), \quad (54)$$

pri čemu je W_b volumetrijski stupanj prokrvljenosti, C_{pb} je specifični toplinski kapacitet krvi, a T_a je arterijska temperatura. Gustoća toplinskih izvora zbog zračenja tkiva vanjskim poljem Q_{EM} je oblika:

$$Q_{EM} = \frac{\sigma}{2} |E|^2 = \rho \cdot SAR, \quad (55)$$

gdje je SAR specifična gustoća apsorbirane snage (engl. *specific absorption rate*). Za stacionarne procese član s desne strane (53) jednak je nuli.

Vrijedi istaknuti da je u inženjerstvu i fizici sve više u uzletu disciplina koja se obično naziva multifizikom (engl. *multiphysics*), u okviru koje se razmatraju problemi koji uključuju spregnute grane fizike, poput elektromagnetsko-toplinske dozimetrije [6].

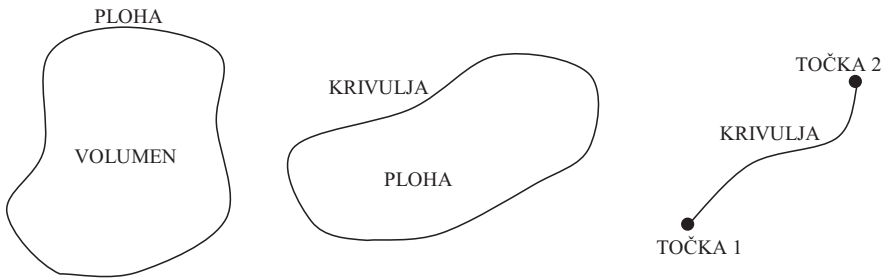
Simulacije u multifizici, koje obuhvaćaju različite fizikalne fenomene, igraju vrlo značajnu ulogu u brojnim poljima fizike i inženjerstva. Naime, multifizikalni procesi uključuju spregu različitih fizikalnih fenomena, tj. razmatranje različitih vrsta fizičkih makrokopskih polja koja međusobno do neke mjere utječu jedna na druge. Ako međudjelovanje tih polja nije značajnijeg opsega, onda se problemi mogu razmatrati odvojeno, ali ako se međudjelovanja tih fizičkih polja događaju u okviru iste vremenske skale uz pojavu jake nelinearne sprege, tad je nužno istodobno simuliranje tih veličina u realnom vremenu, odnosno oba polja potrebno je računati istodobno, ili kroz iterativne procedure. Tipičan je problem takvog tipa modeliranje plazme u okviru magnetohidrodinamike kod fuzijskih istraživanja u projektiranju nuklearnog reaktora.

Neke poveznice matematike i fizike

Cjeloviti matematički aparat vektorske analize uvelike je prilagođen pojmovima matematičke fizike, a njihova definicija usko je povezana s fizikalnim pojmovima iz mehanike fluida, mehanike, topline i elektromagnetizma. Operatori vektorske analize gradijent, divergencija i rotor imaju jasan fizikalni smisao u vidu prirode potencijalnih polja, postojanja monopolnih izvora i vrtložnih polja. Uz operator divergencije, rotora i gradijenta vezana su tri već spomentuta integralna teorema vektorske analize čijom je primjenom moguće sniziti dimenzionalnost problema, što je zorno prikazano na slici 1. [7]

Primjenom tih teorema razmatranje se s domene proračuna pomiče na granicu područja. Tako Gaussov teorem omogućava zamjenu operacija po volumenu odgovarajućim matematičkim operacijama po površini koja taj volumen zatvara. Stokesovim teoremom operacije po plohi zamjenjuju se odgovarajućim proračunima po krivulji koja tu površinu zatvara. Konačno, teorem o gradijentu integraciju po krivulji zamjenjuje razlikom vrijednosti neke skalarne funkcije u početnoj i krajnjoj točki krivulje. Očito, u sva tri slučaja integral više dimenzionalnosti sadrži određeni operator vektorske analize koji djeluje na vektorsku ili skalarnu funkciju, dok je s desne strane izraz niže dimenzionalnosti koji sadrži vektorsku ili skalarnu funkciju bez tog operatora. Vektorska polja složenija su od skalarnih polja, a jednoznačno su definirana ako su poznati i rotor i divergencija dane vektorske funkcije, što vrlo često stvara probleme u numeričkim postupcima rješavanja.

Analogije su očite, a pitanje je samo ima li analogni matematički zapis dublji konotaciju, ili mi različite pojave samo opisujemo istim matematičkim



Gaussov teorem Stokesov teorem teorem o gradijentu

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{S} \quad \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{S} = \oint_s \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad \int_{s_1}^{s_2} \nabla U \cdot d\vec{s} = U(s_1) - U(s_2)$$

Sl. 1.: Integralni teoremi vektorske analize

alatima koje smo razvili. Odnos matematike i fizike na fundamentalnoj razini, odnosno dubinska povezanost tih dviju disciplina nije kao ideja novijeg datuma i, s različitog stanovišta razmatrali su je brojni filozofi znanosti, fizičari i matematičari. Na to se pitanje referiraju i brojni suvremeni teorijski fizičari, poput Maxa Tegmarka, koji u knjizi *Mathematical Universe* iz 2014. iznosi prilično radikalnu ideju da realni svijet nije samo opisan matematikom nego da ‘jest’ matematika [8]. Drugi teorijski fizičar, Roland Omnès, kroz razmišljanja u svojoj knjizi *Converging Realities* [9] iz 2000. iznosi poveznice između prirodnih zakona i matematike te ide prema zajedničkom filozofskom pogledu na fiziku i matematiku. Polazeći od, na prvi pogled, “čudesne” efikasnosti u primjenjivosti matematike u prirodnim znanostima, Omnès zastupa stanovište da su same matematičke strukture zapravo destilat zakona prirode. Za Emmy Noether, pak, zakoni očuvanja rezultat su simetrija u prirodi.

Kako bilo, činjenica je da se, za razliku od fizike (u smislu Popperove ili Kuhbove filozofije o razvoju znanosti) zakoni matematike, jednom postavljeni (izumljeni ili otkriveni ... ?) ne mijenjaju niti nadopunjuju.

Povijesno-filozofski razvoj klasičnog elektromagnetizma

Značajniji razvoj znanosti o elektricitetu počinje s Benjaminom Franklinom, koji je 1747. godine dao osnovne ideje o korpuskularnoj teoriji elektriciteta. Također je uveo pojmove pozitivnog i negativnog naboja te zaključio kako se uvijek pojavljuju istodobno u istim količinama. Franklin je uveo i princip očuvanja električnog naboja i tako zaista postavio temelje znanosti o elektricitetu.

Početak rigoroznije matematičke analize elektromagnetskih pojava seže u sredinu osamdesetih godina XVIII. stoljeća i rad Charles-Augustina Coulomba koji pokazuje kako je električna sila na površini metalnog tijela proporcionalna "debljini električnog fluida" vezanog za površinu. Coulomb je smatrao kako su elektricitet i magnetizam dva odvojena fenomena što je vrlo vjerojatno usporilo istraživanje poveznica među tim pojavama u idućim desetljećima.

U XIX. stoljeću općenito se istraživanja elektromagnetizma razdvajaju u dva smjera: kontinentalni i britanski elektromagnetizam. Prvi, kontinentalni elektromagnetizam, ipak dijelom počiva na britanskim korijenima, odnosno Newtonovu konceptu djelovanja na daljinu (lat. *actio in distans*) i francuskoj matematičkoj školi, dok se britanski elektromagnetizam temelji na Faradayevu konceptu fizičkog polja. Kontinentalni je elektromagnetizam vrhunac doživio u Weberovu zakonu sile u okviru kojeg su ujedinjeni Coulombov, Ampèreov i Faradayev zakon. S druge strane, britanski elektromagnetizam u vidu Faradayevih ideja, Maxwellove teorije i Hertzove eksperimentalne potvrde te teorije uvelike je obilježio završnu fazu razvoja klasične elektromagnetske teorije.

Nakon formuliranja Coulombova zakona 1785., čija sličnost s Newtonovim zakonom gravitacije inspirira brojne istraživače, na značajnije doprinose u kontinentalnom elektromagnetizmu nailazi se u radovima Simon-Denisa Poissona, koji 1812. formulira prvu ozbiljnu matematičku teoriju elektrostatičke te magnetostatike 1824. godine. Generalizaciju Poissonove teorije provodi britanski samouki matematički genij George Green u radu objavljenom u privatnom aranžmanu 1828. godine, uvodeći današnji pojam Greenove funkcije i Greenov teorem.

Poveznicu između elektriciteta i magnetizma prvi eksperimentalno postavlja danski fizičar Hans-Christian Oersted 1820., a iste godine André-Marie Ampère formulira svoj zakon sile. Ampère također definira elektrodinamiku kao znanost o silama koje nastaju zbog naboja u gibanju. Nešto kasnije, 1827. godine, Georg Simon Ohm razmatra električnu struju prema analogiji na protok topline, po uzoru na Fouriera koji je nešto ranije proučavao širenje topline u vodljivom mediju.

Britanska struja elektromagnetizma počinje Faradayevim otkrićem elektromagnetske indukcije 1831. godine, ali i, što je možda još važnije, idejom fizičkog polja, uvelike nadahnutog prirodnom filozofijom Ruđera Boškovića. Faradayev eksperimentalni zakon elektromagnetske indukcije matematički je oblikovao njemački fizičar Franz Ernst Neumann s pomoću matematičke veličine koju je nazvao vektorski potencijal. Zakon samoindukcije djelo je pak američkog fizičara Josepha Henryja, a otkriven je samo godinu nakon Faradayeva.

Wilhelm Eduard Weber šezdesetih godina XIX. stoljeća unificira Coulombov, Ampèreov i Faradayev zakon u (Weberov) jedinstveni zakon sile. Weberov zakon bio je varijanta Coulombova zakona poopćenog na točkaste naboje u

gibanju. Da bi se iz Weberova zakona sile dobio Ampèreov zakon, elementi struja pretpostavljeni su u vidu pozitivnih i negativnih naboja koji se gibaju simetrično u suprotnim smjerovima tako da se Coulombova sila poništava. Iako se iz Weberove fomule mogao izvesti i Faradayev zakon, ubrzo su se pojavile ozbiljne kritike Weberova zakona u smislu ispuštanja zakona konzervacije energije. To je pokušao demantirati Weber osobno, izvođenjem poopćenja Coulombovih potencijalnih funkcija. U svakom slučaju, iz Weberova zakona proizlazila je formulacija trenutačnog djelovanja na daljinu za temeljnu elektromagnetsku silu pa je Weberov zakon označio vrhunac kontinentalnog elektromagnetizma. Kašnjenje zbog konačne brzine sile uveo je 1858. godine Bernhard Riemann i 1867. godine Ludwig Lorenz. U međuvremenu je 1864./1865. već bila objavljena Maxwelllova teorija temeljena na Faradeyevu konceptu polja pa je povijesno koncept djelovanja na daljinu izgubio bitku s Faraday-Maxwellovim konceptom polja.

James Clerk Maxwell, velikan britanskog elektromagnetizma, ali i jedan od najvećih fizičara svih vremena, razmatrao je 1856. analogiju elektriciteta s hidromehanicom, a pet godina poslije pokušava konstruirati mehanički model predočavanja elektromagnetskih pojava. Sredinom šezdesetih godina XIX. stoljeća Maxwell dovršava potpunu teoriju elektromagnetskog polja. Iz čisto matematičkih rezultata vlastite teorije Maxwell anticipira postojanje elektromagnetskih valova te ostvaruje veliko ujedinjenje u klasičnoj fizici povezujući elektricitet, magnetizam i svjetlost. Maxwell tako upućuje na elektromagnetsku prirodu svjetlosti, tj. zaključuje da je svjetlost elektromagnetski val u vidljivom dijelu spektra koji se prostorom širi u skladu sa zakonima elektromagnetizma. U izvornoj formi, Maxwelllova teorija sadržavala je dvadeset skalarnih jednadžbi koje je 1886. genijalni samouki fizičar viktorijanske ere Oliver Heaviside, više od dvadeset godina nakon Maxwellova izvornika i sedam godina nakon njegove smrti, reducirao na četiri vektorske jednadžbe koje sadrže samo polja i gustoće njihovih izvora.

U tom su smislu zakoni klasične elektrodinamike kojima se opisuje ponašanje makroskopskih elektromagnetskih polja izraženi skupom od četiri prostorno-vremenski ovisne parcijalne diferencijalne jednadžbe koje se danas nazivaju Maxwelllovim jednadžbama.

Uz diferencijalni, postoji i integralni oblik tih jednadžbi. Ovisno o tome miruje li promatrani elektromagnetski sustav ili se relativno giba u odnosu na dani referentni koordinatni sustav, u Maxwelllovim jednadžbama razmatra se djelomična ili ukupna promjena u vremenu. Ako se razmatra ukupna promjena u vremenu, onda se skup Maxwelllovih jednadžbi za mirujuće sustave može dobiti kao specijalni slučaj skupa jednadžbi za pokretne sredine ako je brzina gibanja jednaka nuli. Skup Maxwelllovih jednadžbi za gibajuće sustave prikazan je u dodatku A.

Interesantno je napomenuti kako je nešto kasnije, neovisno o Heavisideu, do iste četiri vektorske jednadžbe došao i Hertz, ali povijest znanosti primat daje Heavisideu. Vrijedi također istaknuti da je Heaviside favorizirao potencijale kao veličine u odnosu na polja.

Krajem osamdesetih godina XIX. stoljeća, desetljeće nakon Maxwellove smrti, sjajni njemački eksperimentalni fizičar Heinrich Rudolf Hertz, doktorski student velikog Helmholtza (koji je matematički formulirao zakon očuvanja energije), služeći se oscilatorom i rezonatorom, eksperimentalno dokazuje postojanje elektromagnetskih valova.

Između Maxwellovih jednadžbi u kojima se pojavljuju veličine fizike kontinuuma u vidu polja te volumnih gustoća njihovih izvora izraženih preko gustoća naboja i struja te relativističke elektrokinamike stoji Lorentzova elektrokinamika nabijene čestice koja tako povezuje svijet mikroskopskih efekata s makroskopskim pristupom u fizici. Naime, ontologija standardne mikroskopske klasične elektrokinamike počiva na dva temeljna entiteta: na mikroskopski nabijenim česticama točkastog karaktera i elektromagnetskim poljima, s jedne strane, te pripadne teorije koja opisuje način na koji pojavnosti čestica i polja međusobno determiniraju jedno drugo. Osnovni zakoni teorije kojom se opisuju interakcije između nabijene čestice i polja četiri su Maxwellove jednadžbe i jednadžba za Lorentzovu silu:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (56)$$

Sustav od četiri Maxwellove jednadžbe proširen Lorentzovom silom u dijelu literature naziva se skupom Maxwell-Lorentzovih jednadžbi.

Nužno je istaknuti da je ta teorija mikroskopskog karaktera, a može se smatrati direktnim nasljednikom teorije koju je razvijao ponajprije Lorentz, ali i neki drugi fizičari koji su na prijelazu iz XIX. u XX. stoljeće pokušali postaviti mikroskopske temelje Maxwellove elektrokinamike razvijene u XIX. stoljeću, koja izvorno predstavlja makroskopsku teoriju. Standardni suvremeni udžbenici elektromagnetizma općenito uvode i obrađuju oba pristupa: mikroskopsku teoriju te jednu suvremenu verziju makroskopske teorije.

Prema Maxwell-Lorentzovu sustavu jednadžbi utjecaj vanjskog, narinutog elektromagnetskog polja na nabijene čestice, definiran Lorentzovim zakonom, tretira se kao Newtonov zakon sile, s tim da ubrzanje naboja ovisi o lokalnom elektromagnetskom polju. Dakle, gibanje čestice u polju i dalje je determinirano Newtonovim zakonima.

Godine 1873. škotski fizičar James Clerk Maxwell objavljuje knjigu naslovljenu *Rasprava o elektricitetu i magnetizmu*, u kojoj obuhvaća sve dotad poznato iz elektromagnetizma zastupajući gledište Michaela Faradaya. Ime Jamesa Clerka Maxwella sinonim je za modernu fiziku, a tek u Maxwellovim rukama elektricitet je postao istinski egzaktna znanost.

Vrijedi posebno istaknuti i utjecaj Ruđera Boškovića na razvoj koncepta polja u klasičnom elektromagnetizmu. Faraday je proučavao opću Boškovićevu ideju o jednom zakonu sila u prirodi, izloženom u njegovoj *Teoriji prirodne filozofije*, postulirao postojanje fizičkog entiteta koji djeluje između permanentnog (trajnog) magneta i vodiča i nazvao ga poljem. Može se reći kako se Boškovićeve sile između točaka kod Faradaya poimaju kao električna, odnosno magnetska polja. Bošković sile smatra primarnom realnosti, a atome uporištima ili izvorima sila, dok su prema Faradayu naboji točke iz kojih izlaze ili ulaze električne silnice. Mirujući naboji tako su izvori električnog polja, dok su naboji u gibanju izvori magnetskih polja. Polje je, dakle, prostorna manifestacija svojeg izvora. Za Faradaya silnica je fizička realnost čime sa stanovišta filozofije znanosti on zapravo zastupa Boškovićev atomistički dinamizam.

Elektromagnetska teorija jedna je od tek nekoliko teorija u fizici u kojoj se jednadžbe gotovo uopće nisu mijenjale u odnosu na prvotni koncept. Maxwell je identificirao svjetlost kao elektromagnetski val i uveo koncept etera kao temeljni medij za elektromagnetsko polje kako bi zadržao mogućnost mehaničke interpretacije s obzirom na to da se u klasičnoj fizici dugo slijedilo načelo kako je prirodnu pojavu u biti moguće pojmiti jedino ako je se opiše jezikom klasične mehanike.

Maxwell se obično smatra jednom od najvećih figura u povijesti znanosti, uz bok Einsteinu i Newtonu. Kao Newton prije, i Einstein poslije njega, uveo je nov način gledanja na pojave u fizici, otvarajući potpuno nove konceptualne i praktične horizonte, ali i modificirajući građu prihvaćenih teorija i fizikalne (metafizikalne) koncepcije, tako mijenjajući, naime, ono što je Thomas Samuel Kuhn, jedan od vodećih filozofa znanosti XX. stoljeća nazivao paradigama i uvodeći revolucionarnu znanost, odnosno prekidajući period normalne znanosti [10].

U skladu s, u kuhnovskom duhu rečeno, revolucionarnim karakterom Maxwellova djela, može se reći kako konstitutivni elementi današnje predodžbe vizije fizikalnog svijeta, koji se sastoji od čestica čije se međudjelovanje odvija preko polja, svoju konceptualnu podlogu temelje na dvama Maxwellovim doprinosima: kinetičkoj teoriji plinova i teoriji elektromagnetskog polja. Razvoj obiju teorija nije bio motiviran eksperimentalnim rezultatima koji se nisu uklapali u postojeću paradigmu (Kuhn), kao što je to, primjerice, slučaj s teorijom relativnosti i kvantnom mehanikom. Naprotiv, u slučaju elektromagnetizma sve činjenice poznate u Maxwellovo vrijeme bile su zadovoljavajuće interpretirane unutar Newtonove paradigme i inkorporirane u teorijski okvir zadovoljavajuće moći predviđanja koja se intenzivno koristila i kontinuirano razvijala sve do Hertzova eksperimentalnog dokaza postojanja elektromagnetskih valova, tj. konačne verifikacije Maxwellove teorije.

Za razliku od Galileija i Newtona koji su matematiku smatrali samo alatom fizike, apstraktni matematički koncepti naveli su Maxwella na anticipiranje

fizičkih entiteta. Temeljna motivacija u pozadini Maxwellovih istraživanja bila je filozofske, točnije metafizičke prirode, odnosno posljedica njegove predanosti alternativnom pogledu na svijet, koji je uveo Michael Faraday proučavanjem elektromagnetske indukcije i polarizacije u odnosu na postojeći dominantni teorijski okvir djelovanja na daljinu.

Izgradnja koherentne i zadovoljavajuće teorije zahtijevala je desetljeće Maxwellovih iznimnih intelektualnih napora koji su rezultirali elektromagnetskom teorijom svjetlosti, ali i formulacijom jednadžbi koje se i danas koriste u opisu elektromagnetskih pojava na makroskopskoj razini. Svjetlost, tj. elektromagnetski val vidljiv ljudskom oku, razlikuje se od valova koji se šire na vodi ili se, primjerice, stvaraju prilikom ljudskog govora u vidu kompresije zraka. (Takvi se valovi propagiraju u nekom materijalnom mediju.) Val je općenito poremećaj koji prenosi energiju kroz prostor, a za propagaciju svjetlosti nije potreban materijalni medij jer se svjetlost širi i u slobodnom prostoru u vidu titraja električnih i magnetskih polja. Električni naboj, dakle, stvara oko sebe polje pa drugi naboji u blizini osjećaju prisutnost tog polja.

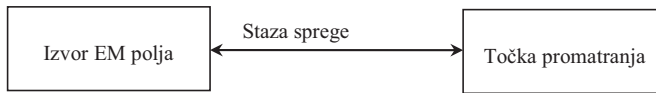
Polje, dakle, označava prostornu manifestaciju svojeg izvora pa tako, primjerice, zagrijani objekt stvara oko sebe temperaturno polje, a titranje naboja u prostoru stvara magnetsko polje. U skladu s Faradayevim otkrićem vrijedi i obratno, odnosno vremenski promjenjiva magnetska polja stvaraju električno polje. Tako je Maxwellov koncept matematički apstraktnog pojma polja proširio gledišta u fizici te omogućio ključni iskorak izvan okvira Newtonove mehanike i tako pripremio prostor za Einsteinovu specijalnu teoriju relativnosti i fiziku XX. stoljeća.

Općenito o matematičkim modelima u elektromagnetizmu

Rapidni napredak u razvoju digitalnih računala zadnjih pola stoljeća omogućio je velik napredak elektromagnetskih računalnih modela u svrhu predviđanja elektromagnetskih pojava sa zadovoljavajućom preciznošću.

Numeričko modeliranje omogućava simulaciju elektromagnetskog ponašanja razmatranog električnog sustava (u vidu odziva veličina od interesa) za široki raspon parametara od interesa, uz poznatu pobudu te poznate početne i rubne uvjete. Računalna simulacija u pravilu se odvija unutar znatno kraćeg vremena nego što bi bilo potrebno za izradu i testiranje određenog prototipa te primjenu odgovarajućih eksperimentalnih postupaka. Temeljna je svrha računalnog modela da se predvidi odziv u određenoj točki promatranja na danu pobudu u točki izvora.

Osnovni računalni elektromagnetski model, slika 2., uključuje izvor elektromagnetskog polja, stazu sprege koja se odnosi na elektromagnetska polja koja se propagiraju u slobodnom prostoru, materijalu ili vodiču i točku promatranja.



Sl. 2.: Osnovni računalni model

U osnovi svi elektromagnetski modeli opisani odgovarajućim diferencijalnim, integralnim ili varijacijskim jednadžbama proizlaze iz Maxwellovih jednadžbi. Operatorske jednadžbe na kojima se razmatrani model temelji mogu se, općenito gledano, riješiti primjenom analitičkih ili numeričkih metoda. Primjena analitičkih modela ograničena je gotovo isključivo na probleme koji se daju opisati kanonskim geometrijama s visokim stupnjem simetrije.

S druge strane, simulacija velikog broja realističnih problema u fizici i tehnici sa zadovoljavajućom preciznošću moguća je isključivo primjenom numeričkih metoda. Ograničenja u točnosti numeričkih modela, odnosno jednadžbi na kojima se ti modeli temelje, odnose se na ograničenja formulacije te primijenjene numeričke metode kojom se dane jednadžbe rješavaju.

Sa stanovišta stupnja aproksimacije koji se koristi unutar odgovarajuće teorijske podloge, elektromagnetski modeli mogu se općenito podijeliti u tri osnovne skupine:

- modeli teorije krugova temeljeni na konceptu koncentriranih električnih parametara
- modeli prijenosnih linija kod kojih se koriste distribuirani parametri koji vrijede za spregu s poljima nižih frekvencija
- modeli temeljeni na teoriji antena (engl. antenna theory models, full-wave models), kod kojih se uzimaju u obzir učinci zračenja, a koriste se na visokim frekvencijama za rješavanje problema propagacije elektromagnetskih valova.

Nadalje, ako se uzmu u obzir različiti karakteri izvora elektromagnetskih polja u smislu vremenske ovisnosti, problemi u klasičnom elektromagnetizmu [5, 7] mogu se specificirati kao:

- harmonijski ovisni problemi (engl. *continuous wave (CW) problems*)
- prijelazne pojave (engl. *transients*).

Međutim, čak i kad su u pitanju nesinusne vremenske promjene, iako se fizikalne pojave odvijaju u vremenu, određivanje odziva na neku pobudu ne samo u elektromagnetizmu nego i u inženjerstvu općenito, može se provesti u frekvencijskom ili vremenskom području. Ako se problem razmatra u frekvencijskom području, u svrhu dobivanja rezultata u vremenskoj domeni nužno je koristiti inverznu Fourierovu transformaciju. Nadalje, poznato je da se u frekvencijskom području dobivaju rezultati neovisni o izvoru na jednoj frekvenciji pa je nužno izvršiti niz proračuna u širokom pojasu frekvencija i potom

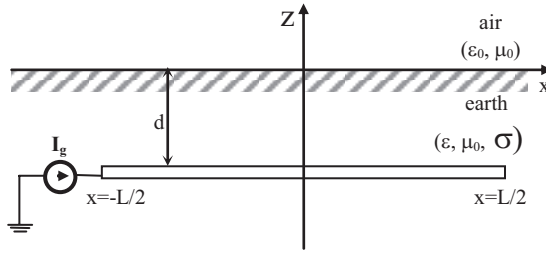
transformirati u vremensko područje kako bi se odredio vremenski odziv od interesa.

S druge strane, modeliranjem direktno u vremenskom području dobivaju se rezultati koji ovise o karakteru izvora, ali ekvivalentni su nizu proračuna u cijelom frekvencijskom pojasu. Simulaciju u vremenu nužno je izvršiti posebno za svaki različiti izvor. Stoga, izbor modeliranja u frekvencijskom, odnosno vremenskom području definitivno ovisi o posebnosti konkretnog problema koji se razmatra. Općenito gledano, analiza u vremenskom području traži dosta zahtjevniju formulaciju problema i znatno složenije postupke računanja u odnosu na analizu u frekvencijskoj domeni. Štoviše, u numeričkom smislu proračuni u vremenskom području podložni su nestabilnostima, što dodatno usložnjava problem jer je vrlo često nužno implementiranje procedura usrednjavanja i numeričkog filtriranja. Međutim, modeliranje u vremenskom području nudi jasnije razumijevanje procesa u smislu fizike problema, elegantnije uključivanje nelinearnih pojava u formulaciju te u brojnim situacijama također nudi određene računalne prednosti u smislu brzine i efikasnosti proračuna.

Među najčešće korištenim numeričkim metodama u elektromagnetizmu jesu metoda konačnih elemenata, metoda rubnih elemenata, metoda momenata te metoda konačnih diferencija u vremenskom području (engl. *finite difference time domain*). Jedno od najznačajnijih pitanja u tom smislu odnosi se na točnost koju se može postići u okviru danog modela. Osnovna ograničenja elektromagnetskih modela proizlaze iz fizikalne kompleksnosti razmatranog problema. Ponekad je pretežak zadatak odrediti električna svojstva sustava ili je broj neovisnih parametara nužnih za razvoj modela prevelik za izvršenje računalnog koda za praktični program. Općenito, elektromagnetski računalni modeli mogu se testirati putem mjerenja ili teorijski, odnosno usporedbom rezultata s etabliranim numeričkim modelima. Novi model također je moguće testirati na nekom standardnom testnom problemu na kojem se verificiraju različite numeričke metode ili na nekim kanonskim problemima za koje postoji analitičko rješenje.

Primjeri ograničenja nekih modela u elektromagnetizmu

Primjer elektromagnetskih modela s određenim ograničenjima u ovom odjeljku prvo se odnosi na uvijek standardni problem elektromagnetske kompatibilnosti – određivanje tranzijentnog odziva uzemljivačke elektrode. Horizontalna uzemljivačka elektroda predstavljena je idealno vodljivom ravnom žicom konačne duljine L radijusa a , pobuđenom strujnim izvorom koji predstavlja struju munje, ukopanom na dubini d u konačno vodljivom poluprostoru permittivnosti ε i vodljivosti σ , kako prikazuje slika 3.

Sl. 3.: Horizontalna uzemljivačka elektroda pobuđena strujnim izvorom I_g

U primjeru se analizira tranzijentna impedancija horizontalne uzemljivačke elektrode primjenom teorije prijenosnih linija i teorije antena. Tranzijentna impedancija, parametar od iznimnog značaja u projektiranju uzemljivačkih sustava, definira se kao omjer vremenski promjenjivog napona $u(0, t)$ i $i(0, t)$ struje u točki napajanja: [11]

$$z(0, t) = \frac{u(0, t)}{i(0, t)}. \quad (57)$$

Pobudna struja $i(t)$, odnosno struja injektirana na jednom kraju uzemljivačke elektrode, kako je prikazano na slici 1., da se izraziti dvostrukom eksponencijalnom funkcijom oblika:

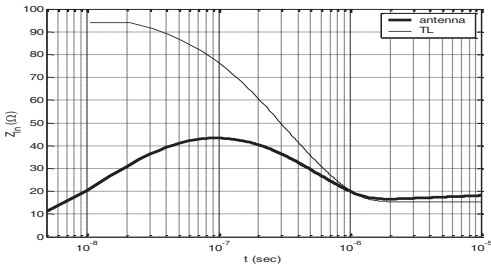
$$i(t) = I_0 \cdot (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}), \quad t \geq 0, \quad (58)$$

pri čemu je vrijeme porasta impulsa određeno parametrima α i β , dok I_0 označava amplitudu.

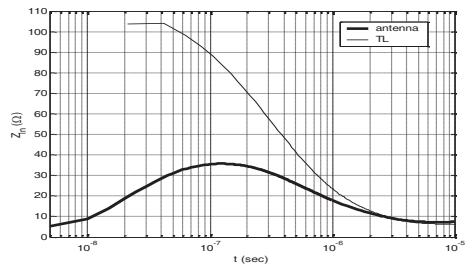
U svrhu proračuna tranzijentne impedancije (57) nužno je odrediti napon $u(0, t)$, što je iznimno složena zadaća, a matematičke detalje moguće je pronaći u različitim referencijama, primjerice u [5, 11]. Znatno jednostavniji pristup temelji se na pristupu preko prijenosnih linija, dok rigorozni pristup zahtijeva primjenu teorije antena. Oba su pristupa vrlo kratko skicirana u dodatku B, a puno detaljniji opis dostupan je u radovima i knjigama autora, npr. u [5, 11].

Slijede neki numerički rezultati za tranzijentnu impedanciju koji ilustriraju svojstva primijenjenih modela. Na slikama od 4. do 6. prikazana je tranzijentna impedancija u funkciji vremena primjenom antenskog modela (engl. *antenna model* – AM) i modela prijenosne linije (engl. *transmission line model* – TLM). Analizirane su tri duljine elektrode za dvije vrijednosti vodljivosti na fiksnoj dubini ukopa.

Uvidom u dobivene rezultate očito je da se ponašanje prijelazne pojave u ranim vremenskim trenucima znatno razlikuje kod modela antene i modela prijenosne linije. Dakle, teorija prijenosnih linija ne daje valjane rezultate sve do vremena oko 1 μ s pa i za kasnije vremenske trenutke. Odgovor je jasan. Naime,

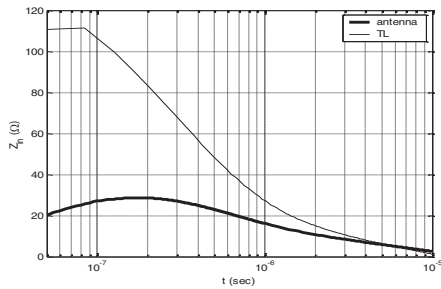


a) $L = 50$ m

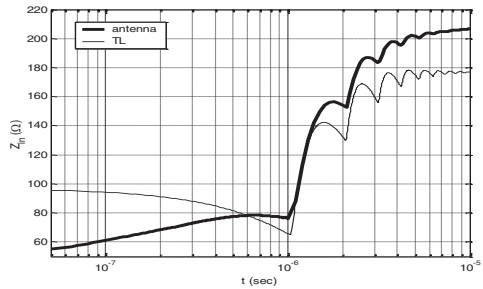


b) $L = 100$ m

Sl. 4.: Usporedba tranzijentnih impedancija dobivenih različitim modelima ($d = 5$ m, $\sigma = 1$ mS/m)

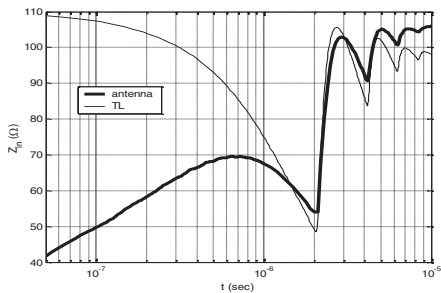


a) $L = 200$ m, $\sigma = 1$ mS/m

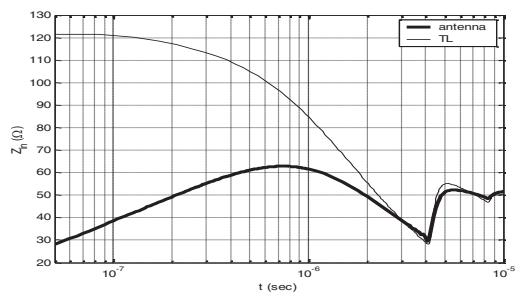


b) $L = 50$ m, $\sigma = 0,1$ mS/m

Sl. 5.: Usporedba tranzijentnih impedancija dobivenih različitim modelima ($d = 5$ m)



a) $L = 100$ m, $\sigma = 0,1$ mS/m



b) $L = 200$ m, $\sigma = 0,1$ mS/m

Sl. 6.: Usporedba tranzijentnih impedancija dobivenih različitim modelima ($d = 5$ m)

ranijsi vremenski trenuci u frekvencijskom području odgovaraju visokofrekvencijskom dijelu spektra koji se ne može adekvatno uzeti u obzir metodom prijenosnih linija koja je upotrebljiva za spektralni sadržaj na nižim i srednje visokim frekvencijama te se njom ne mogu uzeti u obzir gubici energije u sustavu zbog zračenja.

U ovom konkretnom slučaju iznimno niskih vrijednosti vodljivosti, $\sigma = 1$ mS/m i $\sigma = 0,1$ mS/m primjena metode prijenosnih linija daje značajan prebačaj u vrijednostima tranzijentne impedancije i praktički je neupotrebljiva. S druge strane, u kasnijim vremenskim trenucima opaža se vrlo dobro slaganje obaju modela. Što je elektroda dulja, slaganje je bolje. Takvo je ponašanje modela također očekivano jer kasniji vremenski trenuci odgovaraju nižem dijelu frekvencijskog spektra, odnosno upućuju na ponašanje elektrode u nekom stacionarnom stanju. Dakle, analizirajući izložene numeričke rezultate može se zaključiti sljedeće:

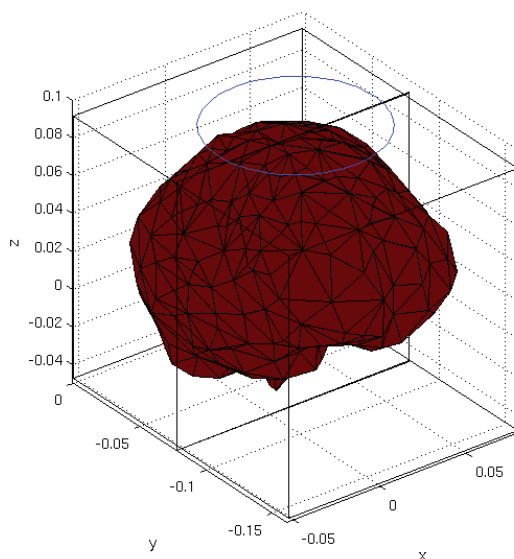
- upotrebom TLM modela nije moguće predvidjeti ispravne rezultate u ranim vremenima tranzijentne impedancije (do reda vrijednosti mikrosekunde)
- što je veća duljina elektrode postiže se bolje slaganje rezultata za antenski model i model prijenosne linije.

Drugi je primjer vezan uz biomedicinske primjene, odnosno terapijske učinke elektromagnetskih polja. Razmatra se homogeni model mozga uz realističnu geometriju u sklopu proračuna induciranog polja u mozgu zbog zračenja zavojnicom kroz koju protječe struja visoke jakosti, slika 7.

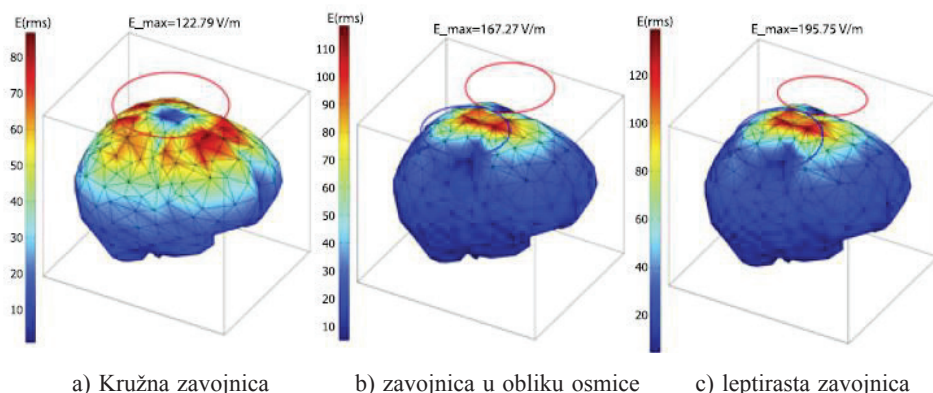
Taj problem razmatrao se u okviru Radne grupe 2 u okviru Pododbora za proučavanje dozimetrijskih metoda u okviru zaštite od elektromagnetskih polja [12]. Svrha Radne grupe 2 bila je analiza i kvantificiranje numeričkog šuma u dozimetriji polja niskih frekvencija. Posebna misija grupe odnosila se na istraživanje tzv. stepeničaste pogreške (engl. *stair-casing error*) tipične za metodu konačnih diferencija u vremenskom području (engl. *finite difference time domain* – FDTD). Također je od interesa bilo i testiranje drugih sofisticiranijih pristupa za rješavanje tog problema poput metode momenata (engl. *method of moments* – MoM) ili metode konačnih elemenata (engl. *finite element methods* – FEM).

Problem čija je geometrija prikazana na slici 8. u sklopu Radne grupe za detekciju uzroka numeričkih artefakata rješava se primjenom nekoliko različitih formulacija/numeričkih metoda. U ovom radu navode se rezultati dobiveni primjenom metode momenata, metode rubnih elemenata i metode konačnih elemenata. Detaljnija analiza tih metoda i analiza dobivenih rezultata dostupna je u [11], a u dodatku B dan je kratki osvrt na primijenjene metode rješavanja.

Prvi pristup počiva je formulaciji temeljenoj na spregnutim jednadžbama za električno polje (engl. *set of surface integral equations* – SIE), koje su riješene primjenom metode momenata (MoM). Drugi pristup temelji se na metodi rubnih elemenata (engl. *boundary element method* – BEM), a treći je hibridna metoda konačnih/rubnih elemenata (engl. *hybrid finite element/boundary element*). Osim u [12], usporedba tih metoda s ilustrativnim primjerima dana je u [13].



Sl. 7.: Realistični homogeni model mozga



a) Kružna zavojnica

b) zavojnica u obliku osmice

c) leptirasta zavojnica

Sl. 8.: Inducirano električno polje po površini mozga za različite zavojnice

Na slici 8. prikazani su rezultati za inducirano električno polje po površini mozga za različite tipove zavojnica uz primjenu različitih numeričkih metoda. Rezultati na slici 8. dobiveni su rješavanjem spregnutih površinskih integralnih jednadžbi metodom momenata primjenom metodom momenata (SIE/MoM) za mrežu od 1224 trokuta. Maksimalni iznosi polja dobiveni primjenom metode momenata, metode rubnih elemenata i hibridne metode konačnih/rubnih elemenata prikazani su u tablici 1. Uočavaju se znatna odstupanja u maksimalnim vrijednostima polja što proizlazi iz različite prirode primijenjenih numeričkih metoda u smislu aproksimacije rješenja na element te algoritama diskretizacije.

Tablica 1: Usporedba rezultata za maksimalnu vrijednost induciranog električnog polja primjenom različitih numeričkih metoda

Metoda rješavanja	SIE/MoM	BEM	FEM/BEM
Maks. iznos polja, V/m	122,8	117,1	93,6

Zaključna razmatranja

U radu se razmatraju općenita svojstva matematičkih modela koji se koriste u fizici i tehnici te propituju različite klase ograničenja koja u tim modelima postoje. Dok se u fizici razmatra priroda i u skladu sa znanstvenom metodom tako dolazi do fizikalnih zakona koji reflektiraju pojave u stvarnom svijetu, uloga tehnike jest mijenjanje svijeta u smislu tehnološkog napretka primjenom fizikalnih zakona, matematičkog modeliranja i inženjerske intuicije. Raspravljena su ograničenja na nekoliko razina: temeljna ograničenja koja leže u osnovi fizikalno-filozofskih postavki promatranja svijeta, a tiču se pitanja granica znanstvene spoznaje o prirodi uopće, o kojima govore Heisenbergove relacije neodređenosti u fizici, u matematici u formi Gödelova teorema nepotpunosti ili pak osnovne postavke Kantove filozofije o granicama naše spoznaje. Druga klasa ograničenja odnosi se na činjenicu da su modeli pojednostavnjene simulacije pojava koje razmatramo, tj. set parametara koji se uzima u obzir uvijek je ograničen. Sljedeća je stepenica u ograničenjima tehnika rješavanja određene operatorske jednadžbe (primjerice diferencijalne jednadžbe), a zadnji problem na koji se nailazi implementacija je na računalu, odnosno pitanje izračunljivosti. Činjenica je da se diferencijalne jednadžbe temelje na kontinuiranim veličinama, a ono što se procesira na računalu konačni su skupovi diskretnih podataka.

Potom je razmatrana priroda analogija koje u smislu matematičkog zapisa postoje u različitim disciplinama klasične fizike, poput mehanike, prijenosa topline, akustike, hidromehanike i elektromagnetizma.

Poseban fokus stavljen je na povijesno-filozofski razvoj elektromagnetizma i nekih ograničenja u modelima koji se javljaju u elektromagnetizmu.

U radu su dani neki ilustrativni primjeri iz područja elektromagnetske kompatibilnosti bioelektromagnetizma.

Svatko uzima granice svoje vlastite predodžbe za granice svijeta.

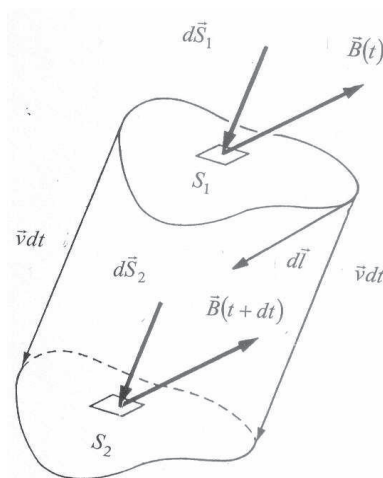
Arthur Schopenhauer

Dodatak A: Maxwellove jednadžbe za sustave u gibanju

Maxwellove jednadžbe modificirane su nekoliko puta [14] u zadnjih 150 godina otkad ih je prvi put formulirao Maxwell [15], a prve značajnije modifikacije Maxwellovih jednadžbi proveli su Poynting, Fitzgerald i Heaviside. Pod tim modifikacijama podrazumijeva se fizikalna interpretacija, matematički zapis te opći pristup metodama rješavanja za različite pobude. Povijesno gledano, postavljanjem Maxwellovih jednadžbi prvi je put osigurana rigorozna osnova za potpuni opis elektromagnetskih pojava na makroskopskoj razini za nerelativističke brzine. Štoviše, pojava Maxwellovih jednadžbi omogućila je pomak paradigme od koncepta *actio in distans* (djelovanje na daljinu) na pristup preko polja.

Maxwellove jednadžbe doživljavaju značajne promjene u dva navrata [16], prvi put kad su Heaviside i Hertz reducirali 20 skalarnih jednadžbi na četiri vektorske jednadžbe, dok je sljedeća modifikacija bila inicirana otkrićem elektrona. Treba posebno istaknuti ulogu Lorentza u razvoju mikroskopske, nerelativističke elektrodinamike temeljene na Maxwellovim jednadžbama, odnosno na uključnje sile koja djeluje na nabijenu česticu ako se ona nalazi u elektromagnetskom polju.

U tom smislu zakoni klasične elektrodinamike kojima se opisuje ponašanje makroskopskih elektromagnetskih polja izraženi su skupom od četiri prostorno-vremenski ovisne parcijalne diferencijalne jednadžbe koje se danas nazivaju Maxwellovim jednadžbama iako su ih na temelju Maxwellove teorije koja je sadržavala 20 skalarnih jednadžbi neovisno postavili Oliver Heaviside i Heinrich Hertz.



Sl. A.1. Geometrija pokretne sredine

Uz diferencijalni postoji i integralni oblik tih jednadžbi. Premda se diferencijalni oblik Maxwellovih jednadžbi najčešće koristi kod većine metoda za rješavanje elektromagnetskih problema, integralni oblik jednadžbi vrlo je značajan jer se njim jasnije izražavaju osnovni fizikalni zakoni koji stoje u pozadini Maxwellovih jednadžbi.

U nastavku je dan prikaz Maxwellovih jednadžbi za sustave koji se gibaju nerelativističkom brzinom v u odnosu na mirujućeg promatrača. Kod sustava koji se giba u odnosu na mirujućeg promatrača nerelativističkim brzinama, slika A.1., za razliku od Maxwellovih jednadžbi za mirujuće sredine, kod prvih dviju (rotorske) Maxwellove jednadžbe nužno je razmatrati ukupnu promjenu po vremenu.

Tako **prva Maxwellova jednadžba** mora sadržavati ukupnu promjenu magnetskog toka po vremenu:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (\text{A.1})$$

Ukupna vremenska promjena toka po površini kad se površina po kojoj se tok računa giba brzinom \vec{v} , slika A.1. može se pisati u obliku:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_s \vec{B} d\vec{S}, \quad (\text{A.2})$$

gdje je vremenska promjena magnetskog toka u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{A.3})$$

Jednadžba (A.3) može se skraćeno pisati u obliku:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.4})$$

a kako za prvi član s desne strane (A.4) vrijedi:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{B} = -\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (\text{A.5})$$

proizlazi:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (\text{A.6})$$

pa prva Maxwellova jednadžba postaje:

$$\nabla \times (\vec{E} - \vec{v} \times \vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{A.7})$$

i predstavlja diferencijalni oblik Faradayeva zakona za pokretne sredine.

Integralni oblik Faradayeva zakona za pokretnu sredinu dobiva se integracijom jednadžbe (A.7) po površini:

$$\int_S \nabla \times \vec{E} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} + \int_S \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{S}, \quad (\text{A.8})$$

a primjenom Stokesova teorema slijedi:

$$\oint_c \vec{E} d\vec{s} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} + \oint_c (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s}, \quad (\text{A.9})$$

što uz definiciju magnetskog toka:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.10})$$

konačno daje:

$$e = - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \oint_c (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s} \quad (\text{A.11})$$

pri čemu oba člana na desnoj strani (A.11) predstavljaju poznate izraze za inducirani napon e . Drugi član s desne strane (A.11) postoji samo u slučaju relativnog gibanja sustava u odnosu na mirujućeg promatrača.

Sličnim se postupkom dobiva i **druga Maxwellova jednadžba** za pokretne sredine, koja mora sadržavati ukupnu vremensku promjenu gustoće električnog toka

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (\text{A.12})$$

pri čemu je ukupna promjena vektora \vec{D} u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{A.13})$$

odnosno:

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{D} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (\text{A.14})$$

Kako se prvi član na desnoj strani izraza (A.14) može pisati na način:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{D} = - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) + \rho \vec{v} \quad (\text{A.15})$$

slijedi:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) + \rho \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (\text{A.16})$$

Druga Maxwelllova jednadžba za pokretne sredine može se pisati u obliku:

$$\nabla \times (\vec{H} + \vec{v} \times \vec{D}) = \vec{J} + \rho \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (\text{A.17})$$

Jednadžba (A.17) sadrži, uz gustoće konduktivnih i pomačnih struja, i članove za struju konvekcije $\rho \vec{v}$ zbog gibanja volumne gustoće naboja i član zbog gibanja polariziranog medija $\vec{v} \times \vec{D}$.

Integralni oblik druge Maxwelllove jednadžbe za pokretni polarizirani medij dobiva se integriranjem jednadžbe (A.17)

$$\int_S \nabla \times (\vec{H} + \vec{v} \times \vec{D}) d\vec{S} = - \int_S \vec{J} d\vec{S} + \int_S \rho \vec{v} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \quad (\text{A.18})$$

a uz primjenu Stokesova teorema na jednadžbu (A.18) slijedi:

$$\oint_c \vec{H} d\vec{s} = - \oint_c (\vec{v} \times \vec{D}) d\vec{s} + \int_S \vec{J} d\vec{S} + \int_S \rho \vec{v} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (\text{A.19})$$

Članovi na desnoj strani jednadžbe (A.19) predstavljaju ukupnu struju koja je onda izvor magnetskog polja, a sastoji se od vodljivih struja, konveksijskih struja i struja generiranih zbog vremenske promjene polarizacije te gibanja polariziranog medija.

Zadnje dvije Maxwelllove jednadžbe, koje sadrže operator divergencije, govore o postojanju / nepostojanju električnih/magnetskih monopola i istog su oblika za sustave u mirovanju, odnosno u gibanju. Tako **treća Maxwelllova jednadžba** upozorava na postojanje električnih monopola, odnosno vrijedi:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{A.20})$$

tj. volumne gustoće naboja ρ predstavljaju monopolne izvore električnog polja. Integrirajući (A.20) po nekom volumenu V :

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} dV = \int_V \rho dV \quad (\text{A.21})$$

a, uz primjenu Gaussova teorema o divergenciji slijedi integralni oblik treće Maxwelllove jednadžbe:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q, \quad (\text{A.22})$$

gdje Q označava ukupan električni naboj sadržan unutar volumena V , tj.

$$Q = \int_V \rho dV. \quad (\text{A.23})$$

Jednadžba (A.22) predstavlja Gaussov zakon za električno polje koji kaže da je tok vektora \vec{D} brojčano jednak izvorima unutar promatranog volumena, odnosno obuhvaćenom električnom naboju unutar tog volumena.

Konačno, **četvrta Maxwelova jednadžba** isključuje postojanje magnetskih monopola, odnosno, oblika je:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{A.24})$$

tj. magnetsko polje uvijek je solenoidalno, odnosno bezizvorno u smislu monopolnih izvora.

Integralni oblik Gaussova zakona magnetskog polja dobiva se integriranjem jednadžbe (A.23) po volumenu:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0 \quad (\text{A.25})$$

i primjenom Gaussova teorema o divergenciji slijedi:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (\text{A.26})$$

Jednadžba (A.26) upozorava da je tok magnetskog polja \vec{B} kroz bilo koju zatvorenu površinu S uvijek jednak nuli, odnosno silnice magnetskog polja zatvorene su same u sebe.

Dodatak B: Modeliranje primjenom teorije prijenosnih linija i teorije žičanih antena

Jednadžbe prijenosnih linija za horizontalnu uzemljivačku elektrodu u vremenskom području dane su u vidu sustava spregnutih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi po naponu i struji (telegrafске jednadžbe) uzduž vodiča: [11]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + Ri(x,t) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} + C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Gu(x,t) = 0 \quad (\text{B.2})$$

gdje su $u(x, t)$ i $i(x, t)$ prostorno-vremenski napon i struja koji se induciraju uzduž linije (u ovom slučaju uzemljivačke elektrode).

Raspodijeljeni parametri R, L, C, G za geometriju sa slike 3. određuju se u skladu s procedurom opisanom u [11]. Sustav telegrafskih jednadžbi (B.1) i (B.2) riješen je metodom konačnih elemenata, a matematički detalji dostupni su

u brojnim referencijama, primjerice u [11]. Primjenom metode težinskih odstupanja (engl. *weighted residual approach*) u okviru prostorne diskretizacije za segment žice Δl_i slijedi:

$$\int_{\Delta l_i} \left[\frac{\partial u^s(x,t)}{\partial x} + L \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} + Ri(x,t) \right] W_j dx = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\int_{\Delta l_i} \left[\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} + C \frac{\partial u^s(x,t)}{\partial x} \right] W_j dx = 0. \quad (\text{B.4})$$

Primjenom odgovarajuće vremenske diskretizacije dobivaju se tranzijentni napon i raspodjela struje uzduž žice.

Antenski model uzemljivačke elektrode temelji se na prostorno-frekvencijski ovisnoj Pocklingtonovoj integro-diferencijalnoj jednadžbi koja se izvodi iz Maxwellovih jednadžbi uz zadovoljenje odgovarajućih uvjeta kontinuiteta za tangencijalne komponente električnog polja na površini elektrode [11]. Pocklingtonova jednadžba može se pisati u obliku:

$$E_x^{exc,H} = -\frac{I}{j4\pi\omega\epsilon_{eff}} \left\{ \begin{array}{l} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \left[g_0^H(x,x') - g_i^H(x,x') + k_1^2 V_{11} \right] I(x') dx' + \\ k_1^2 \int_{-L/2}^{L/2} \left[g_0^H(x,x') - g_i^H(x,x') + U_{11} \right] I(x') dx' \end{array} \right\} \quad (\text{B.5})$$

gdje je $I(x')$ raspodjela struje duž žice, a $g_0^H(x,x',z)$ Greenova funkcija u neograničenom prostoru s gubicima:

$$g_0^H(x,x',z) = \frac{e^{-jk_1 R_{1h}}}{R_{1h}} \quad (\text{B.6})$$

dok $g_i^H(x,x',z)$ proizlazi iz teorije preslikavanja:

$$g_i^H(x,x',z) = \frac{e^{-k_2 R_{2h}}}{R_{2h}}, \quad (\text{B.7})$$

gdje su R_{1h} i R_{2h} udaljenosti od horizontalne žice u poluprostoru s gubicima i njezine slike u zraku do točke promatranja.

Utjecaj konačno vodljivog poluprostora uzima se u obzir preko prigušnih članova u vidu Sommerfeldovih integrala U_{11} i V_{11} [11]:

$$U_{11} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-\mu_1(d-z)}}{\mu_1 + \mu_2} J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda \quad (\text{B.8})$$

$$V_{11} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-\mu_1(h-z)}}{k_2^2 \mu_1 + k_1^2 \mu_2} J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda \quad (\text{B.9})$$

gdje je $J_0(\lambda\rho)$ Besselova funkcija prve vrste nultog reda, a μ_1 , μ_2 i ρ su:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= (\lambda^2 - k_1^2)^{1/2}, \\ \mu_2 &= (\lambda^2 - k_2^2)^{1/2}, \rho = |x - x'|\end{aligned}\tag{B.10}$$

Rješavanjem integro-diferencijalne jednadžbe (B.5) dobiva se raspodjela struje po horizontalnoj elektrodi. Na temelju poznavanja raspodjele struje moguće je odrediti električno polje, a potom i napon u točki napajanja u funkciji frekvencije. Konačno, odgovarajući tranzijentni napon dobiva se primjenom inverzne Fourierove transformacije. Integro-diferencijalna jednadžba (B.5) riješena je Galerkin-Bubnovljevom inačicom indirektno metode rubnih elemenata (engl. *Galerkin-Bubnov variant of the indirect boundary element method – GB-IBEM*), (kao i ostale numeričke procedure nužne za proračun tranzijentne impedancije), a matematički detalji dostupni su u brojnim referencijama, primjerice u [5, 11].

Dodatak C: Modeliranje induciranog polja u mozgu primjenom različitih numeričkih metoda

Prvi pristup modeliranju homogenog modela mozga temelji se na formulaciji izraženoj preko spregnutih površinskih integralnih jednadžbi (engl. *set of surface integral equations – SIE*), koje su riješene primjenom metode momenta (engl. *method of moments – MoM*). Izloženost homogenog modela mozga polju zavojnice može se opisati preko sustava integralnih jednadžbi električnog polja: [4]

$$\begin{aligned}j\omega\mu_n \iint_S \vec{J}(\vec{r}') G_n(\vec{r}, \vec{r}') dS' - \\ - \frac{j}{\omega\epsilon_n} \iint_S \nabla'_S \cdot \vec{J}(\vec{r}') \nabla G_n(\vec{r}, \vec{r}') dS' + \\ + \iint_S \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' G_n(\vec{r}, \vec{r}') dS' = \begin{cases} \vec{E}^{inc}, & n = 1 \\ 0, & n = 2 \end{cases}\end{aligned}\tag{C.1}$$

gdje su \vec{J} i \vec{M} ekvivalentne gustoće električnih i magnetskih struja, k_n je valni broj n -te sredine ($n = 1, 2$), dok je G_n Greenova funkcija za unutarnji / vanjski homogeni medij: [4]

$$G_n(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jk_n R}}{4\pi R}; \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|\tag{C.2}$$

a R je udaljenost od točke izvora do točke promatranja.

Postupak rješavanja sustava integralnih jednadžbi (C.1) metodom momenta počinje tako da se ekvivalentne gustoće električnih struja \vec{J} i magnetskih struja \vec{M} izraze preko linearne kombinacije baznih funkcija \vec{f}_n i \vec{g}_n :

$$\vec{J}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N J_n \vec{f}_n(\vec{r}) \quad (\text{C.3})$$

$$\vec{M}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N M_n \vec{g}_n(\vec{r}) \quad (\text{C.4})$$

gdje su J_n i M_n nepoznati koeficijenti, dok je N ukupan broj trokutnih elemenata.

Primjenom metode težinskih odstupanja (engl. *weighted residual approach*), tj. množenjem izraza (C.1) sa skupom test funkcija \vec{f}_m te integrirajući po površini S , nakon određenih matematičkih postupaka dobije se:

$$\begin{aligned} & j\omega\mu_i \sum_{n=1}^N J_n \iint_S \vec{f}_m(\vec{r}) \cdot \iint_{S'} \vec{f}_n(\vec{r}') G_i dS' dS + \\ & + \frac{j}{\omega\varepsilon_i} \sum_{n=1}^N J_n \iint_S \nabla_S \cdot \vec{f}_m(\vec{r}) \iint_{S'} \nabla'_S \cdot \vec{f}_n(\vec{r}') G_i dS' dS + \\ & \pm \sum_{n=1}^N M_n \iint_S \vec{f}_m(\vec{r}) \cdot [\hat{n} \times \vec{g}_n(\vec{r}')] dS + \\ & + \sum_{n=1}^N M_n \iint_S \vec{f}_m(\vec{r}) \cdot \iint_{S'} \vec{g}_n(\vec{r}') \times \nabla' G_i dS' dS = \\ & = \begin{cases} \iint_S \vec{f}_m(\vec{r}) \cdot \vec{E}^{inc} dS & , i = 1 \\ 0 & , i = 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

pri čemu indeks i označava danu sredinu. Detalji postupka mogu se pronaći u više referencija, npr. u [4].

Drugi pristup temelji se na metodi rubnih elemenata (engl. *boundary element method* – BEM) [11]. Domena proračuna Ω mozak je uz granicu $\partial\Omega$ definiranu vanjskom normalom \hat{n} , dok se u slobodnom prostoru nalaze izvori Ω_s u vidu gustoće struje \vec{J}_s . Primjenom Greenova teorema na odgovarajuće Helmholtzove jednadžbe dobiva se integralna jednadžba električnog polja (engl. *electric field integral equation* – EFIE): [12]

$$\begin{aligned} \xi \vec{E} = & - \int_{\partial\Omega_i} (\hat{n} \times \vec{E}) \times \nabla \Psi ds - \int_{\partial\Omega_i} (\hat{n} \cdot \vec{E}) \nabla \Psi ds + \\ & + j\omega\mu_0 \int_{\partial\Omega_i} (\hat{n} \times \vec{H}) \Psi ds - \int_{\Omega_s} j\omega\mu_0 \Psi \vec{J}_s dv \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

i integralna jednadžba magnetskog polja (engl. *magnetic field integral equation* – MFIE):

$$\begin{aligned} \xi \vec{H} = & - \int_{\partial\Omega_i} (\hat{n} \times \vec{H}) \times \nabla \Psi ds - \int_{\partial\Omega_i} (\hat{n} \cdot \vec{H}) \nabla \Psi ds + \\ & + j\omega \tilde{\epsilon} \int_{\partial\Omega_i} (\hat{n} \times \vec{E}) \Psi ds - \int_{\Omega_s} \vec{J}_s \times \nabla \Psi dv \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

gdje je \vec{E} električno polje, a \vec{H} magnetsko polje unutar homogenog volumnog elementa Ω_i , s odgovarajućim rubom $\partial\Omega_i$, vodljivosti σ , permitivnosti ϵ uz permeabilnost μ_0 . Pritom je ξ faktor singularnosti ($\xi = 0,5$ na površini, a $\xi = 1$ u ostalim točkama), \hat{n} je vektor vanjske normale na Ω_i , ω je narinuta kružna frekvencija, a Ψ je Greenova funkcija za Helmholtzovu jednadžbu.

U skladu s algoritmom metode rubnih elemenata ukupna se površina $\partial\Omega$ diskretizira na elementarne površine (rubne elemente), pri čemu se pretpostavlja konstantna vrijednost polja po svakom elementu. Uz pretpostavku da inducirane struje u tkivu značajnije ne remete konstelaciju magnetskog polja izvora, može se dobiti pojednostavnjena formulacija u okviru koje se magnetsko polje \vec{H} može izračunati primjenom Biot-Savartova zakona: [12]

$$\vec{H} = \int_{\Omega_s} (\vec{J}_s \times \nabla \Psi) dv \quad (\text{C.8})$$

gdje je Ψ Greenova funkcija za Laplaceov problem.

Rješavanje problema polja onda se odnosi samo na određivanje električnog polja preko EFIE: [12]

$$\begin{aligned} \xi \vec{E} = & - \int_{\partial\Omega_i} (\hat{n} \times \vec{E}) \times \nabla \Psi ds - \int_{\partial\Omega_i} (\hat{n} \cdot \vec{E}) \nabla \Psi ds + \\ & + j\omega \mu_0 \int_{\partial\Omega_i} (\hat{n} \times \vec{H}) \Psi ds - j\omega \mu_0 \int_{\Omega_s} \Psi \vec{J}_s dv \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

pri čemu, za razliku od potpune formulacije, magnetsko polje više nije nepoznato, nego je izraženo preko (C.8).

Treći se pristup temelji na primjeni hibridne metode (engl. *hybrid finite element-boundary element method* – FEM-BEM) [12]. Model mozga opisan je trodimenzionalnom domenom Ω , segmentiranom na konačne elemente, što omogućuje analizu domena visokog stupnja heterogenosti. Okolni prostor (Ω_{ext}) te izvori polja (zavojnice s narinutom gustoćom struje) nije vodljiv.

Ukupno magnetsko polje da se napisati na način:

$$\vec{H} = \vec{H}_s + \vec{H}_i \quad (\text{C.10})$$

odnosno, sastoji se od polja izvora \vec{H}_s (koje se računa preko Biot-Savartova zakona) i induciranog polja \vec{H}_i koje generira ukupna gustoća struje \vec{J}_i koja se inducira na Ω .

Vektorski potencijal \vec{T} na Ω definira se na način:

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{T} \quad (C.11)$$

dok je inducirano polje dano izrazom:

$$\vec{H}_i = \vec{T} + \nabla \phi, \quad (C.12)$$

gdje je ϕ skalarni potencijal. Potencijali su povezani na sljedeći način na Ω :

$$\nabla \cdot \vec{T} + \nabla \cdot \nabla \phi = 0 \quad (C.13)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}} \nabla \times \vec{T} \right) + j\omega\mu_0 \vec{T} + j\omega\mu_0 \nabla \phi = -j\omega\mu_0 \vec{H}_s \quad (C.14)$$

pri čemu je zadovoljen rubni uvjet:

$$\hat{n} \times \vec{T} = 0 \quad (C.15)$$

na površini tijela $\partial\Omega$, kojim se implicitno zahtijeva da inducirane struje teku unutar tijela. Što se tiče vanjske (otvorene) domene Ω_{ext} , vrijedi sljedeći integralni izraz:

$$\xi \phi \int_{\partial\Omega} (\nabla \phi \cdot \hat{n})^{(e)} \Psi ds - \int_{\partial\Omega} \phi (\nabla \Psi \cdot \hat{n}) ds = 0 \quad (C.16)$$

gdje je ξ faktor singularnosti, Ψ Greenova funkcija, a \hat{n} vanjska normala na domenu.

Primjenom metode težinskih odstupanja nakon određenih matematičkih manipulacija slijedi formulacija izraza (C.13) i (C.14)

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla w dv - \int_{\partial\Omega} w (\nabla \phi \cdot \hat{n})^{(i)} ds + \int_{\Omega} \vec{T} \cdot \nabla w dv = 0 \quad (C.17)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\sigma}} \nabla \times \vec{T} \cdot \nabla \times \vec{v} dv + \\ & + j\omega\mu_0 \left(\int_{\Omega} \vec{T} \cdot \vec{v} dv + \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \vec{v} dv \right) = -j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \vec{H}_s \cdot \vec{v} dv \end{aligned} \quad (C.18)$$

gdje su w i \vec{v} odgovarajuće test funkcije.

Iz uvjeta kontinuiteta za magnetsku indukciju proizlazi veza između unutarnjih i i vanjskih e veličina na rubu $\partial\Omega$:

$$(\nabla \phi \cdot \hat{n})^{(i)} = (\nabla \phi \cdot \hat{n})^{(e)} \quad (C.19)$$

Integralni izraz (C.16) diskretizira se primjenom kolokacijske tehnike.

Literatura

- [1] D. Poljak, M. Jakić: A Note on the Character of Physical Models Representing Natural Phenomena *Int. Journ. of Design & Nature and Ecodynamics*, Vol. 12, No 2, 2017., pp. 254-263.
- [2] D. Poljak, M. Jakić: O granicama znanstvene spoznaje, Mediteranski korijeni filozofije, Split, 2014.
- [3] L. Smolin: *The Trouble with Physics, The Rise of String Theory, The Fall of a Science and What Comes Next*, Penguin Books, New York, 2006.
- [4] D. Poljak, M. Cvetković: *Human Interaction with electromagnetic Fields, Computational Methods in Dosimetry*, Elsevier, Eastbourne, UK, 2019.
- [5] D. Poljak, K. El Khamlichi Drissi: *Computational Methods in Electromagnetic Compatibility; Antenna Theory Approach versus Transmission Line Models*, John Wiley & Sons, New York, 2018.
- [6] D. Poljak et al.: On some Multiphysics Models in Electromagnetic-Thermal-Hydrodynamics (ETHD) Analysis, ICECom 2019., Dubrovnik, 2019.
- [7] D. Poljak: *Teorija elektromagnetskih polja s primjenama u inženjerstvu*, Školska knjiga, Zagreb 2014.
- [8] M. Tegmark: *Mathematical Universe*, Penguin: New York, 2014.
- [9] R. Omnès: *Converging Realities: Toward a Common Philosophy of Physics and Mathematics*, Princeton University Press, 2004.
- [10] D. Poljak, F. Sokolić, M. Jakić: *Propitivanje odnosa filozofije i znanosti s osvrtom na teze Thomasa S. Kuhna*, Filozofija u dijalogu sa znanostima, Institut za filozofiju, Zagreb 2013.
- [11] Poljak, D.: *Advanced Modeling in Computational Electromagnetic Compatibility*, New Jersey: Wiley-Interscience, 2007.
- [12] D. Poljak et al.: IEEE/ICES TC95 Subcommittee 6 EMF Dosimetry Modeling, Working Group 2: Numerical Artifacts, Progress Report, May 2016.
- [13] D. Poljak et al.: On the Use of Conformal Models and Methods in Dosimetry for Nonuniform Field Exposure, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 60 (2018), 2, pp. 328-337, 2018.
- [14] J. W. Arthur: The Evolution of Maxwell's Equations from 1862 to the Present Day, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 55, 3, 2013, pp. 61-81.
- [15] J. C. Maxwell: A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, *Phil. Trans.*, 166, 1865, pp. 459-512.
- [16] T. K. Sarkar, M. Salazar-Palma, D. L. Sengupta: Who Was James Clerk Maxwell and What Was and Is His Electromagnetic Theory?, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 51, 4, August 2009, pp. 97-116.

Limitations of Mathematical Models in Physics and Technical Sciences

Dragan Poljak

Abstract: The paper deals with the nature of mathematical models in physics and technology and, consequently, related limitations. While physics considers nature and related physical laws, arising from the application of scientific method, and thus leads to physical laws reflecting phenomena in real world the role of technical sciences is to change the world in terms of technological progress by means of physical laws. In addition to experimental methods mathematical models play a crucial role in a development of physics and technical sciences. Mathematical models are based on fundamental physical laws usually referred to as a theoretical background and a related mathematical solution method. For realistic problems, in particular in technology, it is necessary to approximately, i.e. numerically solve corresponding equations which requires implementation on computer. Through mathematical modeling limitations arise on several levels. Basic limitations are incorporated deeply in fundamentals of physical-philosophical concepts of observing the world, and are related to issues of limits of scientific insight on nature in general, what one finds in physics in the frame of *Heisenberg uncertainty relations*, in mathematics in form of *Gödel incompleteness theorem*, or in some basic concepts of Kant philosophy on limits of our insight. Second class of limitations is related to the fact that models are simplified simulations of phenomena of interest. In other words, a set of parameters one takes into account is always limited. Next step in limitations is a solution technique for solving given operator equation (e.g. differential equation), and the last problem one face with is computer implementation, i.e. the problem of computability. Basically, while differential equations deal with continuous quantities, computers operate with finite data sets.

After introductory considerations the paper analyzes mathematical analogies from different physics disciplines and then historical and philosophical development of electromagnetics and, in particular, properties of electromagnetic models are considered.

Finally, a number of illustrative examples pertaining to electromagnetic compatibility and bioelectromagnetics is carried out.

Keywords: laws of nature, mathematical models, solution methods, different classes of limitations, electromagnetic models

