

## O električnoj energiji

**Sažetak:** Svaka električna mreža prenosi energiju elektromagnetskim poljem stvorenim posmičnim gibanjem električno nabijenih čestica (naboja) u vodičima i napravama električne mreže. Ta se energija u elektrotehnici naziva električna energija. U članku je, koristeći zakon o lokalnom očuvanju energije u elektromagnetskom polju, pokazano da se u svakoj električkoj mreži pojavljuje električna energija – prijenos energije elektromagnetskim poljem – na svakom mjestu u prostoru oko električne mreže u kojem istodobno postoje vektori jakosti električnog polja i magnetske indukcije i nisu međusobno paralelni. Na primjeru istosmjernog električkog kruga sastavljenog od baterije, vodiča i otpornika pokazano je da je stvarno razumijevanje načina prijenosa energije, čak i u tako jednostavnom električkom krugu, nemoguće ako se ne uzme u obzir postojanje površinskih naboja na vodičima i otporniku.

**Ključne riječi:** električna energija, elektromagnetsko polje, površinski naboji, Poyntingov teorem

### Uvod

Jedna od osnovnih karakteristika dobrog tehničkog stila nekog teksta pisanog stručnim jezikom jest da autor za stručne pojmove upotrebljava nazive (termine) o čijem značenju postoji konsenzus unutar stručne zajednice. Čitatelj – stručna osoba – možda i neće razumjeti neke rečenice u tekstu, ali mu se ne bi smjelo dogoditi da ne zna značenje pojedinih naziva. U dvojbi potražiti će pomoć u stručnom rječniku ili odgovarajućoj literaturi, gdje bi tim nazivima trebala biti pridijeljena točno određena značenja.

Za jedan od najvažnijih elektrotehničkih pojmova, pojam električne energije, ta će pomoć izostati. To i nije tako iznenađujuće s obzirom na to da se i nadređeni mu pojam energije u stručnoj literaturi uglavnom ili definira netočno ili se bez ikakva objašnjenja uopće ne definira. To se prenosi i na pojam električne energije pa se taj pojam u elektrotehničkoj literaturi obično uvodi bez

ikakva objašnjenja kao da se radi o nečemu što je očigledno. Eventualna pomoć udžbenika fizike samo će zbuniti znatiželjnika jer se naziv električna energija u fizici upotrebljava u drugačijem značenju nego u elektrotehnici. Također, u elektrotehničkom stručnom jeziku stalno su u upotrebi pojmovi proizvodnje i potrošnje električne energije koji mogu, uzimajući u obzir opću valjanost zakona o očuvanju energije, bez dodatnih objašnjenja samo unijeti zbrku i nejasnoću.

Zbog toga je važno znati što je električna energija te odgovore na s tim povezana pitanja kao što su, primjerice: o kojim parametrima ovisi električna energija, je li moguće lokalizirati električnu energiju, kako odrediti električnu energiju u električki malenim mrežama, na koji se način prenosi energija u električkim mrežama. U nastavku teksta na ta i slična pitanja pokušat će se odgovoriti sa stajališta teorije elektromagnetskog polja te sve ilustrirati na jednom samo naizgled jednostavnom primjeru prijenosa energije u istosmjernim električkim mrežama.

## Što je električna energija

### Različita značenja

Odgovor na to pitanje ovisi o tome je li upućeno laiku, fizičaru ili elektrotehničaru. Za laika električna energija je roba – potrošno dobro – koje se koristi i plaća i najčešće se poistovjećuje s električnom strujom. Izjave kao što su “Cijelo jutro nije bilo struje” ili “Račun za struju je previsok” uobičajene su u svakodnevnom životu.

Za fizičara je električna energija jednaka energiji električnog polja. Razlikuje ju od magnetske energije koja je jednaka energiji magnetskog polja i od energije električnog prijenosa [14, str. 213]. Energija električnog prijenosa je energija koja se prenosi elektromagnetskim poljem, tj. prostorom u kojem istodobno postoje električno polje i magnetsko polje, s tim da su ta polja stvorena posmičnim gibanjem električno nabijenih čestica (naboja) u vodljivoj materiji – električnom strujom.

Za elektrotehničara je električna energija oblik energije čija je osnovna odlika istodobnost njezine proizvodnje i potrošnje. Preciznije rečeno, pod istodobnošću se smatra da se energija iz nekog neelektričnog oblika pretvara u električnu energiju, prenosi do korisnika brzinom kojom se šire elektromagnetske pojave i zatim se pretvara u neki drugi, za ljude koristan oblik. Promatrano iz ljudske perspektive, i za najveće udaljenosti na Zemlji na koje se električna energija prenosi može se bez veće pogreške reći da je prijenos energije trenutčan. Za elektrotehničara je električna energija ono što je za fizičara energija električnog prijenosa.

Nazivi za oblike energije koji se upotrebljavaju u fizici bolje su pojmovno odabrani od onih koji se upotrebljavaju u elektrotehnici. No, praksa je pokazala da je vrlo teško postići da neka stručna ili znanstvena zajednica prihvati promjenu naziva, čak i ako je predloženo novo nazivlje pojmovno ili jezično bolje odabrano. U ovom je tekstu zadržano nazivlje uobičajeno u elektrotehnici. Tako se umjesto naziva ‘energija električnog prijenosa’, uobičajenog u fizici, upotrebljava naziv ‘električna energija’, a umjesto naziva ‘električna energija’ i ‘magnetska energija’, uobičajenih u fizici, nazivi ‘energija električnog polja’ i ‘energija magnetskog polja’.

## Električna energija – pojam iz teorije elektromagnetskog polja

Energija je jedno od svojstava svakog fizičkog sustava, ne i mehanizam kojim se može objasniti kako se ili zašto neki proces odvija niti je sama po sebi uzrok ičemu. Tako je i električna energija jedno od svojstava svakog sustava u kojem se očituju elektromagnetske pojave. Od svih takvih sustava za praksu su najvažnije električke mreže.

Sve električke mreže prenose energiju bilo da im je to primarna zadaća, bilo da im je to sporedna zadaća, kao što je to slučaj kod audiopojačala, TV-prijamnika, osobnih računala i sličnih proizvoda čija je primarna zadaća prijenos informacije. No, zapita li se znatiželjnik, a kako se to prenosi energija električkom mrežom ili o kojim parametrima ovisi prijenos energije, u većini stručne literature (udžbenicima, monografijama, člancima) na ta pitanja neće dobiti odgovor. Možda je najvažniji razlog što u elektrotehničkoj praksi dominiraju električke mreže za koje se zadovoljavajuća objašnjenja važnih praktičnih pitanja, posebno u projektiranju električkih uređaja, mogu dati s pomoću teorije električkih mreža<sup>1</sup>, elektrotehničke discipline koja vrijedi za električki malene mreže<sup>2</sup> i temelji se na primitivnim pojmovima napona i struje elemenata mreže i Kirchhoffovim zakonima.

Zbog svoje jednostavnosti i primjenjivosti na najveći broj (električkih) mreža u praksi, teorija električkih mreža danas je standardni alat u rukama inženjera projektanata električkih uređaja i mreža. Rješavanje jednadžbi mreže

<sup>1</sup> Teorija električkih mreža poseban je slučaj teorije elektromagnetskog polja. U sličnom je odnosu prema teoriji elektromagnetskog polja kao i Newtonova mehanika u odnosu na Einsteinovu mehaniku.

<sup>2</sup> Električki malena mreža svaka je mreža za koju vrijedi da je  $d \ll c / 2\pi f_M$ , gdje je  $d$  najmanji dijаметar zamišljene zatvorene sferne plohe koja obuhvaća mrežu,  $f_M$  je najviša frekvencija bitna za rad mreže, dok je  $c$  brzina svjetlosti u zraku. Veliku većinu mreža koje se koriste u praksi čine električki malene mreže. Karakteristični primjeri mreža koje nisu električki malene valovodi su i antene. Visokonaponski vodovi za prijenos energije, telefonski i telegrafski vodovi granični su primjeri mreža koje se još mogu analizirati metodama teorije električkih mreža modelirajući ih s pomoću tzv. mreža s raspodijeljenim parametrima.

teorija električkih mreža omogućuje da se za svaku električki malenu mrežu dobiju valni oblici napona i struja svih modela naprava mreže, dimenzioniranje naprava mreže i pouzdano predviđanje ponašanja analiziranih mreža.

No, ono što se zbog dugotrajne i uspješne primjene metoda teorije električkih mreža često u praksi zaboravlja, ili se čak ne zna, jest da model bilo koje mreže kako ga vidi teorija električkih mreža ne zauzima realan prostor. Pojmovi koji su vezani uz prostornu protežnost elektromagnetskih pojava, kao što su električno polje, magnetsko polje, interakcija polja s materijom, ne postoje u teoriji električkih mreža. Električna energija, u elektrotehnici poistovjećena s energijom električnog prijenosa u fizici, dakle, kao “nešto” što prolazi granicom fizičkog sustava nije objašnjiva bez uzimanja u obzir dimenzija analiziranog sustava, što posljedično znači da nije objašnjiva u terminima teorije električkih mreža. Krajnji domet teorije električkih mreža u analizi energetske odnosa u mrežama jest Tellegenov teorem, koji je inačica zakona o očuvanju energije iskazanog s pomoću trenutačnih snaga elemenata mreže, tj. trenutačnih vrijednosti jakosti toka energije elemenata mreže [5].

Objašnjenje pojma električne energije treba tražiti u fizici, u teoriji elektromagnetskog polja. Ta teorija omogućuje analizu i objašnjenje elektromagnetskih pojava u bilo kojoj električkoj mreži. Temelji se na Maxwellovim jednadžbama, čijim se rješavanjem dobivaju, uz uzimanje u obzir rubnih i početnih uvjeta, vrijednosti varijabla elektromagnetskog polja u prostoru u kojem se nalazi analizirana mreža. Varijable elektromagnetskog polja vektorske su veličine, što znači da se u analizi mora uzeti u obzir razmještaj komponenata mreže, njihove dimenzije te prostorna orijentacija u stvarnoj mreži.

Istaknimo bitnu razliku između teorije električkih mreža i teorije elektromagnetskog polja. U teoriji električkih mreža stvarna mreža koja se analizira mora biti električki malena, varijable njezina modela skalarne su veličine napona i struje, model ne zauzima realan prostor, tako da je odgovor na pitanje “Što je električna energija?” u terminima teorije električkih mreža i načelno nemoguć. U teoriji elektromagnetskog polja stvarna mreža koja se analizira može biti po volji, varijable njezina modela vektorske su veličine, model zauzima realan prostor, tako da je odgovor na pitanje “Što je električna energija?” načelno moguć.

## **Energija elektromagnetskog polja**

Eksperimentalna je činjenica da se elektromagnetska sila i impuls šire prostorom, uključujući i vakuum, konačnom brzinom od jednog fizičkog objekta (sustava) do drugog fizičkog objekta (sustava). Prema načelu lokalnosti, ako djelovanje nekog fizičkog objekta utječe na djelovanje nekog drugog fizičkog objekta, koji je prostorno udaljen od prvog objekta, tad u međuprostoru mora

postojati posrednik – fizički sustav – kojim se to djelovanje prenosi<sup>3</sup>. Posrednik kojim se prenosi elektromagnetska sila i impuls, kao i energija kroz prostor između međusobno djelujućih fizičkih objekata jest elektromagnetsko polje. To polje ima sve atribute fizičkog sustava (masu, energiju, impuls, moment impulsa).

Prema teoriji elektromagnetskog polja svojstva elektromagnetskog polja proizlaze iz analize Maxwellovih jednadžbi i izraza za elektromagnetsku silu, tj. za silu koja djeluje na električno nabijenu česticu (naboj) u mirovanju kao i u gibanju. Zbog toga se problem prijenosa energije s pomoću elektromagnetskog polja, tj. objašnjenje što je električna energija, može razumjeti jedino ako se krene od Maxwellovih jednadžbi i izraza za elektromagnetsku silu. Taj su put, nezavisno jedan od drugog, prošli engleski fizičari John Henry Poynting i Oliver Heaviside. Dobili su matematički izraz zakona o lokalnom očuvanju energije za bilo koji fizički sustav u kojem postoje električni naboji i električne struje iskazan s pomoću snaga, tj. jakosti tokova energije, i objavili ga 1884. godine. Taj se izraz danas uobičajeno naziva Poyntingovim teoremom.

Promatrajmo dio prostora volumena  $V$  kao fizički sustav odvojen od okoline zamišljenom ili stvarnom zatvorenom plohom površine  $S$ . U sustavu se nalazi električna mreža sastavljena od skupa mirujućih naprava (materijalnih objekata), a vodičima koji prolaze kroz zatvorenu plohu – granicu sustava – spojena je s okolinom. Mirujući naboji kao i električne struje u toj konfiguraciji materijalnih objekata prouzročuju da u svakom trenutku i u svakoj točki prostora izvan polarizirane, magnetizirane i vodljive materije sustava<sup>4</sup> postoji elektromagnetsko polje definirano u svakoj točki prostora i u svakom trenutku dvama vektorskim poljima: električnim poljem opisanim vektorom jakosti polja  $\mathbf{E}$  i magnetskim poljem opisanim vektorom magnetske indukcije  $\mathbf{B}$ .

Važno je naglasiti da je elektromagnetsko polje jedinstveno vektorsko polje i da predstavnici električnog i magnetskog polja, vektori  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ , ne postoje nezavisno jedan od drugog. Granični slučajevi elektromagnetskog polja, elektrostatičko polje ( $\mathbf{B} = 0$ ) ili magnetostatičko polje ( $\mathbf{E} = 0$ ), za promatrača u jednom referentnom sustavu pojavljuju se za promatrača u nekom drugom referentnom sustavu kao mješavina električnog i magnetskog polja [6, str. 553].

<sup>3</sup> Američki fizičar David Griffiths slikovito je iskazao načelo lokalnosti ovim riječima [6, str. 356]: “Tigar se ne može jednostavno rematerijalizirati izvan kaveza. Ako je uspio izići, to znači da se provukao kroz neku rupu u kavezu.”

<sup>4</sup> Interakciju materije s elektromagnetskim poljem opisuje za vodljivu materiju parametar vodljivosti  $\sigma$ , za polariziranu materiju parametar permitivnosti  $\epsilon$ , a za magnetiziranu materiju parametar permeabilnosti  $\mu$ . Karakterističan je primjer vodljive materije vodič ( $\sigma > 0$ ), polarizirane materije dielektrik između ploča kondenzatora ( $\epsilon \neq \epsilon_0$ ), dok su karakteristični primjeri magnetizirane materije feromagnetske jezgre prigušnica i transformatora ( $\mu \neq \mu_0$ ). Sa  $\epsilon_0$  i  $\mu_0$  označene su konstantne vrijednosti permitivnosti i permeabilnosti vakuuma, dok je vodljivost vakuuma  $\sigma_0 = 0$ . Vrijednosti konstanta  $\sigma$ ,  $\epsilon$  i  $\mu$  za zrak pod normalnim uvjetima približno su jednake odgovarajućim vrijednostima za vakuum.

Za opis elektromagnetskog polja u polariziranoj odnosno magnetiziranoj materiji potrebno je poznavati još i vektor električnog pomaka  $\mathbf{D}$  odnosno vektor jakosti magnetskog polja  $\mathbf{H}$ . Za opis elektromagnetskog polja u homogenoj vodljivoj materiji (sredini), npr. u vodičima, potrebno je poznavati još i vektor gustoće provodne struje  $\mathbf{J}$ .

Istaknimo da električno polje jakosti  $\mathbf{E}$  može biti stvoreno ili istodobno s vremenskom promjenom magnetske indukcije  $\mathbf{B}$  ili razdvajanjem naboja. U nekim za praksu važnim fizikalno i kemijski nehomogenim vodljivim sredinama (elektrolitima) dolazi do spontanog razdvajanja električnih naboja i pojave elektrodnog potencijala, tj. održavanja razlike električnih potencijala između materijala različitog kemijskog sastava (primarni galvanski članci, akumulatorske baterije) te se takve sredine ponašaju kao izvori energije<sup>5</sup>. Zbog toga je za opis elektromagnetskog polja u takvim sredinama potrebno osim vektora gustoće provodne struje  $\mathbf{J}$  poznavati i vektor tzv. ekvivalentnog stranog električnog polja jakosti  $\mathbf{E}_i$ . To strano električno polje djeluje na sve naboje u sustavu na isti način kao i električno polje jakosti  $\mathbf{E}$  te će pretpostavljajući konstantnu vodljivost  $\sigma$  u svim dijelovima sustava vrijediti Ohmov zakon, tj. da je

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_{\text{rez}} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) = \mathbf{A} / \text{m}^2 \quad (1)$$

gdje je  $\mathbf{E}_{\text{rez}}$  vektor jakosti rezultantnog električnog polja sustava.

Jedno od svojstava elektromagnetskog polja jest da je u njemu uskladištena energija. Maxwellova hipoteza da je ukupna energija elektromagnetskog polja u općem slučaju jednaka zbroju energije električnog polja i magnetskog polja i da se računa prema izrazima koji vrijede za energiju elektrostatičkog polja i magnetostatičkog polja, pokazala se u primjeni točnom. Ukupnu energiju elektromagnetskog polja svedenu na jedinicu volumena Maxwell je nazvao gustoćom energije elektromagnetskog polja  $G_{em}$  za koju, uz pretpostavku konstantnih vrijednosti permitivnosti  $\varepsilon$  i permeabilnosti  $\mu$  u pojedinim dijelovima sustava, vrijedi da je

$$G_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}, \frac{\text{Ws}}{\text{m}^3} \quad (2)$$

<sup>5</sup> Energetski gledano to je najvažniji način razdvajanja naboja. Drugi načini razdvajanja naboja su trenjem, deformacijom nekih kristala, zagrijavanjem spojnog mjesta dvaju različitih metala i osvjetljavanjem nekih poluvodičkih materijala.

## Poyntingov teorem

Energija elektromagnetskog polja nije očuvana veličina. To proizlazi iz činjenice da u elektromagnetskom polju djeluje elektromagnetska sila i da rad koji ta sila vrši pomičući naboje u vodljivim dijelovima sustava može biti obavljen jedino na račun smanjenja gustoće energije elektromagnetskog polja. U skladu s izrazom za elektromagnetsku silu<sup>6</sup> proizlazi da je u općem slučaju, uzimajući u obzir prema izrazu (1) i djelovanje izvora energije unutar sustava, rad  $dW$  koji ta sila vrši na svim nabojima u sustavu unutar volumena  $V$  u intervalu  $dt$  jednak, [6, str. 357]

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dv = \int_V \frac{1}{\sigma} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}) dv - \int_V (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}) dv, \quad W$$

Prvi član na desnoj strani jednadžbe pokazuje koliko je smanjenje energije elektromagnetskog polja u jedinici vremena zbog interakcije s vodljivom materijom sustava. Zbog mirovanja naprava unutar sustava ta se komponenta rada  $W$  koji je izvršila elektromagnetska sila iskazuje kao toplinska energija, odnosno iskazano u terminima snage<sup>7</sup> kao gustoća snage gubitaka sustava  $P = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}/\sigma$ ,  $W/m^3$ . Drugi član pokazuje koliki je doprinos izvora energije povećanju energije elektromagnetskog polja. Time su otkrivena dva razloga zbog kojih dolazi do promjene energije elektromagnetskog polja.

Treći razlog otkriva Poyntingov teorem izveden iz Maxwellovih jednadžbi i izraza za elektromagnetsku silu. Poyntingov teorem je u terminima snage iskazan zakon o lokalnom očuvanju energije<sup>8</sup> za svaki skup mirujućih naprava unutar volumena  $V$  omeđenog zatvorenim plohom površine  $S$  i “uronjenog” u elektromagnetsko polje [6, 7, 9]:

$$\int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_V G_{em} dv + \int_V P dv + \oint_{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} ds, \quad W \quad (3)$$

<sup>6</sup> Sila kojom elektromagnetsko polje djeluje na naboj  $q$  jednaka je zbroju električne sile  $q\mathbf{E}$  i magnetske sile  $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , gdje je  $\mathbf{v}$  vektor posmične brzine naboja, Budući da magnetska sila djeluje okomito na smjer gibanja naboja, rad vrši samo električna sila.

<sup>7</sup> Snaga se definira kao količina prenesene ili transformirane (pretvorene) energije u jedinici vremena. Umjesto naziva ‘snaga’, pojmovno je bitno bolji naziv ‘jakost toka (struje) energije’ ili kraće ‘tok energije’.

<sup>8</sup> Zakon o lokalnom očuvanju energije navodi da ako se ukupna količina energije nekog sustava promijeni u nekom intervalu za određeni iznos, tad točno ta ista količina energije mora u tom istom intervalu proći kroz granicu koja dijeli taj sustav od okoline, tj. mora biti prenesena okolini ili unesena u sustav iz okoline nekim mehanizmom (načinom) ili načinima prijenosa energije karakterističnim za taj sustav.

Član na lijevoj strani jednadžbe (3) predstavlja snagu, tj. jakost toka energije, koju izvori energije unutar sustava predaju elektromagnetskom polju u promatranom volumenu  $V$ , dok članovi na desnoj strani jednadžbe pokazuju kako se taj tok energije raspodjeljuje. Prvi član predstavlja jakost toka energije kojom se povećava gustoća energije elektromagnetskog polja u volumenu  $V$ , dok drugi član predstavlja snagu gubitaka sustava, tj. jakost toka energije koja se u volumenu  $V$  pretvara u toplinsku energiju. Treći član predstavlja jakost toka energije koja, ovisno o predznaku člana, prolazi kroz zatvorenu plohu  $S$  u okolinu ili obratno.

Vektor

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (4)$$

naziva se Poyntingov vektor, dok je vektor  $\mathbf{n}$  jedinični vektor okomit na diferencijal plohe  $ds$  i uzima se dogovorno da je pozitivan ako je usmjeren prema okolini. Količina energije koja u jedinici vremena prolazi granicom sustava naziva se električna snaga sustava i jednaka je

$$P_{el}(t) = \oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} ds \quad (5)$$

odakle proizlazi da je količina energije električnog prijenosa, odnosno u terminima elektrotehnike, količina električne energije koja je protekla sustavom u intervalu  $[t_0, t_0+t]$  jednaka

$$T_{el}(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} P_{el}(\tau) d\tau \quad (6)$$

Prema izrazu (4) zaključujemo da će tok električne energije postojati u svakoj točki prostora u kojoj postoji elektromagnetsko polje, dakle, u kojoj istodobno postoje električno i magnetsko polje a njihovi predstavnici vektori  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  nisu međusobno paralelni.

Tok električne energije kroz neku točku u prostoru može se vizualizirati tako da se zamisli da ta točka leži u ravnini koju “razapinju” vektori  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  u toj točki. Tad je tok električne energije okomit na tu ravninu, smjera određenog pravilom desnog vijka i iznosa jednakog  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \cdot \sin\varphi)/\mu_0$ , gdje su  $E$  i  $B$  moduli vektora  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ , a  $\varphi$  je kut između tih vektora.

Smjer toka električne energije u trenutku  $t$  ovisi o predznaku električne snage sustava u tom trenutku. Naime, u općem slučaju Poyntingov vektor  $\mathbf{N}$  u trenutku  $t$  može u nekim područjima zatvorene plohe  $S$  biti pozitivan, dakle usmjeren prema okolini, a u ostalim područjima negativan, dakle usmjeren prema sustavu, dok se za jedinični vektor  $\mathbf{n}$  uzima da je na cijeloj zatvorenoj



plohi  $S$  pozitivan, dakle da je usmjeren prema okolini. Prema izrazu (5) proizlazi da električna energija u trenutku  $t$  struji iz sustava u okolinu ako je  $P_{el}(t) > 0$ , a ako je  $P_{el}(t) < 0$ , električna energija u tom trenutku struji iz okoline u sustav.

## Interpretacija Poyntingova teorema

Točnost Poyntingova teorema ovisi o točnosti Maxwellovih jednadžbi i izraza za elektromagnetsku silu, koji su se u nebrojenim primjerima pokazali točnim, tako da ni točnost Poyntingova teorema nije upitna. No, za mnoge elektrotehničare pa i za neke fizičare upitna je njegova interpretacija.

Tako se, prema Poyntingovu teoremu, električna snaga sustava  $P_{el}(t)$  definira na granici sustava u prostoru bez materijalnih objekata, što znači da električna energija, predstavljena Poyntingovim vektorom  $\mathbf{N}$ , struji prostorom mimo naprava sustava. Njezin je uzrok odnosno nosač naboj u posmičnom gibanju, no električna energija i njezin nosač ne struje istom brzinom niti zauzimaju isti prostor. Tako, primjerice, posmična brzina naboja u bakrenom vodiču pri toku električne struje od  $1,5 \text{ A/mm}^2$  iznosi oko  $0,1 \text{ mm/s}$ , dok je brzina strujanja električne energije jednaka brzini širenja elektromagnetskog polja, tj. jednaka je brzini svjetlosti od  $3 \cdot 10^{11} \text{ mm/s}$ . Budući da naboj struji vodičima, a električna energija prostorom oko vodiča, proizlazi da je najbolji vodič električne energije vakuum odnosno zrak, tj. idealan nevodni električne struje. Vrijedi i obratno: vodiči električne struje nevodni su električne energije [15, str. 130]. Proizlazi da se električna energija prenosi posvuda, samo ne vodičem!

Ta je predodžba prijenosa električne energije<sup>9</sup> toliko protuintuitivna da nije neobično da su mnogi elektrotehničari pa i neki fizičari pokušali zadržati predodžbu o električnoj energiji kao fluidu koji teče vodičem i pronaći za to logičko i fizikalno opravdanje. Tu je predodžbu podržalo i otkriće elektrona kao fizičkog nosioca naboja<sup>10</sup>, a dobru osnovu za kritiku Poyntingove i Heavisideove interpretacije Poyntingova teorema dao im je izraz za trenutačnu električnu snagu sustava.

Naime, prema (5) trenutačna električna snaga sustava definirana je samo za zatvorenu plohu  $S$  koja omeđuje sustav. To znači da se iz integrala  $\int_{\Delta S} \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} ds$

<sup>9</sup> Pojam 'prijenos električne energije' pleonazam je uobičajen u elektrotehničkoj praksi, komunikacijski je svrhovit i dobar je primjer da se katkad ne može izbjeći ponavljanje značenja u nazivu.

<sup>10</sup> Možda je Poyntingovo i Heavisideovo otkriće zakona o lokalnom očuvanju energije u elektromagnetskom polju – Poyntingova teorema – bilo znatno olakšano time što se u njihovo vrijeme nije uopće znalo za postojanje elektrona, pa su se usredotočili na pokušaje objašnjenja prijenosa energije isključivo u duhu Faradayevih i Maxwellovih ideja o elektromagnetskom polju.

izračunatog za bilo koju *otvorenu* plohu  $\Delta S$ , koja je dio zatvorene plohe  $S$ , ne može zaključiti na trenutačnu električnu snagu, tj. na jakost toka električne energije koja prolazi tim dijelom zatvorene plohe  $S$ . Očigledno, isti zaključak vrijedi i za po volji malenu plohu  $ds$ . Proizlazi da se iz poznavanja Poyntingova vektora  $\mathbf{N}$  u nekoj točki prostora ne može zaključiti na trenutačnu električnu snagu (jakost toka električne energije) u toj točki prostora. Naime, Poyntingovu vektoru  $\mathbf{N}$  može se dodati bilo koji vektor  $\mathbf{M}$  koji integriran preko zatvorene plohe  $S$  daje vrijednost nula, što znači da se njegovim dodavanjem ne mijenja trenutačna električna snaga sustava. No, ako dva različita vektora  $\mathbf{N}$  i  $\mathbf{N} + \mathbf{M}$  daju istu trenutačnu električnu snagu sustava, proizlazi da ni Poyntingov vektor  $\mathbf{N}$  u nekoj točki prostora ne daje jednoznačnu vrijednost jakosti toka električne energije u toj točki prostora ni po iznosu ni po smjeru, što znači da distribucija električne energije u elektromagnetskom polju ostaje nepoznata.

Neodređenost Poyntingova vektora kao mjere za jakost toka električne energije u nekoj točki prostora potaknula je veći broj fizičara i elektrotehničara da pokušaju pronaći takve oblike vektora  $\mathbf{M}$  koji će Poyntingov vektor, a time i trenutačnu električnu snagu sustava opisati s pomoću 'intuitivno prihvatljivih' varijabli gustoće provodne struje  $\mathbf{J}$  i potencijala.

Unatoč tomu što je među tim pokušajima bilo vrlo domišljatih rješenja, ni jedno nije ponudilo uvjerljiviju argumentaciju ili jednostavniju primjenu od originalnog Poyntingova teorema<sup>11</sup>. Odabir najjednostavnijeg rješenja,  $\mathbf{M} = 0$ , kako su pretpostavili Poynting i Heaviside, izdržao je do danas sve kritike. Poyntingov teorem djelić je teorije elektromagnetskog polja koja kao i svaka prirodno-znanstvena teorija nije apsolutna istina nego samo jedan koherentan skup interpretiranih matematičkih relacija koji daje dovoljno točne odgovore na mnoga pitanja iz elektromagnetizma. Eventualnu reviziju Poyntingova teorema valja očekivati tek kad će se nekom novom teorijom moći objasniti i oni problemi pred kojima je Poyntingov teorem nemoćan, primjerice, kakva je distribucija električne energije u elektromagnetskom polju.

## Električna snaga u električki malenim mrežama

Kao što je uvodno istaknuto, većinu za praksu važnih električkih mreža čine električki malene mreže. Kriterij električke malenosti mreža, dan u bilješci 2, može se u svakom slučaju lako provjeriti. Taj kriterij proizlazi iz Maxwellovih jednadžbi ako se pretpostavi da su na zatvorenoj plohi  $S$  koja obuhvaća analiziranu mrežu vektor jakosti električnog polja  $\mathbf{E}$  i vektor magnetske indukcije  $\mathbf{B}$  međusobno nezavisne veličine. To je moguće ako na toj plohi na vrijednost vektora magnetske indukcije  $\mathbf{B}$  ne utječe brzina promjene električnog polja

<sup>11</sup> Dobar pregled varijanata Poyntingova teorema s vrlo opsežnom literaturom dan je u [10].

$\partial \mathbf{E} / \partial t$ , tj. ako je zanemarena pomaćna struja kroz plohu, i ako na vrijednost vektora jakosti električnog polja  $\mathbf{E}$  ne utječe brzina promjene magnetskog polja  $\partial \mathbf{B} / \partial t$ .

Podsjetimo se da električno polje može biti stvoreno ili istodobno s vremenskom promjenom magnetske indukcije ili razdvajanjem naboja. U istosmjernim električkim mrežama izvor električnog polja može biti jedino razdvajanje naboja, što znači da je  $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ . Tako stvoreno vremenski nepromjenjivo polje automatski zadovoljava i drugi kriterij električke malenosti mreža, tj. da je  $\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$ . Proizlazi da je svaka istosmjerna električka mreža ujedno i električki malena mreža.

Sa stanovišta teorije elektromagnetskog polja svaka električki malena mreža shvaća se kao kvazistatički sustav. Naglasak je na prefiksu kvazi-, jer statičnost u takvim sustavima ne implicira da izvori polja (distribucija naboja, električne struje), a time i polja ne mogu biti vremenski promjenjive veličine. To samo znači da ako se znaju izvori polja u nekom trenutku  $t$ , polja su u tom trenutku jednoznačno određena bez obzira na to koji su i kakvi izvori polja djelovali neposredno prije tog trenutka  $t$ .

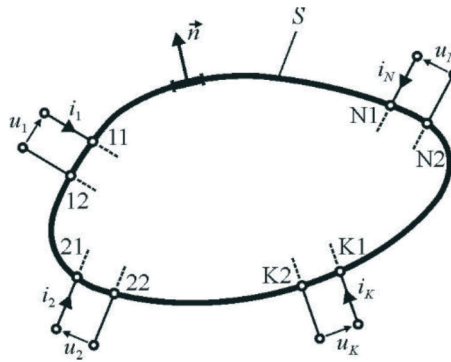
Za električnu snagu koja ulazi u kvazistatički sustav (električki malenu mrežu), vrijedi da je [7]:

$$-\oint_S \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} ds = -\oint_S \Phi \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds \quad (3)$$

gdje je  $\Phi$  skalarni potencijal električnog polja. Integral na desnoj strani jednadžbe ima nenultu vrijednost samo tamo gdje zatvorena ploha  $S$  presijeca vodiče. Svaki par vodiča koji presijeca zatvorenu plohu  $S$  u točkama K1 i K2, (K = 1, 2, ..., N), i za koji je  $\mathbf{J}_{K1} + \mathbf{J}_{K2} = 0$  naziva se prilaz. Uz jednak presjek vodiča prilaza vrijedit će za trenutačne vrijednosti struja prilaza da je  $i_{K1} + i_{K2} = 0$ . Razlika potencijala između točaka K1 i K2 jednaka je trenutačnoj vrijednosti napona prilaza  $u_K$ , tako da je električna snaga, tj. jakost toka električne energije, koja ulazi u kvazistatički sustav prema slici 1 jednaka<sup>12</sup>

$$-\oint_S \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{K=1}^N u_K \cdot i_K \quad (3)$$

<sup>12</sup> Izraz (7) vrijedi i za električki malene mreže s neparnim brojem priključaka. Naime, takve se mreže mogu uvijek prikazati kao mreže s parnim brojem priključaka ako se jedan od priključaka shvati kao zajednički za dva prilaza.



Slika 1: Kvazistatički sustav povezan s okolinom preko N prilaza

## Primjer prijenosa električne energije u istosmjernom električkom krugu

Usporedimo uobičajeno objašnjenje prijenosa električne energije s objašnjenjem prijenosa električne energije elektromagnetskim poljem na jednom vrlo jednostavnom primjeru. Pritom pod uobičajenim objašnjenjem smatramo objašnjenje koje se može naći u srednjoškolskim udžbenicima i visokoškolskim udžbenicima iz osnova elektrotehnike u kojima se Poyntingov teorem, ako se uopće i spominje, spominje ponajprije u vezi sa širenjem elektromagnetskih valova.

## Uobičajeno objašnjenje prijenosa električne energije

Analizirajmo najjednostavniji mogući električki krug koji čine (akumulatorska) baterija, vodiči, sklopka i otpornik. Nakon uklopa sklopke krugom teče stalna električna struja, tj. postoji stalan tok slobodnih naboja (elektrona) od negativnog pola baterije, vodičem do otpornika, kroz otpornik te zatvorenom sklopkom i povratnim vodičem do pozitivnog pola baterije. Zašto se otpornik grije? Uobičajeni je odgovor jednostavan. Otpornik se grije zato jer kroz njega prolazi električna struja koju daje baterija, tj. u tom se procesu (kemijska) energija uskladištena u bateriji smanjuje, električna struja prenosi tu energiju do otpornika gdje se pretvara u toplinsku energiju.

Tim se objašnjenjem implicira da je energija vrsta fluida koji teče vodičima, a njezin je fizički nosač pokretljiva električno nabijena čestica – elektron. Ta predodžba dobro odgovara svakodnevnom iskustvu u naizgled analognim situacijama strujanja materije. No, posmična brzina elektrona je malena pa bi početak zagrijavanja otpornika nakon uklopa sklopke jako ovisio o duljini

vodiča. To, pak, ne odgovara iskustvenoj činjenici da početak zagrijavanja otpornika nakon uklopa sklopke, u svim slučajevima u praksi, uopće ne ovisi o duljini spojnih vodiča, tj. praktički je trenutačan. Dodatna je činjenica da se otpornik može priključiti na izmjeničnu mrežu, učinak ostaje nepromijenjen, dok elektroni ostaju približno na istim mjestima u vodiču i vibriraju u ritmu frekvencije izmjenične mreže.

Moguće bi objašnjenje moglo biti i sljedeće: elektroni su pokretljivi nosači negativnog naboja te će jedan elektron gibajući se u jednom smjeru posmičnom brzinom trebati prevaliti zanemariv put da svojim električnim poljem, tj. odbojnom elektromagnetskom silom, “gurne” susjedni elektron u istom smjeru. Taj se proces u vodiču širi brzinom širenja djelovanja elektromagnetske sile, tj. brzinom svjetlosti, što bi otklonilo prethodni prigovor. No, unutar vodiča nema suviška naboja, tj. broj pokretljivih elektrona mora biti jednak broju fiksiranih pozitivnih jezgara atoma, pa je odbijanje između susjednih elektrona poništeno zbog privlačne sile između elektrona i pozitivnih jezgara atoma. Ukupna sila na jedan elektron zbog drugih pokretljivih elektrona i fiksiranih pozitivnih jezgara atoma jednaka je nuli tako da predloženo objašnjenje nije točno.

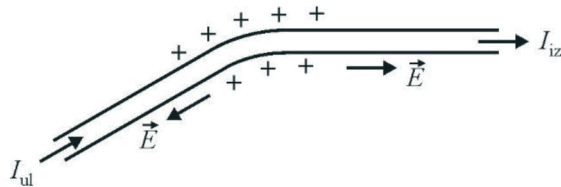
## Uloga površinskih naboja

Eksperimentalna je činjenica da se u analiziranom električkom krugu nakon uklopa sklopke praktički trenutačno uspostavlja električna struja, tj. tok pokretljivih nosača negativnog naboja, konstantne jakosti duž cijelog kruga. To znači da se naboji u vodičima i otporniku pomiču i smjenjuju, ali tako da gustoća naboja na svakom mjestu u krugu ostaje nepromijenjena. Zbog toga mora u vodičima i otporniku postojati aksijalno električno polje koje će svojom silom održavati naboje u vodičima i otporniku u jednolikom posmičnom gibanju. Budući da su vodiči i otpornik električno neutralne naprave, ali samo u smislu da unutar njih nema ni suviška ni manjka naboja, to aksijalno polje mogu stvoriti jedino naboji na površini vodiča i otpornika – površinski naboji<sup>13</sup> – čija se

<sup>13</sup> Njemački fizičari Gustav Kirchhoff i Wilhelm Weber su sredinom XIX. stoljeća, nezavisno jedan od drugoga, analizirajući pojave u istosmjernim električkim krugovima zaključili da na svakom istosmjernom strujom protjecanom vodiču moraju postojati površinski naboji. Većina fizičara tog doba smatrala je taj zaključak netočnim, tako da su Kirchhoffove i Weberove ideje pale u zaborav. Tek sredinom XX. stoljeća njemački fizičar i nobelovac Arnold Sommerfeld spominje površinske naboje na primjeru analize istosmjernom strujom protjecanog koaksijalnog kabela [15]. Shvaćanje važnosti površinskih naboja, a posebno kao spone između elektrostatičke i teorije električnih krugova, širi se vrlo sporo. Zadnjih šezdesetak godina površinski se naboji spominju vrlo rijetko u udžbenicima fizike [6, 9, 13], dok im u udžbenicima elektrotehnike nema ni traga. Zasad, koliko je autoru poznato, postoji samo jedan udžbenik fizike [3, str. 716 – 764] u kojem je detaljno opisana uloga površinskih naboja u analizi istosmjernih električnih krugova, te monografija [1] u kojoj su opisani proračuni raspodjele površinskih naboja za različite konfiguracije vodiča, a posebno je interesantan komentar Kirchhoffovih i Weberovih radova o površinskim nabojima.

gustoća mijenja duž vodiča i otpornika. Očito je da površinski naboji stvaraju i električno polje izvan naprava (vodiča i otpornika) tako da električno polje površinskih naboja ima u odnosu na osi naprava radijalnu i aksijalnu komponentu izvan naprava te samo aksijalnu komponentu unutar naprava. U površinske naboje ubrajaju se i međuspojni (granični) naboji. To su naboji koji se, u skladu s Gaussovom zakonom za električno polje, gomilaju na spojnim mjestima vodiča i otpornika zbog protjecanja električne struje kroz materijale različitih vodljivosti.

Površinski naboji omogućuju u svakom nerazgranatom električkom krugu istu jakost električne struje. Pokažimo to na primjeru prikazanom na slici 2. Pretpostavimo da je struja (jakost električne struje) na ulazu u luk vodiča veća od struje na izlazu.<sup>14</sup> Zbog toga će se na “koljenu” vodiča skupljati naboj čije će se električno polje suprotstavljati struji koja ulazi (usporavajući tok naboja) i potpomagati struji koja izlazi (ubrzavajući tok naboja) sve dok se te struje ne izjednače. Na djelu je jaka negativna povratna veza koja jamči da će se za nekoliko nanosekunda uspostaviti ustaljeno stanje, tj. ista jakost struje (tok naboja) u svim dijelovima nerazgranatog električnog kruga i prisiliti naboj da se kreće unutar vodiča ma kako bio vodič savijen ili zapetljan [3, str. 734 – 735]<sup>15</sup>.



Slika 2: Primjer djelovanja površinskih naboja

Površinski naboji omogućuju i da se u svakom razgranatom električkom krugu, tj. krugu s više od jedne petlje, djelovanjem negativne povratne veze uspostavi ustaljeno stanje s jakostima struja u skladu s Kirchhoffovim zakonom struje. Također, u ustaljenom je stanju raspored površinskih naboja u električkom krugu takav da je električno polje površinskih naboja konzervativno, tj. ponaša se kao da je elektrostatičko. To znači da je rad tog polja duž bilo kojeg zatvorenog puta (petlje) u električkom krugu jednak nuli, što je samo drugi način iskaza Kirchhoffova zakona napona [11].

<sup>14</sup> Na slici je naznačen tehnički smjer električne struje koji odgovara smjeru “gibanja” pozitivnih nosilaca naboja u vodiču, a koje je ekvivalentno stvarnom gibanju negativnih nosilaca naboja (elektrona) u suprotnom smjeru.

<sup>15</sup> Zbog ekstremno kratkog vremena uspostave ustaljenog stanja postići će se ista jakost struje u svim dijelovima nerazgranatog električnog kruga i u izmjeničnim električkim krugovima protjecanim strujama frekvencija do u megahercno područje [6, str. 303].

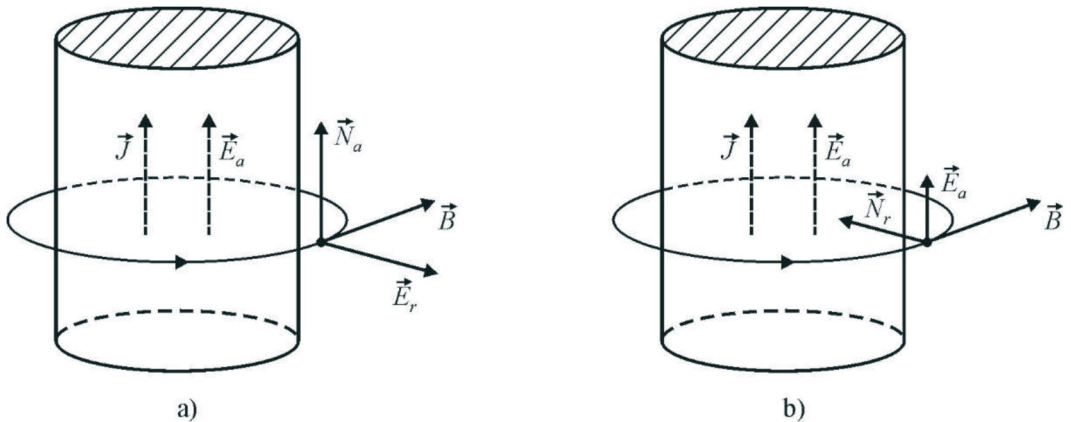
Količine površinskog naboja potrebne da se proizvedu zamjetljivi učinci u električkim krugovima zapanjujuće su malene. Primjerice, da bi struja jakosti 1 A, što je jednako toku naboja od  $10^{19}$  elektrona u sekundi, skrenula pod pravim kutom u bakrenom vodiču dovoljno je da na “koljenu” vodiča bude samo jedan elektron viška (manjka), dok su samo tri elektrona viška (manjka) potrebna na spojnom mjestu bakrenog vodiča i otporne žice od nikla jednakih presjeka za promjenu jakosti električnog polja u vodiču i otpornoj žici kad vodičem i otpornom žicom teče struja jakosti 1 A [13, str. 401 – 402]. Ili, da se u bakrenom vodiču od  $1,5 \text{ mm}^2$  održi struja jakosti 10 A, dovoljan je gradijent od nekoliko stotina elektrona po milimetru duljine vodiča [12, str. 177]. Razlog je, naravno, u enormnoj Coulombovoj sili i velikoj pokretljivosti elektrona u bakru. Zbog toga ni detekcija površinskih naboja nije jednostavna osim u visokonaponskim električkim krugovima [3, str. 747 – 749].

Električno polje površinskih naboja izvan vodiča već je u najjednostavnijim konfiguracijama vodiča i naprava električkih krugova iznimno zamršena oblika i može se izračunati jedino numeričkim metodama [8]. Nasuprot tomu, jakost aksijalne komponente električnog polja površinskih naboja unutar vodiča  $E_a$  može se, zbog djelovanja negativne povratne veze površinskih naboja, i u najzamršenijim konfiguracijama vodiča i naprava električkih krugova uvijek jednostavno izračunati prema Ohmovu zakonu  $E_a = J/\sigma$ .

## Uloga vodiča

Prema Poyntingu i Heavisideu vodiči, prijenosne linije i komponente slične namjene ne služe za prijenos električne energije nego samo za oblikovanje takvog elektromagnetskog polja koje omogućuje da se prostorom oko vodiča i u smjeru pružanja vodiča prenosi električna energija. Slika 3a prikazuje vodič s naznačenim jednim od dvaju mogućih smjerova vektora gustoće provodne struje  $\mathbf{J}$  kao i smjer vektora pripadnog solenoidalnog polja magnetske indukcije  $\mathbf{B}$  u jednoj točki prostora izvan vodiča. Na slici je prikazan i smjer koji bi trebala imati komponenta Poyntingova vektora  $\mathbf{N}$  da bi se električna energija mogla prenijeti elektromagnetskim poljem mimo vodiča. Da bi se to ostvarilo mora, prema izrazu (4), u prostoru oko vodiča postojati električno polje jakosti  $E_r$  radijalno usmjereno u odnosu na vodič. No, takvo radijalno polje upravo i stvaraju površinski naboji na vodiču, što u općem slučaju znači da je postojanje površinskih naboja nužan uvjet prijenosa električne energije, tj. prijenosa energije elektromagnetskim poljem.

Električno polje izvan vodiča nema samo radijalnu komponentu  $E_r$ , nego i aksijalnu komponentu  $E_a$ . Naime, za svaki vodič vrijedi Ohmov zakon  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_a$ , što znači da su vektori gustoće provodne struje  $\mathbf{J}$  i jakosti električnog polja  $\mathbf{E}_a$  u vodiču, a time i na granici vodič – okolina, kolinearni. Unutar vodiča i na



Slika 3: Strujom protjecani vodič u elektromagnetskom polju

a) Radijalna komponenta jakosti električnog polja površinskih naboja  $\vec{E}_r$  i solenoidalno polje magnetske indukcije  $\vec{B}$  omogućuju prijenos električne energije. Vektor  $\vec{N}_a$  paralelan je s osi vodiča i predstavlja aksijalnu komponentu Poyntingova vektora  $\vec{N}$ .

b) Aksijalna komponenta jakosti električnog polja površinskih naboja  $\vec{E}_a$  i solenoidalno polje magnetske indukcije  $\vec{B}$  prouzrokuju pretvorbu energije elektromagnetskog polja u toplinsku energiju vodiča. Vektor  $\vec{N}_r$  okomit je na os vodiča i predstavlja radijalnu komponentu Poyntingova vektora  $\vec{N}$ .

površini vodiča polje vektora  $\vec{E}_a$  po intenzitetu je uniformno dok se izvan vodiča s povećanjem udaljenosti od vodiča smanjuje. Slika 3b prikazuje vodič s naznačenim smjerovima vektora gustoće provodne struje  $\vec{J}$ , vektora aksijalne komponente jakosti električnog polja  $\vec{E}_a$ , vektora magnetske indukcije  $\vec{B}$  i pripadnog Poyntingova vektora  $\vec{N}_r$  u jednoj točki prostora izvan vodiča. Prema (4) proizlazi da je Poyntingov vektor  $\vec{N}_r$  usmjeren prema središtu vodiča, što znači da energija ulazi u vodič iz elektromagnetskog polja i tu se, uz pretpostavku da vodič miruje, može pretvoriti samo u toplinsku energiju.

## Uloga baterije

U ustaljenom stanju i za fiksiranu konfiguraciju naprava analiziranog električnog kruga gustoća naboja na svakom mjestu u električkom krugu se ne mijenja, što znači da je električno polje površinskih naboja identično električnom polju fiksiranih naboja koji bi bili raspoređeni na isti način u prostoru. Dakle, električno polje površinskih naboja je konzervativno polje, tj. ponaša se kao svako elektrostatičko polje. No za razliku od “pravog” elektrostatičkog polja u kojem se rad izvršen za uspostavu polja transformira u potencijalnu energiju elektrostatičkog polja i za njegovo održavanje ne treba izvor energije, električno



polje površinskih naboja, pomičući naboje, stalno vrši rad te je za njegovo održavanje potreban izvor energije.

Proizlazi da u električkom krugu moraju postojati dva izvora sile koji mogu pokrenuti i zatim održavati naboje u gibanju. Jedan je izvor sile električno polje površinskih naboja, čija radijalna komponenta djeluje u prostoru izvan naprava, dok aksijalna komponenta zbog promjenjive gustoće površinskog naboja duž naprava kruga prouzročuje u njima protjecanje električne struje u krugu. Drugi je izvor sile baterija koja mora održavati električno polje površinskih naboja razdvajajući na svojim priključnicama negativni naboj od pozitivnog naboja<sup>16</sup>. Baterija vrši rad jer silom difuzije, prouzročenom različitom pokretljivošću pozitivnih i negativnih iona (naboja) te postojanjem koncentracijskog gradijenta iona između pozitivne i negativne elektrode, pomiče ione (naboje) u smjeru suprotnom od smjera električnog polja koje djeluje između priključnica baterije<sup>17</sup>.

Rad koji sila difuzije, predočena ekvivalentnim vektorom sile  $\mathbf{F}$  i svedena na jedinicu naboja, vrši na nabojima u električkom krugu usmjerena je skalarna veličina

$$\oint_L \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{rez}} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}, \quad \text{V} \quad (8)$$

i naziva se elektromotorna sila. Pritom je  $\mathbf{E}_{\text{rez}}$  jakost rezultantnog električnog polja,  $\mathbf{E}$  jakost električnog polja površinskih naboja,  $\mathbf{E}_i$  je jakost ekvivalentnog stranog električnog polja koje postoji samo unutar baterije,  $L$  je zatvoreni put duž električkog kruga, dok su sa  $a$  i  $b$  označene priključnice baterije, slika 4. Električno polje  $\mathbf{E}$  je statičko pa je rad tog polja obavljen duž zatvorenog puta  $L$  jednak nuli.

Pretpostavi li se da je baterija idealna, tj. ako je unutar baterije vodljivost beskonačna ( $\sigma = \infty$ ), dobiva se, prema izrazu (1), da je jakost rezultantnog električnog polja u bateriji  $\mathbf{E}_{\text{rez}}$ , a time i sila na naboje u bateriji jednaka nuli, odnosno da je  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \mathbf{E}_i$ . U stvarnosti vodljivost baterije je konačna, što znači da u bateriji mora postojati nenulta vrijednost jakosti rezultantnog polja  $\mathbf{E}_{\text{rez}} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_i \neq \mathbf{0}$ . U tom je slučaju razlika potencijala između priključnica baterije  $a$  i  $b$  (napon baterije) jednaka

$$\Phi_a - \Phi_b = U_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} - \int_b^a \mathbf{E}_{\text{rez}} \cdot d\mathbf{l} \quad (9)$$

<sup>16</sup> Princip rada baterije na vrlo zoran i jednostavan način dan je u literaturi [4, str. 22–7].

<sup>17</sup> Tok naboja (električna struja) podsjeća na tok vode u zatvorenom sustavu cijevi, gdje gravitacijsko polje igra ulogu električnog polja površinskih naboja, a crpka koja diže vodu suprotstavljajući se gravitacijskom polju igra ulogu baterije. Visini na koju crpka diže vodu odgovara napon (razlika potencijala) baterije [6, str. 304].

Prvi član na desnoj strani jednadžbe jednak je, prema (8), elektromotornoj sili baterije  $\mathcal{E}$ , dok drugi član predstavlja rad na jedinicu naboja koji je obavilo resultantno električno polje u bateriji jakosti  $E_{\text{rez}}$  pomičući naboje kroz bateriju od priključnice  $b$  do priključnice  $a$ . U terminima teorije električnih mreža taj je član jednak padu naponu na unutarnjem otporu baterije.

Ukratko, baterija djeluje kao crpka naboja kojom se uspostavlja i održava razlika potencijala (približno) jednaka elektromotornoj sili baterije  $\mathcal{E}$ , čime se održava električno polje površinskih naboja koje prouzročuje električnu struju duž električkog kruga.

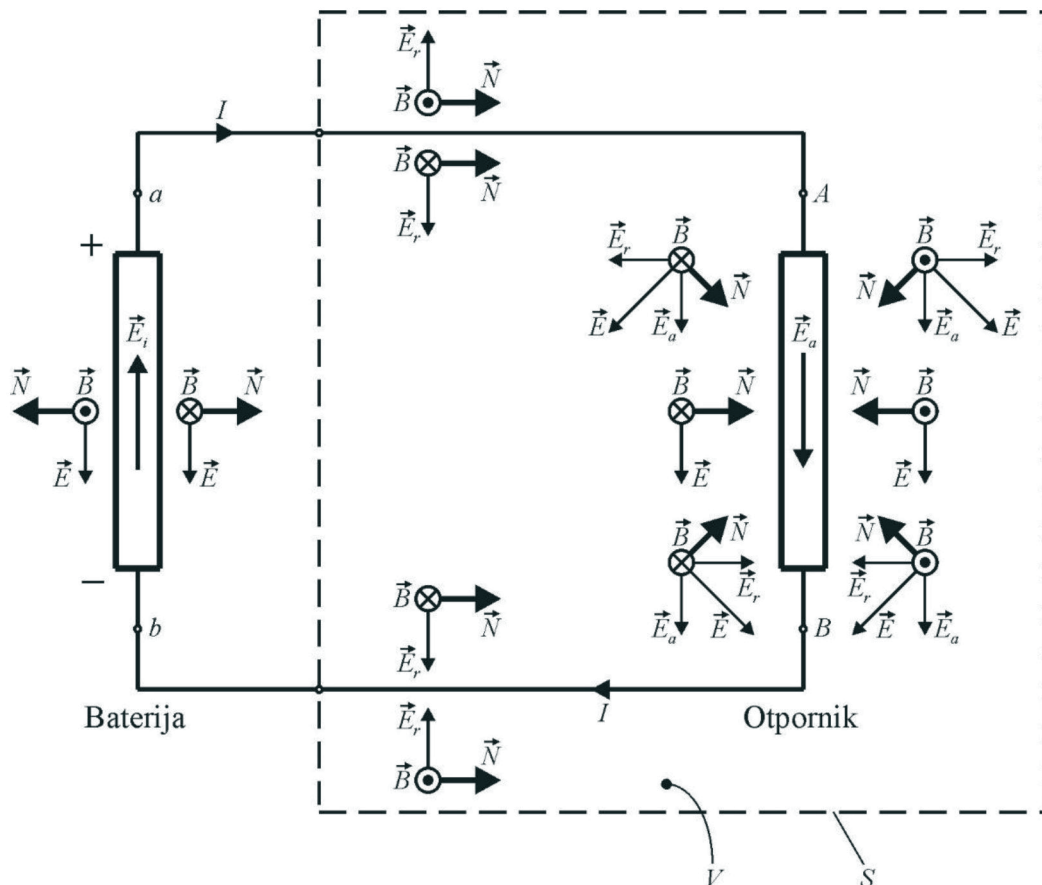
## Objašnjenje prijenosa električne energije elektromagnetskim poljem

Do trenutka uklopa sklopke baterija je razdvajanjem naboja omogućila da na dijelu električkog kruga od negativne priključnice baterije do jednog kontakta sklopke postoji višak elektrona, zbog čega na dijelu električkog kruga od pozitivne priključnice baterije do drugog kontakta sklopke postoji manjak elektrona odnosno višak pozitivnog naboja. Polje površinskih naboja je elektrostatičko, dok je električno polje u vodiču jednako nuli.

U trenutku uklopa sklopke pojavljuje se u vodiču na mjestu spoja sklopke i vodiča električno polje koje prouzročuje pomicanje dotad nepokretnih naboja. Time se mijenja raspodjela površinskih naboja na cijelom električkom krugu tako da se nakon vrlo kratke prijelazne pojave (trajanja nekoliko nanosekunda!) uspostavlja stacionarno električno polje površinskih naboja koje svojom aksijalnom komponentom u cijelom električkom krugu održava istu jakost električne struje [3, str. 732 – 733]. Radijalna i aksijalna komponenta jakosti električnog polja površinskih naboja  $\mathbf{E}$  zajedno sa solenoidalnim poljem magnetske indukcije  $\mathbf{B}$  tvore stacionarno elektromagnetsko polje.

U kvalitativnoj analizi energetske odnosa u ustaljenom stanju pretpostavit ćemo, jednostavnosti radi, da su baterija i vodiči idealni te da je otpornik po cijeloj duljini homogene strukture. Aksijalna komponenta jakosti električnog polja površinskih naboja  $E_a$  u idealnom vodiču jednaka je nuli. Duž obaju vodiča postojat će samo radijalna komponenta jakosti električnog polja površinskih naboja  $E_r$ , koja zajedno s vektorom magnetske indukcije  $\mathbf{B}$  određuje smjer Poyntingova vektora. Poyntingov vektor u prostoru oko vodiča ima samo aksijalnu komponentu  $N_a$ , što znači da energija struji elektromagnetskim poljem oko vodiča od baterije prema otporniku, kako je prikazano na slici 4.

U prostoru oko otpornika postoje i aksijalna i radijalna komponenta jakosti električnog polja površinskih naboja. Na površini otpornika je apsolutna vrijednost aksijalne komponente jakosti električnog polja  $|E_a| = |\mathbf{J}|/\sigma = \mathcal{E}/L_{AB}$ , gdje je  $L_{AB}$  dio zatvorenog puta  $L$  kroz otpornik od priključnice A do priključnice B, i



Slika 4: Smjerovi vektora jakosti električnog polja  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_a$ , vektora magnetske indukcije  $\mathbf{B}$  i Poyntingova vektora  $\mathbf{N}$  na različitim mjestima u prostoru oko baterije, vodiča i otpornika

zatim se s povećavanjem udaljenosti od otpornika smanjuje. Zbog pretpostavljene homogene strukture otpornika količina površinskog naboja linearno se mijenja duž otpornika od najveće pozitivne vrijednosti, tj. od mjesta s najvećim manjkom elektrona, u spojnoj točki A otpornika i vodiča, vrijednosti nula u sredini otpornika do najveće negativne vrijednosti, tj. do mjesta s najvećim viškom elektrona, u spojnoj točki B. Zbog toga se na isti način mijenja i vrijednost radialne komponente jakosti električnog polja  $\mathbf{E}_r$ , slika 4. Na slici se vidi da je Poyntingov vektor  $\mathbf{N}$ , određen vektorima jakosti električnog polja  $\mathbf{E}$  i magnetske indukcije  $\mathbf{B}$ , na svakom mjestu u prostoru oko otpornika usmjeren prema otporniku, što znači da se energija elektromagnetskog polja predaje otporniku.

U kvantitativnoj analizi energetske odnosa uzimamo u obzir da je svaka istosmjerna mreža električki malena mreža, tako da za dio promatranog električkog kruga, prikazanog na slici 4, obuhvaćenog zatvorenom plohom  $S$  vrijedi izraz (7), odnosno da je

$$\mathcal{E}I = -\oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} ds$$

S druge strane, primijeni li se Poyntingov teorem, izraz (3), na isti dio električkog kruga te uzimajući u obzir da je  $\int_V P dV = RI^2$ , gdje je  $R$  otpornost otpornika, dobivamo da je

$$-\oint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} ds = RI^2$$

Uočimo da se smjer jakosti električnog polja  $\mathbf{E}$  u otporniku i okolnom prostoru podudara sa smjerom struje  $I$  u otporniku, što znači da se energija elektromagnetskog polja predaje gibajućim nabojima u otporniku s jakošću toka energije od  $RI^2$ , Ws/s. Smjer jakosti električnog polja  $\mathbf{E}$  u bateriji i okolnom prostoru suprotan je smjeru struje, što znači da se energija predaje elektromagnetskom polju unutar plohe  $S$ . Tu energiju dobavlja baterija s jakošću toka energije jednakom umnošku elektromotorne sile baterije i struje kroz bateriju  $\mathcal{E} \cdot I$ , Ws/s.

Zaključimo: baterija predaje energiju elektromagnetskom polju i njim se kao posrednikom električna energija prenosi prostorom mimo vodiča iz baterije u otpornik gdje se pretvara u toplinsku energiju.

## Zaključna razmatranja

S energetske stanovišta svako elektromagnetsko polje odlikuju dva svojstva: skladištenje energije u električnom polju i u magnetskom polju, izraz (2), i prijenos energije, tj. pojava električne energije, koja se, prema Poyntingovu teoremu, događa u svakoj točki prostora gdje postoji elektromagnetsko polje, a vektori tog polja, vektor jakosti električnog polja  $\mathbf{E}$  i vektor magnetske indukcije  $\mathbf{B}$ , nisu međusobno paralelni, izrazi (4 – 6).

Izvori polja su električno nabijene čestice (naboji). Mirujući naboji mogu stvoriti jedino električno polje, koje ostaje statično ako su naboji zadržani na svojim položajima nekulonovskim silama. Počnu li se, zbog ma kojeg razloga, naboji gibati, stvara se magnetsko polje, koje u zajednici s električnim poljem tvori elektromagnetsko polje i omogućuje prijenos (električne) energije. Pritom je, za u elektrotehničkoj praksi najvažnijoj primjeni – električkim mrežama

električkih uređaja – elektromagnetsko polje, a time i prijenos električne energije, ostvareno posmičnim gibanjem naboja u vodičima.

Ključnu ulogu tijekom prijenosa električne energije u električkim mrežama igraju površinski naboji na vodičima i napravama mreže. Površinski naboji izvor su aksijalne i radijalne komponente jakosti električnog polja. Unutar vodiča (i naprava) djeluje samo aksijalna komponenta jakosti električnog polja površinskih naboja prouzročujući posmično gibanje naboja, tj. električnu struju i posljedično magnetsko polje unutar i izvan vodiča. Izvan vodiča djeluje osim aksijalne komponente i radijalna komponenta jakosti električnog polja površinskih naboja koja zajedno s magnetskim poljem omogućuje prijenos električne energije. Vodiči služe samo da usmjere električnu energiju od izvora energije prema trošilima kako je to pokazano i na analiziranom primjeru jednostavnog istosmjernog električkog kruga.

Električki krug prikazan na slici 4. po strukturi je najjednostavniji mogući električki krug. To, međutim, ne znači i da je objašnjenje načina njegova rada jednostavno. Tako je uobičajeni odgovor na pitanje: “Zašto se otpornik nakon uklopa sklopke grije?”, ako se uopće i može naći u elektrotehničkim udžbenicima, pogrešan. Uobičajeni odgovor, naime, pretpostavlja da je energija koja struji od baterije (izvora energije) prema otporniku (trošilu) neka vrsta nevidljivog bestežinskog fluida koji teče vodičima i napravama kruga, što je, naravno, samo konceptualna metafora i ne smije se shvaćati doslovno.

Ispravan odgovor pretpostavlja poznavanje uloge baterije kao izvora energije te vodiča u procesu prijenosa energije kao i postojanje i poznavanje uloge površinskih naboja u tom procesu, sve iskazano u terminima teorije elektromagnetskog polja. No, ako već i za najjednostavniji mogući električki krug treba poznavati barem osnove teorije elektromagnetskog polja, proizlazi da znatiželjnog početnika – studenta, učenika – treba početi učiti osnove teorije elektromagnetskog polja već u najranijoj fazi njegova uvođenja u svijet elektrotehnike.

U nastavi osnova elektrotehnike to se i radi. U pravilu se u udžbenicima prvo uči elektrostatika, a zatim osnove teorije električkih krugova na primjerima istosmjernih električkih krugova (mreža)<sup>18</sup>. U elektrostatici posebna je pozornost posvećena mirujućim nabojima, Coulombovoj sili, definicijama električnog polja, potencijala i dipola te ponašanju vodiča i dielektrika u elektrostatickom polju. U idućem koraku prelazi se na analizu istosmjernih električkih krugova i uvode se pojmovi napona, struje, elemenata kruga (otpori, kapaciteti, naponski i strujni izvori) te Kirchhoffovi zakoni. U tom se trenutku ne spominjući električno polje površinskih naboja, koje ima sva svojstva elektrostatickog polja kao uzročnika pokretanja naboja u električkim krugovima (mrežama), gubi spona koja logički povezuje elektrostatiku i električke krugove. Naglašava se važnost

<sup>18</sup> Katkad je, uglavnom u starijim udžbenicima, redosljed obrnut.

analize električkih krugova u praksi, jaz između elektrostatičke i električkih krugova produbljuje se, a znatiželjan student (učenik) s pravom se može zapitati: “Zašto sam učio elektrostatičku ako mi ti pojmovi, možda, više neće ni trebati?”

I zaista, u većini primjena, kasnije u praksi, znanja iz elektrostatičke neće mu ni trebati za razumijevanje rada i projektiranje električkih krugova. To je sretna okolnost jer je proračun raspodjele površinskih naboja i pripadnog električnog polja već za vrlo jednostavne konfiguracije naprava iznimno zamršen i teško se provjerava mjerenjima. Također, količine površinskih naboja posve su beznačajne u odnosu na količine naboja u posmičnom gibanju u električkim krugovima i ne utječu nimalo na dimenzioniranje električkih naprava i predviđanje ponašanja električkih krugova.

Zbog toga nije neobično da većina elektrotehničara ni ne zna za odlučujuću ulogu površinskih naboja u prijenosu energije električkim krugovima (mrežama) niti se oni spominju u elektrotehničkim udžbenicima. Poznavanje uloge površinskih naboja te poznavanje Poyntingova teorema neće poboljšati projektiranje električkih uređaja niti na njega utječe. No ono je važno za potpunije razumijevanje rada električkih mreža odnosno za stvaranje na fizici utemeljenih predodžbi o prijenosu energije elektromagnetskim poljem. Epistemološki gledano, možda je zaključno najbolje citirati njemačkog fizičara Maxa Borna, koji je u posve drugačijem kontekstu, ali u cijelosti primjenjivo na shvaćanje elektromagnetskog polja u prijenosu električne energije, napisao [2, str. 145]:

“Ovo je shvaćanje nov korak u smjeru više apstrakcije, u smjeru napuštanja uobičajenih predodžbi, koje su prividno nužni dijelovi predodžbenog svijeta. No istodobno je to i približavanje idealu, da treba samo ono priznati kao sastavni dio izgradnje fizičkog svijeta što je izravno dano iskustvom, a da se uklone sve slike i analogije koje potječu iz nekog stanja primitivnijeg i grubljeg iskustva.”

## Literatura

- [1] Assis, A. K. T., Hernandez: J. A., *The electric force of a current*, C. Roys Keys Inc., Montreal, 2007.
- [2] Born, M.: *Einsteinova teorija relativnosti*, Grafičko nakladni zavod, Zagreb, 1948.
- [3] Chabay, R. W., Sherwood, B. A.: *Matter & Interactions*, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New York, Fourth Edition, 2015.
- [4] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: *The Feynman lectures on physics*, Addison – Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.
- [5] Flegar, I.: *Teorija mreža – Bilješke s predavanja*, Elektrotehnički fakultet Osijek, Osijek, 2001.
- [6] Griffiths, D. J.: *Introduction to electrodynamics*, Pearson Education Inc., Glenview, USA, 2013.

- [7] Haus, H. A., Melcher, J. R.: *Electromagnetic fields and energy*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [8] Jackson, J. D.: Surface charges on circuit wires and resistors play three roles, *American Journal of Physics*, 64, (7), July 1996, pp. 855 – 870
- [9] Jefimenko, O.: *Electricity and magnetism*, Appleton – Century – Crofts, New York, 1966.
- [10] McDonald, K. T.: Alternative forms of Poynting vector (February 25, 2019), <http://physics.princeton/mcdonald/poynting-alt.pdf>
- [11] Moreau, W. R.: Charge distributions on DC circuits and Kirchhoff's laws, *European Journal of Physics*, 10, 1989., pp. 286 – 290
- [12] Muckenfuss, H., Walz, A.: *Neue Wege im Elektrikunterricht*, Aulis Verlag, Köln, 1997.
- [13] Rosser, W. G. V.: *Interpretation of classical electromagnetism*, Springer-Science+Bussines media, B. V., Dordrecht, 1997.
- [14] Serway, R. A., Jewett, J. W.: *Physics for scientists and engineers with modern physics*, Brooks / Cole, Boston, 2014.
- [15] Sommerfeld, A.: *Electrodynamics: Lectures on theoretical physics*, Vol. III., Academic Press, New York, 1952.

## On electrical energy

*Ivan Flegar*

**Abstract:** Each electrical network transfers energy by the electromagnetic field generated by the drift motion of electrically charged particles (charges) in conductors and devices of the electrical network. In electrical engineering the energy transferred by electromagnetic field is known as electrical energy. By using the local conservation law of energy in electromagnetic fields, it is shown that electrical energy – energy transfer by the electromagnetic field – appears in each electrical network at any place in the space surrounding the electrical network where the vectors of electric field strength and magnetic induction both exist and are not parallel one to another. On an example of a dc circuit consisting of a battery, conductors and a resistor it is shown that the real understanding of the mechanism of energy transfer even in a such simple circuit is not possible if the existence of surface charges on conductors and on the resistor is not taken into account.

**Keywords:** electrical energy, electromagnetic field, Poynting theorem, surface charges

