Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Danilo Blanuša

Promjenjiva elektromagnetska polja

Sveučilište u Osijeku ovom publikacijom pridružuje se Svjetskoj proslavi 100. obljetnice Einsteinovog otkrića teorije relativnosti (1905). Posebno nas veseli, da je profesor Blanuša, rođeni Osječanin, bio desetljećima vodeći znanstvenik u tom području, koji je na našim prostorima to znanje zastupao, pridonosio mu i prenosio na nas.

Priredio: **Ivan Ivanšić**

Osijek, 2006.

Prof. dr. sc. Danilo Blanuša

Izdavač:
Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku

Urednik:
prof. dr. sc. Ivan Ivanšić, Fakultet elektrotehnike i računarstva,
Sveučilište u Zagrebu

Recenzenti:
prof. dr. sc. Davor, Butković, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku
prof. dr. sc. Željko Štih, Fakultet elektrotehnike i računarstva,
Sveučilište u Zagrebu

CIP – Katalogizacija u publikaciji
Gradska i sveučilišna knjižnica, Osijek

UDK 621.317.3(537.8)

BLANUŠA, Danilo
Promjenjiva elektromagnetska polja/
Danilo Blanuša; priredio Ivan Ivanšić. –
Osijek : Sveučilište J. J. Strossmayera,
Odjel za matematiku, 2006.

Kazalo.

ISBN 953–6931–17–6

460406001

Ovaj udžbenik objavljuje se uz suglasnost Senata Sveučilišta J. J. Strossmayera
u Osijeku pod brojem 16/06

© Danilo Blanuša, 2006.

Tisak: Grafika d.o.o., Osijek

O autoru

Danilo Blanuša, dugogodišnji profesor Tehničkog fakulteta u Zagrebu, a potom Elektrotehničkog fakulteta, rodio se 7.12.1903. godine u Osijeku – donji grad Široka ulica br. 9. Profesor Danilo Blanuša umro je dana 8.8.1987. god. u Stubičkim Toplicama. Kao dijete oficira školovao se u mjestima službe svoga oca. Tako je osnovnu školu pohađao od 1909.-1913. godine u tri mjesta: Beču, Steyru (Gornja Austrija) i Zagrebu. Slično je i s pohađanjem gimnazije od 1913.-1921. Započeo je s realnom gimnazijom u Zagrebu, da bi od 6. do 8. razreda nastavio u Osijeku. Maturirao je 1921. godine u Osijeku na realnom odjelu. Još se jednom vraćao u Osijek 1925. god. kada je položio dopunski[1] ispit zrelosti iz latinskog jezika na gimnazijskom odjelu realne gimnazije u Osijeku. Školske godine 1921./1922. započeo je studij elektrotehnike na Tehničkoj visokoj školi u Zagrebu da bi sljedeće školske godine nastavio studij na Technische Hochschule in Wien, gdje je 1925. god. položio I. državni ispit, a 1934. godine II. državni ispit (diploma) iz elektrotehnike postigavši državno priznatu titulu "Ingenieur (Ing.)". Svojoj prirođenoj sklonosti za teorijska razmatranja i matematiku udovoljavao je tako da je izvanredno slušao i polagao različite teorijski orijentirane predmete iz matematike, fizike i tehnike. Time je njegov studij u Beču potrajao do 1934. god. pri čemu je stekao vrlo široko znanje iz bliskih područja: elektrotehnike, fizike i ponajviše iz matematike.

Zaposlio se 25.10.1934. god. u Gradskoj električnoj centrali u Zagrebu i to kao volonter u pogonu centrale, gdje od 1.4.1935. god. radi kao pogonski elektroinžinjer. Od 1.6.1937. god. premješten je u baždarnicu električnih brojila iste tvrtke, gdje je od 1.8.1941. god. do 1.2.1944. god. bio šef odjela. Pored te dužnosti bila mu je povjerena briga za stručno obrazovanje tehničkog osoblja, pa je održao nekoliko tečajeva za tehničko osoblje Gradske električne centrale.

Istovremeno se u slobodno vrijeme bavio istraživanjem Besselovih funkcija izradivši doktorsku disertaciju čisto matematičkog karaktera, a motivaciju je našao u rješavanju telegrafske jednadžbe. Dana 12.2.1943. god. obranio je na Tehničkom[2] fakultetu u Zagrebu disertaciju pod naslovom "Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija". Promoviran je 16.6.1943. god. Habilitacijskom postupku pristupio je 17.12.1943. god. na Tehničkom fakultetu s pokusnim predavanjem pod

[1] Uvjet za postizanje diplome
[2] Kao diplomirani inženjer nije mogao doktorirati na Mudroslovnom fakultetu.

naslovom “Matematika i njen odnos spram tehnike i prirodnih znanosti”.

Postavljenje za izvanrednog profesora na Tehničkom fakultetu uslijedilo je 1.2.1944. god., a 30.6.1945. god. je razriješen službe[3]. Ponovno priznanje doktorske diplome i habitacije uslijedilo je 25.9.1946. god., pa je 1.11.1946. god. postavljen za honorarnog nastavnika predmeta “Matematika za arhitekte i kemičare” na Tehničkom fakultetu. Danom 1.4.1947. god. ponovno je postavljen za izvanrednog profesora na Tehničkom fakultetu za predmet Viša matematika.

Šk. god. 1947./1948. uveden je na Tehničkom fakultetu predmet “Teorijska elektrotehnika” za studente elektrotehničkog odsjeka. Na prijedlog profesora Josipa Lončara predavanja iz tog predmeta povjerena su Blanuši. To je na honorarnoj osnovi predavao tijekom dviju školskih godina, pa ga možemo smatrati začetnikom predavanja iz teorijske elektrotehnike na Zagrebačkom sveučilištu. Kako se nastava matematike širila, to je predmet Teorijska elektrotehnika preuzeo drugi nastavnik.

Za redovitog profesora Tehničkog fakulteta postavljen je 31.10.1947. god. Diobom Tehničkog fakulteta na više fakulteta, nastavio je danom 1.7.1956. god. raditi na novoosnovanom Elektrotehničkom fakultetu, u istom zvanju u kojem je ostao sve do umirovljenja 31.1.1975. god. Na fakultet je dolazio redovito doklegod mu je zdravlje dozvoljavalo.

Raspolažući raznolikim teorijskim znanjem, lakoćom je predavao različite matematičke predmete, kao i teorijski orijentirane sadržaje fizike i elektrotehnike. Bio je vrstan poznavalac teorije relativnosti što je ugradio i u ovu knjižicu.

Tekst koji objavljujemo predstavlja šapirografirani rukopis, a našao sam ga u njegovom uredu nakon smrti i nisam znao za postojanje istog prije Blanušine smrti. Nažalost, tekst nema datuma i pretpostavljam da potječe iz vremena kada je predavao teorijsku elektrotehniku ili pripada vremenu kada je na Institutu Ruđer Bošković započeo postdiplomski studij. Razgovarao sam s više učesnika i jednog i drugog, no nitko se ne sjeća šapirografiranog materijala na tim predavanjima. Vjerojatno je kratkoća predavanja predmeta Teorijska elektrotehnika potisnula u drugi plan ovaj tekst, a time i u zaborav. Radi se o fundamentalnom znanju iz elektrotehnike, koje je kvalitetno napisano na hrvatskom jeziku. Kolege s Odjela za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, doznavši da takav rukopis postoji, prihvatili su se objavljivanja istog, kako bi ta znanja učinili dostupnim našim studentima, ljubiteljima znanosti i široj javnosti. Tekst je objavljen u izvornom obliku, a kako je to ponajviše tekst matematičke naravi, to je aktualan kao i kada je bio napisan.

IVAN IVANŠIĆ, *Zavod za primijenjenu matematiku*, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Unska 3, P.O. Box 148, 10001 Zagreb, Croatia, e-mail: `ivan.ivansic@fer.hr`

---

[3]Razlog razrješenja od službe bio je opoziv svih postavljenja i akademskih naslova postignutih tijekom rata

Predavanja profesora Danila Blanuše o elektromagnetizmu

Mobilis in mobili
J. Verne: Vingt Mille lieues sous les mers

Rukopis *Promjenljiva elektromagnetska polja*, koji je nađen u ostavštini profesora Blanuše, je vjerojatno nastao uz kolegij *Teorijska elektrotehnika*, koji je autor držao na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu u akademskim godinama 1947/48. i 1948/49, a možda i uz predavanja koja je nešto kasnije profesor Blanuša držao na Institutu Ruđer Bošković. Rukopis je priredio za tisak profesor Ivan Ivanšić, koji je dodao uvod *O autoru*, *Pregled formula* i *Indeks*.

Blanušin rukopis daje prikaz teorije elektromagnetskih pojava polazeći od Maxwellovih jednadžbi i analizirajući njihovo značenje i doseg. Već se na početku navodi da te jednadžbe ne obuhvaćaju gibanje slobodnih naboja u vakuumu, te da teoriju treba u tom smislu nadopuniti Lorentzovom teorijom elektrona. Tom je pitanju posvećeno poglavlje "Jednadžbe za slučaj slobodnih naboja u vakuumu". I kod komentara prijelaznih pojava, valnih jednadžbi, u uvođenju potencijala i kod raznih zanemarenja zadržana je jasnoća i točnost izlaganja. Blanuša nikad ne gubi smisao formalnih računa ni rezultata važnih u primjenama. Vrlo rano se u tekst uvode telegrafske jednadžbe koje vrijede za električno i magnetsko polje, ali i za vektorski potencijal i za Hertzov vektor, a zgodnije su za račune od Maxwellovih jednadžbi.

Retardirane potencijale Blanuša definira u poglavlju "Statički i retardirani potencijali", nakon više stranica uvoda i nakon analize polja točkastih naboja. Kod određenih usrednjenja Blanuša upozorava da egzaktni dokaz dolazi kasnije; naime, oblik se pojedinih izraza često može pogoditi iz heurističkih razmatranja. Novi se pojmovi uvode pažljivo i potkrepljuju detaljnim izvodima. Tako se definiraju plošni naboji, plošne struje, gustoća snage, struja energije i Poyntingov vektor. Dokazuje se međutim i da koncepcija izoliranog vremenski promjenljivog naboja u okviru Maxwellove teorije nije moguća. Sve je navedeno sadržano u prvih šest poglavlja, koje možemo smatrati osnovnim, a koja predstavljaju otprilike trećinu teksta.

Drugu trećinu teksta zauzima poglavlje nazvano "Relativistička transformacija elektromagnetskog polja". Ono obrađuje relativističku transformaciju elektromagnetskog polja, vezanu za Blanušin životni interes, teoriju relativnosti. Prema popisu Blanušinih publikacija iz [4], Blanuša se još jednom, godine 1969, vratio na pitanje kojim se bavi u tom poglavlju. No, članak u *Elektrotehnici* [3] je neznatno kraćena verzija tog poglavlja.

Blanuša počinje od principa klasične mehanike i ravnopravnosti inercijalnih koordinatnih sustava, koji se jedan prema drugom kreću konstantnom brzinom.

On iz toga izvodi vremenske i prostorne transformacije, ali ne razvija relativističku kinematiku (za što upućuje čitaoca na svoj članak [2]), nego dobiva transformacije koje su općenitije od Galilejevih. One sadrže jednu neodređenu konstantu. Tu bi konstantu trebalo odrediti eksperimentom, no mehanički pokusi koji bi se proveli u tu svrhu nisu dovoljno točni. Međutim, eksperimenti sa svjetlom, koje je elektromagnetski val, daju s velikom točnošću rezultat, da Maxwellove jednadžbe vrijede tj. imaju isti oblik u svim inercijalnim sustavima. Blanuša uz mehaničke principe uvodi još dva principa vezana za elektromagnetsko polje. Prvi je *invarijancija superpozicije*, što znači da je transformacija superpozicije dvaju polja superpozicija transformiranih polja. Drugi je *neprekidnost transformacije*. Iz toga slijedi da transformacija polja mora biti linearna. Kako u vakuumu Maxwellove jednadžbe vode na d'Alembertovu valnu jednadžbu, iz invarijantnosti ove posljednje proizlazi da Galilejeve transformacije ne vrijede za elektromagnetizam. Transformacije koje daju invarijantnost Maxwellovih jednadžbi prvi je našao Hendrik Lorentz, ali ih nije proširio do univerzalnog principa prostorno-vremenskih transformacija sveukupnog fizičkog svijeta.

U nastavku Blanuša dokazuje jedinstvenost tako dobivene Lorentzove transformacije. U stvari, dokazuje se jedinstvenost transformacije koja ostavlja invarijantnim Maxwellove jednadžbe pod općenitim uvjetima. Blanuša analizira pojedine veze matematičkog modela i fizike, npr. prijelaz desnog na lijevi koordinatni sustav. Kod toga treba obrnuti smjer magnetskog polja, što je jednostavna, ali netrivijalna činjenica, koju Blanuša objašnjava fizikalnim i matematičkim argumentima. Najzanimljivije su pojave koje direktno ili posredno slijede iz relativističkih principa. Blanuša pokazuje da transformacije polja koje dobiva za sustave u gibanju ispravno predviđaju napon u žici koja se pomiče u magnetskom polju. Važna je formula za silu koja djeluje na naboj u gibanju: osim električnog polja, okomito na smjer gibanja djeluje i magnetsko polje. To je tzv. *Lorentzova sila.* Blanuša iz Lorentzove teorije elektrona prvo izvodi invarijantnost naboja. Nakon toga ulazi u kinematička razmatranja opisujući elastični sraz, a ispituje i drugi Newtonov zakon uz pretpostavku da masa nije konstantna. Rezultat je invarijantnost tlaka s obzirom na Lorentzove transformacije, iz čega izlazi formula za Lorentzovu silu. Na tu ćemo se formulu još vratiti, ali u vezi s tim je važno pogledati Blanušin članak u *Elektrotehnici* [3].

Članak je očito nastao nakon rukopisa, jer su neke oznake pojednostavljene, a osim toga su izbačeni komplicirani dijelovi teksta: s obzirom na rukopis izostavljen je dio o d'Alembertovom operatoru i o invarijantnosti tlaka. Zaključak na kraju članka je obrazložen na drugi način, pozivajući se na relativističku mehaniku. U članku se navodi da se sadržaj oslanja na predavanja koja je Blanuša držao 1957. godine u Društvu inženjera i tehničara, pa konačna redakcija rukopisa vjerojatno potječe iz tog vremena.

Posljednja dva poglavlja tretiraju važne teorijske probleme, ključne u primjenama. Poglavlje posvećeno Hertzovom oscilatoru daje temelj za matematičke modele antenskog zračenja. Formule, koje se kod toga izvode, mogu se naći (kako to citira autor) u Lončarovim *Osnovama elektrotehnike* [8] (II., str. 343. i 345.).

Posljednje poglavlje obrađuje prijenos signala i energije vodovima. U tom poglavlju nalazimo matematički aparat kojim je Blanuša suvereno vladao: Besselove funkcije, Fourierov integral, Diracovu funkciju, Laplaceovu transformaciju, itd. U vezi upliva diskontinuiteta na Fourierov spektar, Blanuša citira svoj rad [1] iz 1942. U nekim izrazima iz tog poglavlja prepoznajem formule s kojima sam se mučio god. 1955/56. i 1956/57., kad sam slušao kolegije *Teoretske osnove dojavne tehnike* i *Vodovi dojavne tehnike*.

Zadržao sam se posebno na poglavlju "Relativistička transformacija elektromagnetskog polja", jer mislim da predstavlja sveobuhvatni i originalni prikaz relativističke elektrodinamike, dan s maksimalnom jasnoćom uz minimalna sredstva. Nastavnik koji je od Blanuše naslijedio kolegij (profesor T. Bosanac) bio je orijentiran na anglosaksonsku literaturu, pa je u vrijeme kad sam slušao Teoretsku elektrotehniku kultna knjiga bila Strattonova monografija [10]. Standardna materija koja se predavala nije obuhvaćala kratki dio o Lorentzovim transformacijama (str. 74-82), pa sam tek kasnije shvatio Strattonov komentar na Lorentzovu silu tj. jednadžbe koje Blanuša ima pod brojevima 582 i 583, a na str. 80 Stratton pod brojem 112.:

The implication of these results is striking indeed: the electronic and magnetic fields E and B have no independent existence as separate entities.

Rečenica djeluje kao parafraza poznate programske tvrdnje Hermanna Minkowskog, koju je Blanuša u [5] citirao i na njemačkom originalu (str. 242):

Von Stund an sollen Raum und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.

Blanuša je navedene formule komentirao manje dramatično, ali korisnije za čitatelje:

Dodatna sila, koja potječe od magnetskog polja i okomita je na smjer gibanja, nije dakle posljedica nekog zasebnog prirodnog zakona, već je posljedica Maxwellovih jednadžbi i principa relativnosti.

Na kraju ću spomenuti i udžbenike, objavljene ili dopunjene četrdesetih ili pedesetih godina prošlog stoljeća, kad sam po njima učio, a kad su nastala i Blanušina predavanja. To je npr. Tammov ruski udžbenik [11]. On je pregledno napisan, a po sadržaju bi spadao negdje između Lončarovih udžbenika [8] i Teorijske elektrotehnike. Prvo izdanje je tiskano čak 1929. godine, a znatno je prerađeno 1944. i 1954. Posljednja je prerada, prema priznanju autora, uklonila (na sugestiju poznatog fizičara L. D. Landaua) netočnosti u tenzorskom tretiranju dielektrika u gibanju (str. 10). U toj je knjizi relativističko tretiranje elektromagnetizma osmo, posljednje poglavlje. Relativizacija podjele na električno i magnetsko polje dolazi na sam kraj (str. 560-565). Moram reći da su danas te ideje već ušle i u srednjoškolske udžbenike fizike. Udžbenik N. Cindra [6] ima zgodni prikaz tih koncepcija na str. 217-221.

Druga monografija s kojom vrijedi usporediti kratku Blanušinu knjižicu je možda najcitiranija takva knjiga na svijetu, kapitalno Jacksonovo djelo *Classical Electrodynamics* od preko 800 stranica [7]. Prvo izdanje je tiskano 1962. godine, dakle barem pet godina nakon što je Blanuša pisao svoj tekst. Monografija je dvaput temeljito prerađena: 1974. godine i 1998. godine. Jackson smatra da je prvih devet (eventualno deset) poglavlja nešto što bi morao savladati dodiplomski student *fizike* (!). Specijalna teorija relativnosti je izložena u poglavljima 11. i 12. (str. 514-578. trećeg izdanja). U prvom izdanju se uvodila Lorentzova transformacija iz kinematike. U drugom su izdanju poglavlja 11. i 12. ponovno napisana (*rewritten almost completely*) polazeći od elektromagnetizma, što Blanuša ima od početka. Ta su poglavlja ostala bez bitnih izmjena u trećem izdanju, gdje su ponovno napisana poglavlja nakon 12-og, u skladu s razvojem elektronike i kvantne fizike. Ne ulazeći u detalje iscrpnog Jacksonovog prikaza treba primijetiti da uglavnom slijedi tradiciju: postulira se ravnopravnost inercijalnih sustava i invarijantnost brzine svjetla. No, na str. 518. sljedeći se rezultat pripisuje Merminu [9]:

...the general structure of the Lorentz transformation can be deduced from the first postulate alone, plus some obvious assumptions, without reference to the speed of light, except as the empirical parameter that distinguishes the transformation from the Galilean.

Zvuči poznato, zar ne!?

Literatura

[1] D. Blanuša, *Upliv diskontinuiteta neke funkcije i njenih derivacija na njezin Fourierov spektar*, Rad Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti **274**(1942), 273–285.

[2] D. Blanuša, *Osnovi relativističke kinematike*, Glasnik Mat. Fiz. i Astr., Ser. II., **6**(1951), 1–32.

[3] D. Blanuša, *Relativistička transformacija elektromagnetskog polja*, Elektrotehnika **12** (br. 3.) (1969), 193–204.

[4] *Danilo Blanuša na raskrižju matematike, fizike i elektrotehnike*, priredio Ivan Ivanšić, Zagreb, FER-Element, 2005.

[5] M. Born, *Einsteinova teorija relativnosti i njezini fizički osnovi*, preveo i dodatkom i bilješkama nadopunio D. Blanuša, Zagreb, 1948.

[6] N. Cindro, *Fizika 2, Elektricitet i magnetizam*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[7] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Third Edition, John Wiley & Sons, 1999.

[8] J. Lončar, *Osnovi elektrotehnike;* knjiga prva, Zagreb, 1942; knjiga druga, Zagreb, 1946.

[9] N. D. Mermin, *Relativity without light*, Am. J. Phys. **52**, 119–124 (1984).

[10] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGrow-Hill, N.Y. and London, 1941.

[11] И. Е. Тамм, Основы теории електричества, издание седьмое, Гос. Изд. Техн. Теор. Лит., Москва, 1957.

D. Butković, *Odjel za matematiku*,
Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku,
e-mail: `dbutkovic@gmail.com`

Sadržaj:

1 Maxwellove jednadžbe

Osnovni zakoni elektromagnetskog polja sadržani su u Maxwellovim jednadžbama,[4] kojih ima četiri, dvije glavne, naime

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{G}, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

i dvije sporedne

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0. \tag{4}$$

Osim toga vrijede između $\vec{D}$ i $\vec{F}$, $\vec{B}$ i $\vec{H}$ te $\vec{G}$ i $\vec{F}$ relacije

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{F}, \tag{5}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \tag{6}$$

$$\vec{G} = \varkappa\vec{F}, \tag{7}$$

pri čemu je ε dielektrička konstanta, μ permeabilnost i $\varkappa$ vodljivost dotične tvari, u kojoj se promatra elektromagnetsko polje. Obično se stavlja

$$\varepsilon = \varepsilon'\varepsilon_0, \tag{8}$$

$$\mu = \mu'\mu_0, \tag{9}$$

gdje su ε_0, μ_0 dielektrička konstanta i permeabilnost za vakuum, a ε' i μ' se zovu relativna dielektrična konstanta i relativna permeabilnost za dotičnu tvar.

Maxwellove jednadžbe (1) i (2) mogu se lako dovesti u integralni oblik. Zamislimo li neku plohu S obrubljenu zatvorenom krivuljom, to možemo lijevu i desnu stranu jednadžbe (1) skalarno pomnožiti s vektorskim elementom plohe $\vec{df}$. To je vektor okomit na plohu, kojemu je iznos jednak površini df dotičnog plošnog elementa. Svi su ti vektorski elementi površine orijentirani na jednu stranu plohe. Kada je ta orijentacija odabrana, dajemo rubnoj krivulji pozitivni smisao obilaženja.

[4] James Clerk Maxwell (1831.-1879.)

Da se taj odredi, zamislimo jedan $\vec{df}$ blizu ruba. S njegova vrška gledano treba da obilaženje ruba bude obrnuto od kazaljke na satu. Integrirajmo sada s $\vec{df}$ skalarno pomnoženu lijevu i desnu stranu jednadžbe (1) preko te plohe S. Izlazi

$$\int\int_S \operatorname{rot}\vec{H}\vec{df} = \int\int_S \left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{G}\right)\vec{df}. \tag{10}$$

Desna strana se sastoji iz toka provodne struje $\int\int_S \vec{G}\vec{df}$ i toka pomačne struje $\int\int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\vec{df}$ ($\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ zove se gustoća pomačne struje). Lijeva strana se može pomoću Stokesova teorema izraziti kao integral po zatvorenoj rubnoj krivulji;

$$\int\int_S \operatorname{rot}\vec{H}\vec{df} = \oint \vec{H}\vec{ds}. \tag{11}$$

Integracija je izvršena u gore određenom pozitivnom smislu obilaženja, tj. $\vec{ds}$ je vektor koji ima smjer tangente orijentirane u tom pozitivnom smislu, a iznos mu je jednak duljini ds elementa krivulje. Desna strana (11) zove se magnetski obilazni napon. Jednadžba (10) taDko dobiva oblik

$$\oint \vec{H}\vec{ds} = \int\int_S \left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{G}\right)\vec{df}, \tag{12}$$

gdje je lijeva strana obilazni magnetski napon, a desna strana zbroj toka provodnih struja i toka pomačnih struja. Taj se zakon zove **poopćeni zakon protjecanja** i predstavlja integralni oblik prve Maxwellove jednadžbe. Kod stacionarnih ili kvazistacionarnih procesa pomačne su struje jednake nuli ili se mogu zanemariti, pa se dobiva obični zakon protjecanja.

Sasvim analogan postupak se može primjeniti na jednadžbu (2), pa se dobiva najprije

$$\int\int_S \operatorname{rot}\vec{F}\vec{df} = -\int\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\vec{df} = -\frac{\partial}{\partial t}\int\int_S \vec{B}\vec{df}, \tag{13}$$

a prema Stokesovu teoremu je

$$\int\int_S \operatorname{rot}\vec{F}\vec{df} = \oint \vec{F}\vec{ds}. \tag{14}$$

Integralni oblik druge Maxwellove jednadžbe dakle glasi

$$\oint \vec{F}\vec{ds} = -\frac{\partial}{\partial t}\int\int_S \vec{B}\vec{df} \tag{15}$$

i poznat je kao **zakon indukcije**. Na lijevoj strani je inducirani obilazni električki napon, na desnoj strani negativna brzina rasta magnetskog toka.

Može se dakako, i obrnuto iz integralnog oblika jednadžbi dobiti diferencijalni oblik (1) i (2). U tu svrhu treba primjerice jednadžbu (12) pomoću Stokesovog teorema (11) najprije dovesti u oblik (10). Pišimo ovu potonju u obliku

$$\int\!\!\int_S \left(\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{G}\right) d\vec{f} = 0, \tag{16}$$

prebacivši sve na lijevu stranu i pod zajedničku integraciju. Integrand, tj. izraz u okrugloj zagradi, znači vektor, za koji možemo pretpostaviti da je neprekinuta funkcija mjesta. Ako onda (16) treba da vrijedi za ma koju obrubljenu plohu, onda se može zaključiti da integrand mora biti svagdje jednak nuli. Zaista, zamislimo da nije tako. Označimo integrand za trenutak s $\vec{A}$, tj. stavimo

$$\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{G} = \vec{A} \tag{17}$$

i pretpostavimo da taj vektor $\vec{A}$ ima u nekoj točki P od nule različit iznos, tj. da je $A = |\vec{A}| > 0$ (Iznos je uvijek ≥ 0). Odaberimo tu točku P za ishodište koordinatnog sustava i položimo pozitivnu z-os u smjer vektora $\vec{A}$, a okomito na to ravninu (x, y). Odaberimo kao rubnu krivulju malu kružnicu

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{18}$$

u ravnini (x, y), a kao plohu dio (x, y)-ravnine unutar te kružnice. Taj dio plohe neka se zove K. Vektorski element plohe $d\vec{f}$ neka je orijentiran u smjeru pozitivne z-osi. Onda je

$$\vec{A}d\vec{f} = A_x df_x + A_y df_y + A_z df_z = A_z df, \tag{19}$$

jer je $df_x = df_y = 0$ i $df_z = df$. Vrijedi dakle

$$\int\!\!\int_K \vec{A}d\vec{f} = \int\!\!\int_K A_z df. \tag{20}$$

U ishodištu je $A_z = A$, dakle $A_z > 0$, jer je $A > 0$. Zbog neprekinutosti funkcije $A_z(x, y, z)$ (s vektorom $\vec{A}$ su sve njegove komponente neprekinute) možemo polumjer kružnice odabrati tako malen, da je unutar cijele kružnice još uvijek $A_z > 0$. No onda dobivamo

$$\int\!\!\int_K A_z df > 0, \tag{21}$$

a to se protivi (16), koja s obzirom na (17) i (20) traži

$$\int\!\!\int_K A_z df = 0. \tag{22}$$

Pretpostavka da je $A > 0$ u nekoj točki vodi dakle na protivrječje, tj. vrijedi $\vec{A} = \vec{0}$ ili

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{G} = \vec{0}, \tag{23}$$

što je ekvivalentno s (1).

Analognim se zaključivanjem dobiva iz zakona indukcije (15) jednadžbu (2). Zaista su dakle diferencijalni i integralni oblici Maxwellovih jednadžbi ekvivalentni. I jednadžbe (3) i (4) mogu se, pomoću Gaussova teorema dovesti u integralni oblik, u što ovdje ne ulazimo.

2 Valne jednadžbe i elektromagnetski potencijali

Maxwellove jednadžbe ne obuhvaćaju sve pojave elektromagnetizma, napose ne obuhvaćaju gibanje slobodnih naboja u vakuumu. Zaista, gibanje elektriciteta se u tim jednadžbama očituje samo u postojanju gustoće struje $\vec{G}$, koja je u vezi s poljem $\vec{F}$ prema (7). Dakle, ako je $\varkappa = 0$, u izolatoru, nema provodnih struja i električki naboji, ako ih ima, fiksirani su na svome mjestu. U vakuumu moramo također staviti $\varkappa = 0$, jer samo postojanje polja $\vec{F}$ ne izaziva struju, ali slobodni naboji bi se ovdje pomicali pod utjecajem polja $\vec{F}$ i $\vec{H}$. Da to uzmemo u obzir, valjalo bi posegnuti za jednadžbama Lorentzove teorije elektrona, koje zahvaćaju i u pojave u atomarnim dimenzijama, a iz njih se Maxellove jednadžbe za makroskopske pojave u raznim medijima dobivaju, pod izvjesnim pretpostavkama, prikladnom tvorbom srednjih vrijednosti atomarnih polja.

Na ovom mjestu se zadovoljavamo Maxwellovim jednadžbama, pa ćemo, ako se radi o vakuumu, pretpostaviti da nema naboja, dakle, da je u vakuumu $\rho = 0$.

Pozabavit ćemo se sada napose sa slučajem, da se elektromagnetsko polje promatra u **homogenom mediju**, gdje su dakle ε, μ, $\varkappa$ – konstante. U tom se slučaju jednadžbe (1) do (4) mogu drukčije napisati, ako za $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{G}$ uvrstimo izraze (5), (6), (7) i držimo na umu da se ε, μ, $\varkappa$ kod deriviranja ponašaju kao konstante. Dobivamo

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \varkappa\vec{F}, \tag{24}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \tag{25}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\rho}{\epsilon}, \tag{26}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0. \tag{27}$$

Pokušat ćemo sada iz (24) i (25) izvesti diferencijalne jednadžbe, u kojima se pojavljuje samo po jedan od vektora $\vec{F}$ i $\vec{H}$. Tvorimo u (24) lijevo i desno rotor i uočimo, da se operacije rot i $\frac{\partial}{\partial t}$ mogu izmjeniti:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{F} + \varkappa\operatorname{rot}\vec{F}. \tag{28}$$

Uvrstimo li sada za $\operatorname{rot}\vec{F}$ izraz iz (25):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \varkappa\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}. \tag{29}$$

Dalje znamo da vrijedi

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla(\nabla\vec{H}) - (\nabla\nabla)\vec{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} - \nabla^2\vec{H} \tag{30}$$

ili zbog (27)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = -\nabla^2\vec{H}. \tag{31}$$

Napomenimo još da u kartezijskim pravokutnim koordinatama za **Laplaceov operator**[5] $\triangle = \nabla^2$ vrijedi

$$\triangle = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{32}$$

dakle,

$$\nabla^2\vec{H} = \triangle\vec{H} = \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial z^2}. \tag{33}$$

Dobivamo konačno iz (29) i (31)

$$\nabla^2\vec{H} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t} + \varkappa\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}. \tag{34}$$

To je **poopćena valna jednadžba** koja se katkada naziva i **telegrafska jednadžba**, jer je po svom obliku analogna telegrafskoj jednadžbi koja se u elektrotehnici upotrebljava za prijenosne vodove, a i u uskoj vezi je s njom. O telegrafskim jednadžbama za vodove će biti opširnije govora kasnije.

Ako je $\varkappa = 0$, dakle za slučaj elektromagnetskih pojava u homogenom izolatoru, jednadžba (34) se pojednostavljuje na

$$\nabla^2\vec{H} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}, \tag{35}$$

što se zove (obična) **valna jednadžba** ili **d'Alembertova jednadžba**[6]. U vakuumu se može $\varepsilon\mu$ zamjeniti s $\frac{1}{c^2}$, jer u vakuumu $\varepsilon\mu$ ima tu vrijednost.

Za statička magnetska polja sve su derivacije po vremenu jednake nuli, pa izlazi

$$\nabla^2\vec{H} = \vec{0}, \tag{36}$$

a to je **Laplaceova jednadžba**.

Primijenimo dalje operaciju rot na obje strane jednadžbe (25). Dobivamo

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} \tag{37}$$

[5] Pierre Simon Laplace (1749.-1827.)
[6] Jean le Rond d'Alembert (1717.-1783.)

ili, zbog (24)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2} - \varkappa\mu\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}. \tag{38}$$

No $\vec{F}$ (kao svaki vektor) zadovoljava (30), pa s obzirom na (20) vrijedi

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \nabla^2\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\rho - \nabla^2\vec{F}, \tag{39}$$

tj. (38) postaje

$$\nabla^2\vec{F} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2} + \varkappa\mu\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\rho. \tag{40}$$

Ako nema naboja, tj. za $\rho = 0$, i ovo je **telegrafska jednadžba** oblika (34), naime

$$\nabla^2\vec{F} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2} + \varkappa\mu\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}. \tag{41}$$

Za $\varkappa = 0$ opet izlazi **valna** ili **d'Alembertova** jednadžba

$$\nabla^2\vec{F} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}. \tag{42}$$

Za statička električna polja u izolatoru jednadžba (40) daje

$$\nabla^2\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\rho, \tag{43}$$

a kada nema naboja, izlazi

$$\nabla^2\vec{F} = \vec{0}. \tag{44}$$

Jednadžba (43) je **Laplace-Poissonova jednadžba**[7] za vektor $\vec{F}$, a (44) je opet **Laplaceova jednadžba**.

Napominjemo i ovdje, da u vakuumu vrijedi

$$\varepsilon\mu = \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \tag{45}$$

tako da valne jednadžbe (35) i (43) za vakuum (bez naboja) glase

$$\nabla^2\vec{H} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}, \tag{46}$$

$$\nabla^2\vec{F} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}. \tag{47}$$

[7] Siméon Denis Poisson (1781.-1840.)

S obzirom na (32) jednadžba (46) se može pisati i u obliku

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{H}=\vec{0} \tag{48}$$

i analogno jednadžba (47), pa se ponekad uvodi **d'Alembertov operator** $\Box$:

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{49}$$

pomoću kojega se valne jednadžbe za vakuum mogu pisati u obliku

$$\Box\vec{H}=\vec{0},\quad \Box\vec{F}=\vec{0}. \tag{50}$$

U vezi s jednadžbom (40) je zanimljivo razmotriti značenje člana $\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\rho$. Neka u homogenom mediju postoji neka razdioba naboja. Tvorimo divergenciju obadviju strana jednadžbe (24). Zbog

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H}=\nabla(\nabla\times\vec{H})=(\nabla\times\nabla)\vec{H}=0 \tag{51}$$

izlazi

$$\vec{0}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{F}+\varkappa\operatorname{div}\vec{F}, \tag{52}$$

što s obzirom na (26) daje

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\varkappa}{\varepsilon}\rho=0. \tag{53}$$

Ako je $\varkappa=0$, to znači, da je ρ nezavisan od vremena, dakle razdioba naboja ostaje nepromijenjena. Njihovo statičko električko polje može se posebno izračunati i superponirati preostalom polju, koje se računa kao da nema naboja. Tada se dakle može član $\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\rho$ u (40) izostaviti. Ako je $\varkappa>0$, onda možemo jednadžbu (53) shvatiti kao običnu linearnu diferenecijalnu jednadžbu s obzirom na varijablu t. Separacija varijabli daje

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{\varkappa}{\varepsilon}dt \tag{54}$$

dakle, integriramo

$$\ln\rho=-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t+\ln C, \tag{55}$$

gdje konstanta integracije može biti bilo koja funkcija od x,y,z (a konstanta je s obzirom na varijablu integracije t). Za $t=0$ izlazi

$$\ln\rho_0=\ln C, \tag{56}$$

gdje je ρ_0 početna razdioba naboja, tj. $C = \rho_0(x, y, z)$. Prema tome (55) prima oblik

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z) e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t}. \tag{57}$$

Vidi se, da se gustoća naboja s vremenom eksponencijalno smanjuje i teži prema nuli. Pretpostavimo li, da je ta prijelazna pojava već jenjala, možemo opet izostaviti član $\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \rho$ u jednadžbi (40). Želimo li tu prijelaznu pojavu uzeti u račun, možemo je također posebno tretirati. Računajmo najprije statičko polje razdiobe $\rho_0(x, y, z)$. Neka se pripadno električko polje zove $\vec{F}_0$, za koje onda vrijedi

$$\operatorname{div} \vec{F}_0 = \frac{\rho_0}{\varepsilon} \tag{58}$$

i

$$\operatorname{rot} \vec{F}_0 = \vec{0}. \tag{59}$$

Ovo potonje je prema (25), jer magnetskog polja nema. Tvrdimo, da onda

$$\vec{F} = \vec{F}_0 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t}, \tag{60}$$

$$\vec{H} = \vec{0} \tag{61}$$

predstavlja polje, koje je u skladu s razdiobom naboja (57) i s Maxwellovim jednadžbama. Zaista, vrijedi najprije zbog (58)

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F}_0 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} = e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} \operatorname{div} \vec{F}_0 = e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} \frac{\rho_0}{\varepsilon} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{62}$$

čime je zadovoljeno jednadžba (26). Dalje je zbog (59)

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{F}_0 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} = e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} \operatorname{rot} \vec{F}_0 = \vec{0} \tag{63}$$

što je sa (61) znači, da je zadovoljena jednadžba (25). Konačno je

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \varkappa \vec{F} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{F}_0 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} \right) + \varkappa \vec{F}_0 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} =$$

$$= -\varkappa \vec{F}_0 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} + \varkappa \vec{F}_0 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} = \vec{0} \tag{64}$$

što zajedno sa (61) znači, da je zadovoljena jednadžba (24). Možemo dakle to rješenje superponirati polju, koje dobivamo uz pretpostavku, da nema naboja, tj. da je $\rho = 0$ u našem homogenom mediju. Prema tome svakako nema svrhe jednadžbu (40) komplicirati članom $\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \rho$.

Pokušat ćemo sada uvesti neke potencijale. Pod vektorskim potencijalom nekog zadanog vektorskog polja razumijevamo novo vektorsko polje, kojemu je rotor jednak zadanom vektoru. Nužni i dovoljni uvjet, da takav potencijal postoji je taj, da je divergencija zadanoga polja jednaka nuli. Taj je uvjet nuždan, jer je divergencija rotora identički jednaka nuli, dakle se vektor može samo onda predočiti kao rotor, ako mu je divergencija jednaka nuli. No taj je uvjet i dovoljan, kako se to dokazuje u vektorskom računu. Zbog (4) odnosno (27) postoji vektorski potencijal $\vec{A}$ vektora $\vec{B}$ (uvijek), a vektorski potencijal vektora $\vec{H}$, ako je μ konstantno. Dakle:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \tag{65}$$

ili, uz $\mu = \mathrm{const.}$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A}. \tag{66}$$

Uvrstimo li (65) u (2), izlazi

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{A} = -\mathrm{rot}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{67}$$

ili

$$\mathrm{rot}\,\left(\vec{F} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \tag{68}$$

Vidimo, da je rotor vektora $\vec{F} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ jednak nuli.

No to je nužni i dovoljni uvjet, da taj vektor ima skalarni potencijal, tj. da je predočiv kao gradijent nekog skalara. Budući da je rotor svakog gradijenta jednak nuli, taj je uvjet nuždan. Da je dovoljan, dokazuje se u vektorskoj analizi. Stavimo u tom smislu

$$\vec{F} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\Phi \quad \text{ili} \quad \vec{F} = -\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{69}$$

i nazovimo Φ skalarnim potencijalom. Za statičke pojave bit će $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$, pa dobivamo poznati skalarni potencijal statičkog električnog polja. Predznak minus pred gradijentom je stvar definicije toga potencijala; želimo, da u statičkom slučaju $\vec{F}$ ima smjer od većeg prema manjem potencijalu.

Napominjemo da je uvođenje vektorskog i skalarnog potencijala prema (65) i (69) sasvim općenito moguće i da nije potrebna pretpostavka, da su $\varkappa$, μ i ε konstante. No sad se opet vraćamo na te pretpostavke, jer želimo tretirati pojave u homogenom mediju. Uvrstimo dakle (66) (gdje je već pretpostavljeno $\mu = \mathrm{const.}$) i (69) u (24):

$$\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \varkappa\left(-\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) =$$

$$= -\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\mathrm{grad}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \varkappa\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \varkappa\mathrm{grad}\,\Phi \tag{70}$$

ili

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \varkappa\mu\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\left(\varepsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \varkappa\mu\Phi\right) \tag{71}$$

ili

$$\nabla^2\vec{A} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \varkappa\mu\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \varkappa\mu\Phi\right). \tag{72}$$

Kako se uči u vektorskom računu, vektorski potencijal nije jednoznačno određen, jer se uvijek može dodati gradijent nekog skalara (rotor gradijenta je jednak nuli!). Stoga možemo vektorskom potencijalu propisati, kakvu divergenciju treba imati. Ako naime zamislimo, da smo našli neki vektorski potencijal $\vec{A}_1$, koji ima kao divergenciju $\operatorname{div}\vec{A}_1 = F_1(x,y,z)$, a mi želimo imati potencijal $\vec{A}_2$, koji ima kao divergenciju neku propisanu funkciju $F_2(x,y,z)$, onda stavljamo

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \operatorname{grad} S, \tag{73}$$

tako da je

$$\operatorname{rot}\vec{A}_2 = \operatorname{rot}\vec{A}_1, \tag{74}$$

tj. $\vec{A}_1$ i $\vec{A}_2$ su vektorski potencijali istog vektorskog polja.

No, ako želimo imati

$$\operatorname{div}\vec{A}_2 = F_2(x,y,z), \tag{75}$$

dakle

$$\operatorname{div}\vec{A}_2 = F_2(x,y,z) = \operatorname{div}\vec{A}_1 + \operatorname{div}\operatorname{grad} S = F_1(x,y,z) + \operatorname{div}\operatorname{grad} S, \tag{76}$$

onda S mora biti rješenje Laplace-Poissonove jednadžbe

$$\nabla^2 S = \operatorname{div}\operatorname{grad} S = F_2(x,y,z) - F_1(x,y,z). \tag{77}$$

Da takva rješenja postoje uz bilo kakve funkcije na desnoj strani, poznato je. To je uostalom isti problem kao određivanje skalarnog potencijala statičkog električnog polja iz razdiobe naboja, jer je gustoća naboja divergencija toga polja, dakle divergencija gradijenta njegova potencijala. Taj ćemo problem pobliže raspraviti kasnije.

Možemo dakle zaista propisati $\operatorname{div}\vec{A}$, pa zahtijevamo

$$\operatorname{div}\vec{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \varkappa\mu\Phi. \tag{78}$$

Kod statičkih i stacionarnih problema stavlja se obično

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0, \tag{79}$$

što se ne slaže uvijek sa (78). Naime, kod tih problema je duduše $\varPhi$ vremenski konstantan, pa otpada prvi član desno u (78). No u vodičima ($\varkappa > 0$) je $\varPhi$ općenito prostorno promjenljiv i ne mora biti jednak nuli, tako da drugi član desno u (78) ne otpada. Za elektrodinamičke probleme je zahtjev (78) povoljniji, jer sada otpada gradijent u (72), pa izlazi, da i potencijal $\vec{A}$ zadovoljava telegrafsku jednadžbu, tj. izlazi

$$\nabla^2 \vec{A} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \varkappa\mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{80}$$

U izolatoru ($\varkappa = 0$) izlazi d'Alembertova jednadžba

$$\nabla^2 \vec{A} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}, \tag{81}$$

napose u vakuumu

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad \text{ili} \quad \Box \vec{A} = 0. \tag{82}$$

Tvorimo sada divergenciju na obje strane jednadžbe (69). Izlazi zbog (26) i (78)

$$\operatorname{div} \vec{F} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\varepsilon\mu \frac{\partial \varPhi}{\partial t} - \varkappa\mu\varPhi \right) =$$

$$= -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varPhi = -\nabla^2 \varPhi \tag{83}$$

ili

$$\nabla^2 \varPhi = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varPhi}{\partial t^2} + \varkappa\mu \frac{\partial \varPhi}{\partial t} - \frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{84}$$

Kao što smo već prije istakli, možemo pretpostaviti $\rho = 0$, a da ne smanjujemo općenitost problema, jer se polje naboja može zasebno računati. Dobivamo tada, da i skalarni potencijal zadovoljava telegrafsku jednadžbu:

$$\nabla^2 \varPhi = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varPhi}{\partial t^2} + \varkappa\mu \frac{\partial \varPhi}{\partial t}. \tag{85}$$

I ovdje za izolator $\varkappa = 0$ dobivamo d'Alembertovu jednadžbu

$$\nabla^2 \varPhi = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varPhi}{\partial t^2}, \tag{86}$$

koja napose za vakuum prima oblik

$$\nabla^2 \varPhi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varPhi}{\partial t^2} \quad \text{ili} \quad \Box \varPhi = 0. \tag{87}$$

Jednadžbe (85) do (87) su skalarne jednadžbe, dok su prijašnje telegrafske i d'Alembertove jednadžbe, npr. (80) do (82) bile vektorske jednadžbe, koje, ako se rastave na komponente daju isto takve skalarne jednadžbe za svaku komponentu dotičnog vektora.

Kao što vidimo, vektori $\vec{H}$ i $\vec{F}$ mogu se dobiti operacijama deriviranja iz potencijala $\vec{A}$ i Φ. Pokušat ćemo naći još jedan "superpotencijal", iz kojega bi se potencijali $\vec{A}$ i Φ dobili operacijama deriviranja. Taj se superpotencijal zove **Hertzov $\vec{Z}$ vektor**[8]. Propisat ćemo tom vektoru tri uvjeta i onda istražiti, da li su ti uvjeti uvijek ispunjivi. Tražimo, da se potencijali $\vec{A}$ i Φ iz njega dobivaju jednadžbama

$$\vec{A} = \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} + \varkappa\mu\vec{Z}, \tag{88}$$

$$\Phi = -\mathrm{div}\,\vec{Z}. \tag{89}$$

Zatim želimo, da i Hertzov vektor zadovoljava telegrafsku jednadžbu:

$$\nabla^2\vec{Z} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2} + \varkappa\mu\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}. \tag{90}$$

Za izolatore se jednadžbe (88) i (90) pojednostavljuju na

$$\vec{A} = \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} \tag{91}$$

i

$$\nabla^2\vec{Z} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}, \tag{92}$$

a za vakuum još možemo $\varepsilon\mu$ nadomjestiti sa $1/c^2$, dakle

$$\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} \tag{93}$$

i

$$\nabla^2\vec{Z} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2} \quad \text{ili} \quad \Box\vec{Z} = 0. \tag{94}$$

[8] Heinrich Rudolf Hertz (1857.-1894.)

Pokazat ćemo:

Teorem 0.1 *Svako rješenje $\vec{Z}$ telegrafske jednadžbe (90) daje rješenje polja $\vec{H}$ i $\vec{F}$ za homogeni medij, za koja su Maxwellove jednadžbe zadovoljene.*

Teorem 0.2 *Za polja $\vec{H}$ i $\vec{F}$ u homogenom mediju, koja zadovoljavaju Maxwellove jednadžbe, postoji Hertzov vektor $\vec{Z}$, koji zadovoljava telegrafsku jednadžbu (90).*

Dokaz teorema 1.1 Neka je nađen vektor $\vec{Z}(x, y, z, t)$, koji zadovoljava jednadžbu (90). Iz njega ćemo izvesti prema (88) i (89) vektor $\vec{A}$ i skalar Φ operacijama deriviranja. Tvorimo li divergenciju lijevo i desno u (88) i uvrstimo na desnoj strani prema (89) Φ umjesto $-\mathrm{div}\,\vec{Z}$, dobijemo, da između $\vec{A}$ i Φ vrijedi relacija (78). Nadalje, uvrštenjem desne strane jednadžbe (88) u (80) vidimo lako, da je zbog (88) zadovoljena i (80), tj. $\vec{A}$ zadovoljava telegrafsku jednadžbu. Dalje uvrštenjem desne strane od (89) u (85) izlazi, da je zbog (90) zadovoljena i (85), tj. Φ zadovoljava telegrafsku jednadžbu. Dakle: **iz $\vec{Z}$ izvedeni vektor $\vec{A}$ i skalar Φ rješenja su telegrafske jednadžbe i zadovoljavaju međusobnu relaciju (78)**.

Dokazujemo dalje, da su tada $\vec{A}$ i Φ vektorski i skalarni potencijal jednog elektromagnetskog polja $\vec{H}$,$\vec{F}$, koje zadovoljava Maxwellove jednadžbe (24) do (27) uz pretpostavku $\rho = 0$, koju smo prihvatili. Tvorimo dakle $\mathrm{div}\,\vec{F}$, gdje je $\vec{F}$ dobiven iz $\vec{A}$ i Φ operacijama deriviranja prema (69). Izlazi

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = -\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{A} \tag{95}$$

ili zbog (78)

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = -\nabla^2\Phi + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \varkappa\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{96}$$

No Φ zadovoljava telegrafsku jednadžbu, dakle je

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = 0 \tag{97}$$

tj. (26) je zadovoljena za $\rho = 0$.

Dalje tvorimo $\mathrm{div}\,\vec{H}$, gdje je $\vec{H}$ dobiven iz $\vec{A}$ prema (66). Izlazi

$$\mathrm{div}\,\vec{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0, \tag{98}$$

tj. jednadžba (27) je zadovoljena. Dalje uvrstimo izraze (69) i (66) u Maxwellovu jednadžbu (24):

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A}\right) = \varepsilon\left(-\mathrm{grad}\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right) + \varkappa\left(-\mathrm{grad}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right). \tag{99}$$

Za lijevu stranu možemo pisati

$$\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{\mu}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \frac{1}{\mu}\nabla^2\vec{A} \tag{100}$$

Time se (99) dovodi u oblik

$$\nabla^2\vec{A} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \varkappa\mu\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \varkappa\mu\Phi\right). \tag{101}$$

No kako je (78) zadovoljena i kako $\vec{A}$ zadovoljava telegrafsku jednadžbu, to je zadovoljena i (101), dakle i prva Maxwellova jednadžba (24). Konačno uvrstimo izraze (69) i (66) u drugu Maxwellovu jednadžbu (25). Izlazi

$$\mathrm{rot}\left(-\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A}\right). \tag{102}$$

Zbog $\mathrm{rot}\,(-\mathrm{grad}\,\Phi) = \vec{0}$ ova je jednadžba zadovoljena, dakle i Maxwellova jednadžba (25). Time je **Teorem 1.1** dokazan, tj. svako rješenje $\vec{Z}$ telegrafske jednadžbe dovodi do jednog rješenja Maxwellovih jednadžbi.

Dokaz teorema 1.2 Pretpostavimo neko elektromagnetsko polje $\vec{H}$, $\vec{F}$ u homogenom mediju sa $\rho = 0$, koje dakle zadovoljava (24) do (27) sa $\rho = 0$. Treba pokazati, da k tome postoji vektor $\vec{Z}$, koji zadovoljava telegrafsku jednadžbu. Već smo vidjeli, da u takvom polju postoji vektorski potencijal $\vec{A}$ i skalarni potencijal Φ, koji zadovoljavaju telegrafsku jednadžbu i međusobnu relaciju (78). Da dođemo do vektora $\vec{Z}$, poći ćemo od jednadžbe (88) i nastojati naći takvo njeno rješenje $\vec{Z}$, koje zadovoljava (89) i telegrafsku jednadžbu (90). Opće rješenje jednadžbe (88) lako je naći (npr. metodom varijacije konstante), jer je to s obzirom na varijablu t obična linearna diferencijalna jednadžba 1. reda s konstantnim koeficijentima. Ona je, istina, vektorska, no rastavljanjem u komponente se može svesti na tri skalarne takve jednadžbe, pa se njihova rješenja onda sastave u vektor, što daje rezultat. Provodimo račun za x-komponentu. Skraćena jednadžba za nju glasi:

$$\varepsilon\mu\frac{\partial Z_x}{\partial t} + \varkappa\mu Z_x = 0. \tag{103}$$

Separacija varijabli daje

$$\frac{dZ_x}{Z_x} = -\frac{\varkappa}{\varepsilon}dt, \tag{104}$$

dakle

$$\ln Z_x = -\frac{\varkappa}{\varepsilon}t + \ln C_x \tag{105}$$

ili

$$Z_x = C_x e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}, \tag{106}$$

pri čemu je C_x konstanta s obzirom na t, ali može biti bilo koja funkcija od x, y, z. Varijacija "konstante" C_x znači, da je nadomještamo funkcijom od t (i od x, y, z), koju treba tako odrediti, da neskraćena jednadžba

$$\varepsilon\mu\frac{\partial Z_x}{\partial t} + \varkappa\mu\vec{Z}_x = A_x \tag{107}$$

dobivena uzimanjem x-komponente u (88), bude zadovoljena. Bit će

$$\frac{\partial Z_x}{\partial t} = \frac{\partial C_x}{\partial t}e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} - \frac{\varkappa}{\varepsilon}C_x e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}, \tag{108}$$

što zajedno sa (106) uvršteno u (107) daje

$$\varepsilon\mu\left(\frac{\partial C_x}{\partial t} - \frac{\varkappa}{\varepsilon}C_x\right)e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} + \varepsilon\mu C_x e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} = A_x \tag{109}$$

ili

$$\frac{\partial C_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu\varepsilon}A_x e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}, \tag{110}$$

dakle

$$C_x = \frac{1}{\mu\varepsilon}\int_0^t A_x e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}dt + C_{1x}(x, y, z), \tag{111}$$

gdje je C_{1x} konstanta integracije. Ona je konstanta s obzirom na t, ali po volji odaberiva funkcija od x, y, z. Prema (106) je dakle opće rješenje jednadžbe (107) dano sa

$$Z_x = \frac{1}{\mu\varepsilon}e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}\int_0^t A_x e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}dt + C_{1x}(x, y, z)e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}. \tag{112}$$

Analogna rješenja dobivamo za y-komponentu i z-komponentu, tako da će vektor $\vec{Z}$ kao rješenje jednadžbe (88) glasiti

$$\vec{Z} = \frac{1}{\mu\varepsilon}e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}\int_0^t \vec{A}e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}dt + \vec{C}_1(x, y, z)e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}. \tag{113}$$

Pita se sada, da li se vektorska "konstanta" integracije $\vec{C}_1$, koja je funkcija od x, y, z, može tako odabrati, da $\vec{Z}$ zadovoljava jednadžbe (89) i (90). Uvrstimo li $\vec{Z}$ u (89), izlazi

$$\Phi = -\mathrm{div}\left\{\frac{1}{\varepsilon\mu}e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}\int_0^t \vec{A}e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}dt + \vec{C}_1 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon\mu} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} \int\limits_0^t \operatorname{div}\vec{A} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} dt - \operatorname{div}\vec{C}_1 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}. \tag{114}$$

No vrijedi (78), pa prema toj jednadžbi nadomještavamo $\operatorname{div}\vec{A}$ i dobivamo:

$$\Phi = -\frac{1}{\varepsilon\mu} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} \int\limits_0^t \left(-\varepsilon\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \varkappa\mu\Phi \right) e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} dt + \operatorname{div}\vec{C}_1 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}. \tag{115}$$

Parcijalna integracija daje

$$\int\limits_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial t} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} = \left[\Phi e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}\right]_0^t - \frac{\varkappa}{\varepsilon} \int\limits_0^t \Phi e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} dt =$$

$$= \Phi(x,y,z) e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} - \Phi(x,y,z,0) - \frac{\varkappa}{\varepsilon} \int\limits_0^t \Phi e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} dt, \tag{116}$$

pa time (115) prelazi u

$$\Phi(x,y,z,t) = \Phi(x,y,z,t) - \Phi(x,y,z,0) e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} -$$

$$-\frac{\varkappa}{\varepsilon} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} \int\limits_0^t \Phi e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} dt + \frac{\varkappa}{\varepsilon} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} \int\limits_0^t \Phi e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} dt - \operatorname{div}\vec{C}_1 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}. \tag{117}$$

Poslije ukidanja nekih članova to daje

$$\operatorname{div}\vec{C}_1 = -\Phi(x,y,z,0) = -\Phi_0, \tag{118}$$

gdje je Φ_0 kratica za $\Phi(x,y,z,0)$, čime je dobiven jedan uvjet za vektor $\vec{C}_1$ i njegova divergencija mora biti jednaka skalarnom potencijalu Φ u trenutku $t = 0$.

U svrhu uvrštenja općega rješenja (113) u telegrafsku jednadžbu (90), koju također želimo zadovoljiti računajmo najprije

$$\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\varepsilon\mu} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} \int\limits_0^t \vec{A} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} dt + \vec{C}_1 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} \right\} =$$

$$= -\frac{\varkappa}{\varepsilon^2\mu} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} \int\limits_0^t \vec{A} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} dt + \frac{1}{\varepsilon\mu}\vec{A} - \frac{\varkappa}{\varepsilon}\vec{C}_1 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}. \tag{119}$$

Dalje je

$$\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = \frac{\varkappa^2}{\varepsilon^3 \mu} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} \int\limits_0^t \vec{A} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} dt$$

$$-\frac{\varkappa}{\varepsilon^2 \mu} \vec{A} + \frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\varkappa^2}{\varepsilon^2} \vec{C}_1 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} \tag{120}$$

i

$$\nabla^2 \vec{Z} = \nabla^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon \mu} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} \int\limits_0^t \vec{A} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} dt + \vec{C}_1 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon \mu} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} \int\limits_0^t \nabla^2 \ \vec{A} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} dt + \nabla^2 \vec{C}_1 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t}. \tag{121}$$

No $\vec{A}$ zadovoljava telegrafsku jednadžbu, dakle vrijedi

$$\int\limits_0^t \nabla^2 \vec{A} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} dt = \int\limits_0^t \left(\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \varkappa \mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} dt. \tag{122}$$

Parcijalna integracija daje

$$\int\limits_0^t \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} dt = \left[\varepsilon \mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} \right]_0^t - \varkappa \mu \int\limits_0^t \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} dt, \tag{123}$$

tako da (122) prelazi u

$$\int\limits_0^t \nabla^2 \vec{A} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} dt = \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} - \varepsilon \mu \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)_{t=0}. \tag{124}$$

Time dobivamo mjesto (121)

$$\nabla^2 \vec{Z} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)_{t=o} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} + \nabla^2 \vec{C}_1 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t}. \tag{125}$$

Uvrstimo sada izraze (119), (120), (125) u telegrafsku jednadžbu (90). Dobivamo:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)_{t=o} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} + \nabla^2 \vec{C}_1 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} = \frac{\varkappa^2}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} \int\limits_0^t \vec{A} e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon} t} dt$$

$$-\frac{\varkappa}{\varepsilon}\vec{A}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{\varkappa^2\mu}{\varepsilon}\vec{C}_1e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}-\frac{\varkappa^2}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}\int\limits_0^t\vec{A}e^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}dt+\frac{\varkappa}{\varepsilon}\vec{A}-\frac{\varkappa^2\mu}{\varepsilon}\vec{C}_1e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}. \tag{126}$$

Pošto se ukine, što se može, ostaje

$$\nabla^2\vec{C}_1=\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_{t=0} \tag{127}$$

kao drugi uvjet, koji treba nametnuti vektoru $\vec{C}_1$. Ako se dakle vektor $\vec{C}_1$ može odrediti tako, da zadovoljava oba uvjeta (118) i (127), onda $\vec{Z}$ zadovoljava jednadžbe (89) i (90).

Pokazujemo sada, da egzistira vektor $\vec{C}_1$, nezavisan od t ali je funkcija od x, y, z koji zadovoljava (118) i (127). U tu svrhu taj traženi vektor zamislimo rastavljen u dva sumanda $\vec{C}_2$ i $\vec{C}_3$:

$$\vec{C}_1=\vec{C}_2+\vec{C}_3 \tag{128}$$

Podvrgnimo ta dva sumanda ovim uvjetima

$$\nabla^2\vec{C}_2=-\operatorname{grad}\Phi_0, \tag{129}$$

$$\operatorname{div}\vec{C}_2=-\Phi_0, \tag{130}$$

$$\nabla^2\vec{C}_3=\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_{t=0}+\operatorname{grad}\Phi_0, \tag{131}$$

$$\operatorname{div}\vec{C}_3=0 \tag{132}$$

Očito onda $\vec{C}_1$ zadovoljava uvjete (118) i (127). Ako dakle uspijemo dokazati egzistenciju vektora $\vec{C}_2$ i $\vec{C}_3$ podvrgnutih uvjetima (129) do (132), onda je time dokazana i egzistencija vektora $\vec{C}_1$.

Dokažimo najprije egzistenciju vektora $\vec{C}_2$. Iz jednadžbe (130) može se odrediti jedan bezvrtložni vektor $\vec{C}_2$, koji tu jednadžbu zadovoljava. To je isti problem kao određivanje statičkog polja $\vec{F}$ iz razdiobe naboja ρ, dakle rješavanja jednadžbe

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{133}$$

tj. određivanje skalara S za koji je $\vec{F}=\operatorname{grad}S$, tj. $\operatorname{div}\operatorname{grad}S=\nabla^2S=\frac{\rho}{\varepsilon}$; o tome će biti još govora kasnije. No ako smo našli takav $\vec{C}_2$, za koji dakle osim (130) vrijedi

$$\operatorname{rot}\vec{C}_2=\vec{0}, \tag{134}$$

onda je (129) već zadovoljena. Naime, vrijedi

$$\nabla^2 \vec{C}_2 = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{C}_2 - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{C}_2 = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{C}_2, \tag{135}$$

što pomoću (130) i (134) prelazi u

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{C}_2 = -\operatorname{grad}\Phi_0. \tag{136}$$

Egzistencija vektora $\vec{C}_2$ je dakle osigurana.

Prelazimo na dokaz egzistencije vektora $\vec{C}_3$. Prema (69) možemo (130) pisati

$$\nabla^2 \vec{C}_3 = -\vec{F}, \tag{137}$$

pri čemu je zbog naše pretpostavke $\rho = 0$ prema (26)

$$\operatorname{div}\vec{F} = 0. \tag{138}$$

No onda postoji vektorski potencijal $\vec{U}$ od $\vec{F}$, tj. postoji $\vec{U}$ takav, da bude

$$\operatorname{rot}\vec{U} = \vec{F}, \tag{139}$$

i tom vektorskom potencijalu $\vec{U}$ možemo propisati divergenciju, pa propisujemo

$$\operatorname{div}\vec{U} = 0. \tag{140}$$

No zbog (140) $\vec{U}$ sa svoje strane ima vektorski potencijal $\vec{V}$, tj. postoji $\vec{V}$ takav, da bude

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{U}. \tag{141}$$

K tome propisujemo

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0. \tag{142}$$

Prema (141) i (139) vrijedi

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{F}. \tag{143}$$

Zbog (142) je dalje

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} - \nabla^2\vec{V} = -\nabla^2\vec{V}. \tag{144}$$

tako da (143) prelazi u

$$\nabla^2\vec{V} = -\vec{F}. \tag{145}$$

Odaberimo dakle

$$\vec{C}_3 = \vec{V}. \tag{146}$$

Onda (142) prelazi u (132), a (145) u (137) odnosno (131). Zaista dakle egzistira $\vec{C}_3$. Time smo osigurali egzistenciju vektora $\vec{C}_1$ kao zbroja $\vec{C}_2 + \vec{C}_3$ i time egzistenciju vektora $\vec{Z}$. Teorem 1.2 je dakle dokazan.

Rezimirajući dosada dobivene rezultate ponavljamo relacije, koje vrijede za elektromagnetsko polje u homogenom mediju uz pretpostavku $\rho = 0$.

Maxwellove jednadžbe:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \varkappa \vec{F}, \tag{147}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{148}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0, \tag{149}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \tag{150}$$

Veza vektora $\vec{H}$ i $\vec{F}$ s vektorskim potencijalima $\vec{A}$ i sa skalarnim potencijalom $\varPhi$:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} \varPhi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{151}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}. \tag{152}$$

Međusobna veza vektorskog i skalarnog potencijala:

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\varepsilon\mu \frac{\partial \varPhi}{\partial t} - \varkappa\mu\varPhi \tag{153}$$

Veza potencijala $\vec{A}$ i $\varPhi$ s Hertzovim vektorom $\vec{Z}$:

$$\varPhi = -\operatorname{div} \vec{Z}, \tag{154}$$

$$\vec{A} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} + \varkappa\mu\vec{Z}. \tag{155}$$

Telegrafska jednadžba za neku funkciju $\vec{W}$, koja može biti skalar ili vektor, glasi

$$\nabla^2 \vec{W} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial t^2} + \varkappa\mu \frac{\partial \vec{W}}{\partial t}, \tag{156}$$

i tu jednadžbu zadovoljavaju $\vec{F}$,$\vec{H}$, $\varPhi$, $\vec{A}$, $\vec{Z}$. Rastavljanjem u komponente vidi se, da tu jednadžbu zadovoljavaju sve komponente vektora $\vec{F}$, $\vec{H}$, $\vec{A}$, $\vec{Z}$.

Uvrste li se izrazi (154), (155) u (151), (152), može se napisati izravna veza između vektora $\vec{H}$ i $\vec{F}$ i Hertzova vektora $\vec{Z}$:

$$\vec{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2} - \varkappa\mu\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} \tag{157}$$

ili, s obzirom na to, da $\vec{Z}$ zadovoljava (156),

$$\vec{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z} - \nabla^2\vec{Z} \tag{158}$$

ili, s obzirom na (30), koja vrijedi za svaki vektor, dakle i za $\vec{Z}$,

$$\vec{F} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Z}. \tag{159}$$

Dalje:

$$\vec{H} = \varepsilon\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} + \varkappa\operatorname{rot}\vec{Z}. \tag{160}$$

Rješavanje samih Maxwellovih jednadžbi nezgodno je zbog toga, što se u (147), (148) pojavljuju u svakoj obje nepoznate veličine $\vec{H}$, $\vec{F}$. Stoga je zgodnije poći od telegrafskih jednadžbi za $\vec{H}$ i $\vec{F}$. To je šest skalarnih jednadžbi, gdje se u svakoj pojavljuje samo jedna nepoznata funkcija, naime jedna komponenta od $\vec{H}$ ili $\vec{F}$. No rješenje tih jednadžbi treba još podvrgnuti samim Maxwellovim jednadžbama (147) – (150). Dovoljno je pri tom, da početne vrijednosti rješenja i njihovih prvih derivacija za neki trenutak $t = 0$ zadovoljavaju te jednadžbe, jer se može dokazati, da su te jednadžbe onda zadovoljene i za svaki drugi t.

No može se poći i od telegrafskih jednadžbi za $\vec{A}$ i Φ, koje predstavljaju samo četiri skalarne jednadžbe s po jednom nepoznatom funkcijom, a rješenja se moraju podvrgnuti samo uvjetu (153), tj. jednoj skalarnoj jednadžbi.

Konačno se može poći od telegrafske jednadžbe za $\vec{Z}$, koja predstavlja samo tri skalarne jednadžbe s po jednom nepoznatom funkcijom, a da nema nikakve uvjetne jednadžbe.

To se sve odnosi na traženje rješenja samih diferencijalnih jednadžbi, pa vidimo, da je u tom pogledu najpovoljnije služiti sa Hertzovim vektorom. No dobivena rješenja još moraju zadovoljavati početne i rubne uvjete konkretno zadanog problema. Ti se uvjeti redovno odnose na vektore $\vec{H}$ i $\vec{F}$, a kompliciraniji su za Φ i $\vec{A}$ i još više za Hertzov vektor $\vec{Z}$. Ovdje dakle teškoće rastu s prijelazom od vektorskih polja na potencijale i Hertzov vektor. Treba stoga prema prilikama odabrati najbolji put.

Formulirat ćemo još pojednostavljene relacije, koje vrijede za homogeni izolator bez naboja, tj. za $\varkappa = 0$, $\rho = 0$. Maxwellove jednadžbe (147), (148) dobivaju oblik

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}, \tag{161}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}. \tag{162}$$

Jednadžbe (149) – (152) ostaju nepromijenjene. Jednadžba (155) se pojednostavljuje, pa je navodimo zajedno sa (154), koja se ne mijenja:

$$\varPhi = -\mathrm{div}\,\vec{Z}, \tag{163}$$

$$\vec{A} = \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}. \tag{164}$$

Telegrafska jednadžba (156) prelazi u valnu jednadžbu

$$\nabla^2\vec{W} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{W}}{\partial t^2} \tag{165}$$

i vrijedi za $\vec{F}$, $\vec{H}$, $\varPhi$, $\vec{A}$, $\vec{Z}$. Izravna veza između $\vec{F}$, $\vec{H}$ i $\vec{Z}$ bit će

$$\vec{F} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{Z} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{Z}, \tag{166}$$

$$\vec{H} = \varepsilon\mathrm{rot}\,\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}. \tag{167}$$

Iste jednadžbe dakako vrijede i za vakuum bez slobodnih naboja, samo treba ε, μ specijalizirati na ε_0, μ_0 i za produkt $\varepsilon_0\mu_0$ pisati $\frac{1}{c^2}$. Pogledamo li Maxwellove jednadžbe (161), (162), (149), (150) za homogeni izolator (ili za vakuum) bez naboja, vidimo, da one prelaze u same sebe, ako nadomjestimo $\vec{F}$ sa $\vec{H}$, $\vec{H}$ sa $-\vec{F}$, ε sa μ i μ sa ε. Ako dakle tu zamjenu načinimo i u jednadžbama (166), (167) to će tako dobiveni $\vec{F}$ i $\vec{H}$ morati opet zadovoljavati Maxwellove jednadžbe, ako smo za $\vec{Z}$ uzeli bilo koje rješenje valne jednadžbe (165). Označit ćemo u okviru tako promijenjenih jednadžbi (166), (167) to rješenje jednadžbe (165) sa $\vec{Y}$ i zvat ćemo taj vektor **Fitz-Geraldov**[9] **vektor**. Vrijedi tada za homogeni izolator (ili vakuum) bez naboja:

$$\vec{H} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{Y} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{Y}}{\partial t^2} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{Y}, \tag{168}$$

$$\vec{F} = -\mu\mathrm{rot}\,\frac{\partial\vec{Y}}{\partial t}. \tag{169}$$

gdje Fitz-Geraldov vektor $\vec{Y}$ zadovoljava valnu jednadžbu (165). Jasno je, da u svakom polju u homogenom izolatoru (ili vakuumu) bez naboja postoji jedan Fitz-Geraldov vektor (jer izmjena $\vec{F}$ u $\vec{H}$, $\vec{H}$ u $-\vec{F}$, ε u μ, μ u ε daje opet moguće polje, za koje prema prije dokazanom postoji Hertzov vektor).

[9] George Francis Fitz-Gerald (1851.-1901.)

3 Jednadžbe za slučaj slobodnih naboja u vakuumu

Već je bilo rečeno, da Maxwellove jednadžbe u obliku (1) – (4) ne obuhvaćaju slučaj slobodnih naboja u vakuumu. Gibaju li se neki naboji u vakuumu, nastat će dakako strujanje elektriciteta, pa možemo nastalu gustoću strujanja označiti sa

$$\vec{G}_1 = \rho\vec{v}, \tag{170}$$

gdje je $\vec{v}$ vektor brzine strujanja. No $\vec{G}_1$ više nije proporcionalan sa $\vec{F}$, kako to vrijedi za $\vec{G}$ prema (7), jer za to gibanje u vakuumu vrijede zakoni, u koje ulazi i $\vec{F}$ i $\vec{H}$ i o kojima će biti govora kasnije. Ovdje ćemo pretpostaviti, da nam je gibanje naboja u vakuumu unaprijed zadano, tj. poznato. To će često biti vrlo približno ispunjeno. Želimo za taj slučaj postaviti diferencijalne jednadžbe za vektore polja i za potencijale. Maxwellove jednadžbe će sada glasiti:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \vec{G}_1, \tag{171}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \tag{172}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{173}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0. \tag{174}$$

Provodimo onda analogni račun kao što smo proveli počevsi od jednadžbe (28). Izlazi po redu

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{rot}\vec{G}_1 =$$

$$= -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} + \operatorname{rot}\vec{G}_1 = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} + \operatorname{rot}\vec{G}_1 \tag{175}$$

ili zbog (30) i (174),

$$\nabla^2\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = \Box\vec{H} = -\operatorname{rot}\vec{G}_1. \tag{176}$$

Dalje je

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial\vec{G}_1}{\partial t} =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{G}_1}{\partial t}, \tag{177}$$

dakle zbog (30) i (173),

$$\nabla^2 \vec{F} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = \Box \vec{F} = \mu_0 \frac{\partial \vec{G}_1}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{grad}\rho. \tag{178}$$

Vektorski potencijal $\vec{A}$ je definiran (66), a budući da (68) ostaje na snazi, vrijedi i sada (69). Imamo dakle

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{A} \tag{179}$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{180}$$

i prema (78)

$$\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{181}$$

Izlazi dalje

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \mu_0 \operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \mu_0 \vec{G}_1 =$$

$$= -\varepsilon_0\mu_0 \operatorname{grad}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{G}_1 \tag{182}$$

ili zbog (30) i (181).

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{G}_1. \tag{183}$$

Iz (180) izlazi tvorbom divergencije s obzirom na (173) i (181)

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -\nabla^2\Phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{184}$$

ili

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \Box\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{185}$$

Dobili smo dakle za $\vec{H}$, $\vec{F}$, $\vec{A}$, Φ jednadžbe (176), (178), (183) i (185). Uvođenje Hertzova vektora ovdje ne dolazi u obzir.

4 Statički i retardirani potencijali

Kao što smo u točki 2 pomoću Stokesova teorema Maxwellove jednadžbe (1)i (2) doveli u integralni oblik, tako se to pomoću Gaussova teorema može učiniti sa sporednim jednadžbama (3), (4). Zamislimo zatvorenu plohu i orijentirajmo vektor $\vec{df}$ prema vani. Onda prema Gaussovu teoremu

$$\int\int\int \operatorname{div} \vec{D} dV = \int\int \vec{D}\vec{df} \tag{186}$$

ili, zbog (3),

$$\int\int \vec{D}\vec{df} = \int\int\int \rho dV = Q, \tag{187}$$

gdje je Q ukupni naboj unutar plohe. Analogno izlazi zbog (4)

$$\int\int \vec{B}\vec{df} = 0. \tag{188}$$

Obrnuto, ako su $\vec{B}$, $\vec{D}$ i ρ neprekinute funkcije mjesta, iz ovih se jednadžbi (187) i (188) dobiva natrag diferencijalni oblik (3) i (4). Najprije od (187) prema Gaussovu teoremu dobivamo

$$\int\int\int \left(\operatorname{div} \vec{D} - \rho\right) dV = 0. \tag{189}$$

Kada bi na nekom mjestu skalar $(\operatorname{div} \vec{D} - \rho)$ bio različit od nule, npr. pozitivan, mogla bi se zbog njegove neprekinutosti naći dovoljno malena okolina, unutar koje je još uvijek pozitivan, pa bi i lijeva strana od (185) bila pozitivna. Time je dobiveno proturječje, dakle vrijedi svagdje

$$\operatorname{div} \vec{D} - \rho = 0 \text{ ili } \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \tag{190}$$

a to je diferencijalni oblik (3). Analogno se dobiva iz (188) pomoću Gaussova teorema

$$\int\int\int \operatorname{div} \vec{B} dV = 0, \tag{191}$$

a iz toga istom argumentacijom

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \tag{192}$$

tj. diferencijalni oblik (4).

Promatrajmo sada elektrostatičko polje u homogenom izolatoru izazvano razdiobom naboja unutar jedne kugle polumjera R, uz pretpostavku, da ta razdioba ima kuglinu simetriju, tj. da ρ ovisi samo o udaljenosti r od središta kugle, koje ćemo uzeti kao ishodište koordinatnog sustava. Jasno je, da će onda polje biti radijalno i također imati kuglinu simetriju. Ako je $\vec{r}$ radijvektor neke točke P izvan kugle, dakle $r > R$, onda je $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{r}_0$ jedinični vektor na tom mjestu, pa će biti polje izvan oblika

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r} F(r) = \vec{r}_0 F(r). \tag{193}$$

Zbog $\vec{D} = \varepsilon \vec{F}$ možemo dakle pisati

$$\int\int \vec{D} d\vec{f} = \varepsilon \int\int \vec{F} d\vec{f} = \varepsilon \int\int F(r) df = \varepsilon F(r) \int\int df =$$

$$= 4\pi r^2 \varepsilon F(r) = \int\int\int \rho dV = Q. \tag{194}$$

Time je određena funkcija $F(r)$:

$$F(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}, \tag{195}$$

gdje je Q ukupni naboj. Samo polje je onda izraženo sa

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \vec{r}_0. \tag{196}$$

Zamislimo li, da se naboji u kugli s polumjerom R sve više stisnu, tj. da R teži prema nuli, dolazimo do polja točkastog naboja Q, koje je dano izrazom (196).

Za skalarni potencijal Φ polja (196) mora vrijediti

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, \Phi, \tag{197}$$

jer se radi o statičnom polju, gdje je $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ u jednadžbi (69) jednak nuli. I za taj potencijal možemo uzeti, da ima kuglinu simetriju i shvatiti ga kao funkciju od r. Dobivamo

$$\mathrm{grad}\, \Phi(r) = \vec{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{198}$$

pri čemu je

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 \Phi}}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{199}$$

i analogno

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \tag{200}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \tag{201}$$

Dakle:

$$\operatorname{grad} \Phi = \vec{i}\frac{x}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{j}\frac{y}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{k}\frac{y}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{r} = \vec{r}_0\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \tag{202}$$

Usporedi li se to sa (197) i (196), izlazi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{203}$$

ili

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + C. \tag{204}$$

Konstantu C možemo odabrati po volji, pa je odabiremo tako, da $\Phi \to 0$ za $r \to \infty$, tj. uzimamo $C = 0$. Time je dobiven potencijal točkastog naboja Q:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}. \tag{205}$$

Pretpostavka da polje ima kuglinu simetriju, nije bila matematički nužna, jer bi moglo biti superponirano još neko drugo polje, kojemu divergencija iščezava, ali je bila fizikalno očigledna, ako polje potječe samo od promatranih naboja. Naprotiv, skalarni potencijal je određen do aditivne konstante, pa stoga (204) predstavlja najopćenitiju mogućnost za potencijal polja (196). Iz kugline simetrije polja izlazi dakle nužno kuglina simetrija skalarnog potencijala.

Imamo li više točkastih naboja, njihova će se polja (vektorski) zbrojiti, pa će se i potencijal (algebarski) zbrojiti, jer je gradijent zbroja jednak (vektorskom) zbroju gradijenta pojedinih sumanda. Ako je stoga zadana neka razdioba naboja gustoće ρ, možemo zamisliti, da dio prostora, u kojemu se nalaze naboji, razdijelimo u sitne elemente dV i da naboj ρdV svakog elementa shvatimo kao točkasti naboj. Ukupni potencijal je onda dan integralom

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\int\int \frac{\rho dV}{r}, \tag{206}$$

gdje je r udaljenost točke P, u kojoj računamo potencijal, od elemenata dV, koji ulazi u integraciju. Ako P ima koordinate x, y, z, a element dV se nalazi na mjestu ξ, η, ζ, onda je

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}. \tag{207}$$

Možemo onda (206) u pravokutnim koordinatama opširnije pisati

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int\int\int \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)dV}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}. \tag{208}$$

Budući da skalarni potencijal zadovoljava Laplace–Poissonovu jednadžbu

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{209}$$

koja je specijalni slučaj jednadžbe (84) za slučaj statičkih polja, gdje su derivacije po vremenu jednake nuli, to smo s (206) odnosno (208) našli rješenje te skalarne Laplace-Poissonove jednadžbe. Naš postupak, istina je, nije bio sasvim strog. U jednu ruku je pitanje, da li elementima ρdV možemo pripisati polje točkastih naboja, dobiveno na temelju pretpostavke kugline simetrije, koju ti elementi nemaju. Drugo treba uočiti, da polje točkastog naboja za $r = 0$ postaje neizmjerno, što bi kod integracije moglo dovesti do teškoća. Da ipak nema teškoća i da je (206) zaista rješenje jednadžbe (209), raspravit ćemo na kasnijem mjestu.

Rješenju (206) moglo bi se dodati još bilo koje rješenje Laplaceove jednadžbe

$$\nabla^2\Phi = 0, \tag{210}$$

pa da (209) još uvijek bude zadovoljena. Tome odgovara dodavanje jednoga polja $\vec{F}$, čija je divergencija jednaka nuli, o čemu je već bila riječ. U dijelovima prostora, gdje je $\rho = 0$, rješenje (206) dakako i samo zadovoljava Laplaceovu jednadžbu (210). Napose izuzevši točku $r = 0$, što je lako provjeriti. Vidi se iz svega toga, da se iz zadane divergencije nekog polja $\vec{F}$, čiji je rotor jednak nuli, a ta je divergencija upravo zadana razdiobom naboja ρ, može naći to polje kao negativni gradijent potencijala (206). Tu mogućnost smo na ranijim mjestima upotrijebili u dokazima.

Treba li naći rješenje vektorske Laplace-Poissonove jednadžbe

$$\nabla^2\vec{a} = \vec{b}, \tag{211}$$

dovoljno je rastaviti je u komponente, zatim za svaku od triju dobivenih jednadžbi

$$\nabla^2 a_x = b_x,\ \nabla^2 a_y = b_y,\ \nabla^2 a_z = b_z \tag{212}$$

sagraditi rješenje poput (206) i ta rješenja sastaviti u vektor. Izlazi tako

$$\vec{a} = -\frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{\vec{b}}{r}dV. \tag{213}$$

Npr. jednadžba (183) se za stacionarne struje specijalizira na

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{G}_1, \tag{214}$$

pa se rješenje može postaviti u obliku

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int \frac{\vec{G}_1}{r}dV. \tag{215}$$

Zamislimo sada u ishodištu naboj Q, koji je na miru, ali se vremenski mijenja, tj. on je funkcija vremena, dakle $Q(t)$. To je dakako fizikalno nemoguće, ali će nam ta pretpostavka pomoći da nađemo neka rješenja valne jednadžbe (165) i njenog poopćenja (185) i (184). Fizikalni smisao naše pretpostavke nalazi se u tome, da se kod strujanja naboja, gustoća naboja na nekom stalnom mjestu općenito mijenja, pa možemo dakle reći, da je naboj ρdV u fiskiranom volumenskom elementu dV vremenski promjenljiv. Budući da se dakle zapravo radi o strujanju naboja, ograničit ćemo se na vakuum.

Skalarni potencijal jednog točkastog naboja $Q(t)$ u vakuumu mora u prostoru (izuzevši tu točku) zadovoljavati valnu jednadžbu

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \tag{216}$$

Opet ćemo pretpostaviti kuglinu simetriju, tako da je Φ funkcija samo od r i t. Već smo vidjeli, da je

$$\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \tag{217}$$

Dalje je

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right), \tag{218}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right). \tag{219}$$

Dakle:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{x^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) \tag{220}$$

i

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 3\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{x^2+y^2+z^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) =$$

$$= \frac{3}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2}, \tag{221}$$

tako da jednadžba (216) prima oblik

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{222}$$

ili

$$\frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial t^2} = 0. \tag{223}$$

Uvest ćemo sada nezavisne varijable ξ, η jednadžbama

$$\xi = t - \frac{r}{c} \tag{224}$$

$$\eta = t + \frac{r}{c} \tag{225}$$

ili

$$t = \frac{1}{2}\left(\xi + \eta\right), \tag{226}$$

$$r = \frac{c}{2}\left(-\xi + \eta\right). \tag{227}$$

No prema pravilima deriviranja složenih funkcija vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial r}, \tag{228}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial t}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial r}, \tag{229}$$

tj. na temelju (226, 227),

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{230}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial r}\right). \tag{231}$$

Time je

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial r}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \tag{232}$$

ili

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{4}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}. \tag{233}$$

Jednadžba (223) time prelazi u

$$\frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial \xi \eta \zeta} = 0, \tag{234}$$

pri čemu smo s faktorom $-\frac{4}{c^2}$ podijeliti. Ako je dakle $r\Phi$ izraženo pomoću ξ, η, vidimo da je

$$\frac{\partial(r\Phi)}{\partial\xi} = \varphi(\xi),$$

jer je nezavisno od η, i dalje

$$r\Phi = \int \varphi(\xi) d\xi + f_2(\eta). \tag{235}$$

Označimo li prvi član desno $f_1(\xi)$, izlazi tzv. d'Alembertovo rješenje

$$r\Phi = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right), \tag{236}$$

gdje su f_1 i f_2 po volji odaberive fukcije. Prvi član predstavlja val, koji odlazi od ishodišta, a drugi se steže na ishodište. Fizikalno ima smisla samo val, koji odlazi,, pa dobivamo kao rješenje za potencijal promjenljivog naboja $Q(t)$

$$\Phi(r,t) = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \tag{237}$$

gdje je zasada f_1 po volji odaberiva funkcija. No ta funkcija mora biti u vezi sa $Q(t)$!

Ako u našim jednadžbama pustimo da veličina c teži prema neizmjerno, dobit ćemo mjesto valne jednadžbe (216) Laplaceovu jednadžbu (210), pa možemo očekivati, da će taj rješenje (237) prijeći u rješenje (205), koje smo za taj slučaj već našli, dok će izraz (237) prijeći u $\frac{f_1(t)}{r}$. Uspoređivanjem nalazimo

$$f_1(t) = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}, \tag{238}$$

gdje smo mjesto ε pisali ε_0, jer se radi o vakuumu. Prema tome bi rješenje (237) dobilo oblik

$$\Phi(r,t) = \frac{Q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{239}$$

Ovo je dakako samo heuristično razmatranje, koje ne možemo nadomjestiti strogim razmatranjem, jer je koncepcija izoliranog vremenski promjenljivog naboja fizikalno nemoguća. Zaista, iz jednadžbe (171) dobivamo tvorbom divergencije:

$$0 = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{div} \vec{G}_1, \tag{240}$$

dakle zbog (173)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{G}_1 = 0. \tag{241}$$

Intregriramo li to unutar zatvorene plohe, izlazi pomoću Gaussova teorema

$$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dV = \frac{\partial Q}{\partial t} = \iiint \operatorname{div} \vec{G}_1 dV = \iint \vec{G}_1 d\vec{f}. \quad (242)$$

No ako je naboj Q izoliran i unutar te zatvorene plohe, onda je $\vec{G}_1$ na plohi jednak nuli, pa izlazi $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ tj. Q je nužno vremenski konstantan. Zbog toga nema ni smisla pitati za električno polje takvoga vremenski promjenljivoga naboja.

Ipak je rezultat (239) koristan, jer je to svakako jedno rješenje valne jednadžbe (216) s izuzetkom točke $r = 0$. Ako se radi o nekom vremenski i prostorno promjenljivom naboju s gustoćom $\rho(x, y, z, t)$, navodi nas (239), da kao rješenje općenitije jednadžbe (185) postavimo tzv. **retardirani potencijal**

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (243)$$

gdje je $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$. Uz upotrebu oznake

$$\{\rho\}_{t-\frac{r}{c}} = \rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right) \quad (244)$$

to glasi kraće

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\{\rho\}_{t-\frac{r}{c}}}{r} dV. \quad (245)$$

Vidi se, da je taj izraz analogan statičkom potencijalu (206), ali se za izračunavanje potencijala u trenutku t u nekoj točki $P(x, y, z)$ kod integracije preko svih volumenskih elemenata dV u elementu na mjestu ξ, η, ζ uzima ona gustoća ρ, koja je tamo bila prije vremena $\frac{r}{c}$, a to je vrijeme, koje treba svjetlost ili bilo koje elektromagnetsko djelovanje, da od toga elementa dV dopre do točke P. Prinos nekog volumenskog elementa dV potencijalu u točki P kasni, dakle, pa odatle naziv "*retardirani potencijal*".

Da taj potencijal zaista zadovoljava jednadžbu (185), pokazat ćemo točnije na jednom kasnijem mjestu.

Analogno rješenje (215) Laplace-Poissonove jednadžbe (214) možemo sagraditi retardirani vektorski potencijal

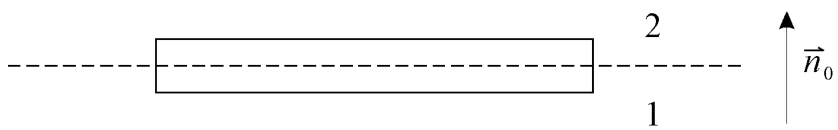
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\{\vec{G}_1\}_{t-\frac{r}{c}}}{r} dV \quad (246)$$

kao rješenje općenitije jednadžbe (183). Na kasnijem mjestu ćemo pokazati, da tako sagrađeni potencijali (245) i (246) zaista zadovoljavaju jednadžbe (185), (183) i (181), pa stoga daju elektromagnetsko polje u skladu s Maxwellovim jednadžbama. To polje potječe od naboja, kojima je gibanje pretpostavljeno kao poznato i može biti izazvano nekim stranim izvana narinutim poljem. Djelovanje našim potencijalima određenog polja, koje potječe od samih naboja, na te naboje pri tome je zanemareno, što je većinom dopustivo, jer je to polje obično mnogo slabije od izvana narinutoga.

5 Ponašanje polja na granici dvaju medija

Sastaju li se duž neke plohe dva medija, veličine ε i μ bit će na toj plohi redovito prekinute, tj. mijenjat će se kod prolaza kroz tu plohu abruptno za neki konačni iznos. No takav se diskontinuitet može smatrati graničnim slučajem vrlo naglog mijenjanja, pa se stoga ponašanje polja ipak može zaključiti iz diferencijalnih jednadžbi toga polja pomoću prikladnog graničnog prijelaza. Da se što lakše dođe do rezultata, najzgodnije je poslužiti se integralnim oblikom Maxwellovih jednadžbi, tj. jednadžbama (12), (15), (187), (188). Pri tome nećemo postupati sasvim strogo, da razmatranja ne postanu predugačka, nego uvodimo neka pojednostavljenja odnosno zanemarenja koja odgovaraju onome, što bi sam granični postupak, strogo proveden, opravdao. U tom smislu promatramo jedan tako malen dio granične plohe, da ga možemo smatrati približno ravnim dijelom ravnine, tj. nadomještavamo ga dijelom tangencijalne ravnine. Dalje ćemo uzeti, da se duž toga maloga dijela plohe veličine ε,μ, $\vec{F}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$ mijenjaju tako malo, da ih možemo smatrati konstantnim duž plohe, samo što se one mogu promijeniti za konačan iznos kod prolaza kroz plohu. To su dakle uz jednu stranu plohe konstante, a uz drugu stranu opet konstante, eventualno različite od onih prvih.

Označimo prvi medij brojem 1, drugi medij brojem 2, pa veličine u jednom i drugom mediju obilježimo prema tome indeksima 1 i 2. Normala plohe neka je orijentirana od medija 1 prema 2, a "*normalne komponente*" vektora $\vec{F}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$ u jednom i drugom mediju neka se odnose na tu istu tako orijentiranu normalu.



Slika 1.

U *slici 1* granična je ploha (kao ravnina) okomita na ravnini slike i označena crtkanom linijom. Medij 1 je dolje, medij 2 gore. Strelica označava smjer jediničnog vektora $\vec{n}_0$. Promatramo vrlo nizak valjak, kojemu slika pokazuje osni presjek i primjenimo na nj jednadžbu (188). Površina jedne i druge baze neka je b. Plošni integral preko gornje baze b_2 bit će

$$\iint\limits_{(b_2)} \vec{B}d\vec{f} = B_{2n}b, \tag{247}$$

jer je $\vec{B}$ konstantan a $d\vec{f}$ ima smjer normale $\vec{n}_0$. B_{2n} je normalna komponenta u mediju 2, tik uz plohu. Plošni integral preko donje baze biti će

$$\iint\limits_{(b_1)} \vec{B}d\vec{f} = -B_{1n}b, \tag{248}$$

jer je ovdje smjer od $d\vec{f}$ (iz valjka prema vani, dakle prema dolje) suprotan smjeru normale $\vec{n}_0$. Plošni integral preko plašta valjka možemo zanemariti, jer teži k nuli, kad visina valjka teži k nuli. Jednadžba (188) daje odakle

$$\int\int \vec{B}\vec{df} = B_{2n}b - B_{1n}b = 0 \tag{249}$$

ili

$$B_{2n} = B_{1n}, \tag{250}$$

tj. normalna komponenta od $\vec{B}$ je neprekinuta kod prolaza kroz graničnu plohu. Naprotiv, normalna komponenta od $\vec{H}$ to nije, ako su vrijednosti μ za te medije različiti, jer (250) dalje

$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n} \tag{251}$$

ili

$$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{252}$$

Prijeđimo sada na primjenu jednadžbe (187). Moramo ovdje uočiti mogućnost, da na graničnoj plohi postoje neki "*plošni naboji*". Naime, ako je polje $\vec{D}$ diskontinuirano, onda to možemo shvatiti kao nagli porast, gdje dakle derivacije po prostornim varijablama primaju vrlo velike vrijednosti, pa stoga i divergencija u (3) i s njom prostorna gustoća naboja ρ može u prolazu iz jednog medija u drugi dobiti vrlo velike vrijednosti. Mjesto tankog sloja naboja vrlo velike gustoće možemo zamisliti, kao matematičku idealizaciju, **plošni naboj s plošnom gustoćom** σ $\left[\frac{As}{m^2}\right]$.

Ukupni naboj Q u valjku prema sl.1. bit će tada

$$Q = \sigma b, \tag{253}$$

jer je promatrani dio plohe tako malen, da je σ približno konstantno. To je dakle desna strana jednadžbe (187). Lijeva strana je analogno kao malo prije

$$\int\int \vec{D}\vec{df} = D_{2n}b - D_{1n}b, \tag{254}$$

tako da (187) daje

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \tag{255}$$

iz čega se vidi, da se normalna komponenta od $\vec{D}$ mijenja neprekinuto, kod prolaza kroz plohu, ako nema plošnog naboja, a prema (255), ako ga ima. Normalna komponenta od $\vec{F}$ mijenja se dakako po zakonu

$$\varepsilon_2 F_{2n} - \varepsilon_1 F_{1n} = \sigma \tag{256}$$

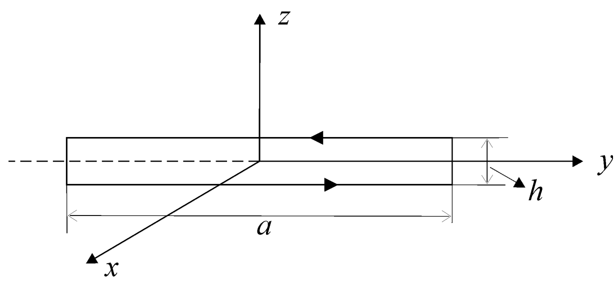
odnosno, kad nema plošnog naboja, prema

$$\frac{F_{2n}}{F_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{257}$$

Pošto smo tako jednadžbe (187) i (188), tj. sporedne dvije Maxwellove jednadžbe iskoristili za ispitivanje ponašanja normalnih komponenata polja, prelazimo na to da iz (12) i (15), dakle iz glavnih Maxwellovih jednadžbi dobijemo ponašanje tangencijalnih komponenata.

U točki P granične plohe, gdje istražujemo ponašanje polja, zamislimo koordinatni sustav, kojemu osi x i y padaju u tangencijalnu ravninu granične plohe, a os z je uspravljena u smjeru normale $\vec{n}_0$ od medija 1 prema mediju 2. Ako sada promatramo, recimo, vektor $\vec{F}$, onda su F_{1z} i F_{2z} isto što i F_{1n} i F_{2n} prema našoj dosadašnjoj oznaci. Projekciju vektora $\vec{F}$ na tangencijalnu ravninu označit ćemo sa $\vec{F}_t$ i zvat ćemo je vektorskom tangencijalnom komponentom od $\vec{F}$. Očito će vrijediti

$$\vec{F}_t = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y. \tag{258}$$



Slika 2.

Na *slici 2.* naznačena je pravokutna zatvorena krivulja, koja je sva u ravnini y, z i proteže se tik do granične plohe. Neka je svaka od duljih stranica jednaka a, a svaka od kratkih (u smjeru osi z) jednaka h. Ako zamislimo, da h teži k nuli, onda će površina pravokutnika težiti k nuli i stoga i tok vektora $\vec{B}$ kroz tu plohu, pa i njegova vremenska derivacija, dakle desna strana jednadžbe (15). Na lijevoj strani jednadžbe (15) možemo zanemariti dio integrala, koji se odnosi na kratke stranice, jer za h teži k nuli. Udio dugačkih stranica daje (zbog približne konstantnosti od $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ duž granične plohe u promatranoj vrlo maloj okolini točke P)

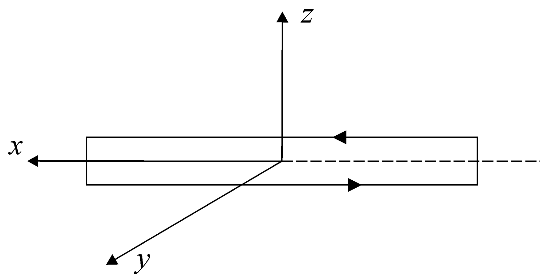
$$\oint \vec{F}\vec{ds} = F_{1y}a - F_{2y}a, \tag{259}$$

gdje je predznak minus drugog člana uvjetovan time, da se gornja stranica pravokutnika kod obilaženja prolazi u negativnom smjeru osi y. Izlazi dakle

$$F_{2y} = F_{1y}, \tag{260}$$

a sasvim analognim rasuđivanjem na temelju *slike 3* dobiva se

$$F_{2x} = F_{1x}, \tag{261}$$



Slika 3.

tako da izlazi

$$F_{2t} = F_{1t}, \tag{262}$$

tj. tangencijalne komponente od $\vec{F}$ su neprekinute kod prolaženja kroz plohu.

Za tangencijalne komponente od $\vec{D}$ izlazi

$$\frac{\vec{D}_{2t}}{\varepsilon_2} = \frac{\vec{D}_{1t}}{\varepsilon_1} \tag{263}$$

ili za iznose,

$$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{264}$$

Kod razmatranja jednadžbe (12) uzet ćemo u obzir mogućnost, da prostorna gustoća provodne struje $\vec{G}$ možda na prolazu kroz graničnu plohu dobiva vrlo velike vrijednosti, pa zamišljamo u tom smislu u toj plohi **plošnu struju s gustoćom** $\vec{g}$ $\left(\frac{A}{m}\right)$. To je dakle vektor, koji cijeli leži u tangencijalnoj ravnini granične plohe, pa u našem koordinatnom sustavu vrijedi

$$\vec{g} = \vec{i} g_x + \vec{j} g_y. \tag{265}$$

Računamo li sada tok provodne struje kroz plohu omeđenu zatvorenom pravokutnom krivuljom prema sl.1.2., imat ćemo

$$\int\int \vec{G} d\vec{f} = \int \vec{g} d\vec{n}, \tag{266}$$

gdje je $d\vec{n}$ vektor u smjeru normale $\vec{i}$ (osi x) s iznosom ds tj. dy, jer se integrira duž osi y. To daje

$$\int \vec{g} d\vec{n} = \int g_x d_y = g_x a. \tag{267}$$

Lijeva strana jednadžbe (12) postaje analogno kao za jednadžbu (15)

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = H_{1y} a - H_{2y} a \tag{268}$$

tako da (12) daje

$$H_{2y} - H_{1y} = -g_x. \tag{269}$$

Provedemo li slično razmatranje na temelju sl.3., treba uočiti, da je os x sada upravljana na lijevo, što daje druge predznake za dijelove integrala po zatvorenoj krivulji, tako da tu izlazi:

$$H_{2x} - H_{1x} = g_y. \tag{270}$$

Jednadžbe (269) i (270) mogu se sažeti u

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{g} \times \vec{k}, \tag{271}$$

što je lako provjeriti, ako se uzme u obzir (265) i analogoni od (258), naime

$$\vec{H}_{1t} = \vec{i}H_{1x} + \vec{j}H_{1y}, \tag{272}$$

$$\vec{H}_{2t} = \vec{i}H_{2x} + \vec{j}H_{2y}. \tag{273}$$

Označujući jedinični vektor normale od medija 1 prema mediju 2, opet se $\vec{n}_0$ mjesto s $\vec{k}$, dobivamo (271) u obliku

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{g} \times \vec{n}_0. \tag{274}$$

To znači, da tangencijalna komponenta H_t kod prolaza kroz graničnu plohu općenito mijenja i smjer i veličinu.

Razumije se, da za vektor $\vec{B}$ vrijedi

$$\frac{\vec{B}_{2t}}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_{1t}}{\mu_1} = \vec{g} \times \vec{n}_0. \tag{275}$$

Ako nema plošne provodne struje, dobivamo:

$$\vec{H}_{2t} = \vec{H}_{1t}, \tag{276}$$

tj. tangencijalna komponenta od $\vec{H}$ je neprekinuta kod prolaza kroz graničnu plohu. Za $\vec{B}$ tada vrijedi

$$\frac{\vec{B}_{2t}}{\mu_2} = \frac{\vec{B}_{1t}}{\mu_1} \tag{277}$$

odnosno, za iznose,

$$\frac{B_{2t}}{B_{1t}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{278}$$

Zaključno dakle možemo reći: **Neprekinute su kod prolaza kroz graničnu plohu: normalna komponenta od $\vec{B}$ i tangencijalna komponenta od $\vec{F}$; zatim, ako nema plošnog naboja, normalna komponenta od $\vec{D}$; inače vrijedi (255); konačno, ako nema plošne struje, tangencijalna komponenta od $\vec{H}$, inače vrijedi (274).**

6 Gustoća energije i Poyntingov vektor

Vektor $\vec{F}$ je definiran kao sila, koja na dotičnom mjestu djeluje na jedinicu naboja, ako se takav naboj na tom mjestu nalazi i u tom trenutku miruje. Prema tome je sila $\vec{F}$, koja djeluje na naboj Q, koji miruje, dana sa

$$\vec{P} = Q\vec{F}. \tag{279}$$

Kao što ćemo kasnije vidjeti, sila na naboj, koji se giba, ima još dodatan član, koji ovisi o brzini i o magnetskom polju. No ta je dodatna sila okomita na brzinu i stoga kod pomicanja ne vrši rad. Računamo li dakle, koji rad vrši elektromagnetsko polje kod pomicanja nekog naboja, možemo se poslužiti izrazom (279) za silu, premda taj izraz vrijedi zapravo samo, dok naboj miruje. Razmatranja, koja će nas dovesti do potpunog izraza za silu na naboj u gibanju, nezavisna su od sadržaja ove točke, pa stoga gore spomenutu činjenicu možemo ovdje anticipirati. Ako se dakle neki naboj Q pomiče od neke točke R do neke točke S, polje vrši rad

$$A = Q\int_R^S \vec{F}\vec{ds}. \tag{280}$$

(Slovo A ovdje dakako nema veze s vektorskim potencijalom).

Sjetimo se sada, da je električna struja u vodičima, napose metalima, ustvari pomicanje elektrona. Električno polje obavljat će dakle rad pomičući elektrone, ali ne obavljati rad djelujući na pozitivno nabijene ostatke atoma, koji su fiksirani u kristalnoj rešetki metala. Ako je dakle ρ_1 gustoća naboja (razumije se, da je $\rho_1 < 0$), onda je $\rho_1\vec{F}$ sila, koja djeluje na elektrone u jedinici volumena. Neka je $\vec{v}$ srednja brzina pomicanja elektrona. Skalarni produkt sile i brzine je snaga, tako da je $\rho_1\vec{F}\vec{v}$ **gustoća snage**, koju polje prenosi na elektrone (jer je to snaga po jedinici volumena). No $\rho_1\vec{v}$ je ujedno gustoća struje $\vec{G}$, tako da je **gustoća snage** dana sa $\vec{F}\vec{G}$. Zbog $\vec{G} = \varkappa\vec{F}$ to možemo još pisati kao $\varkappa F^2$.

Prolazi li nekom žicom presjeka f struja I, onda kroz jedinicu presjeka prolazi $\frac{I}{f} = G$. Neka je duljina žice l. U nekom dijelu dl te žice s volumenom $f\ dl$ snaga je $f\ dl\ FG = IFdl$, dakle je ukupna na elektrone u žici prenesena snaga

$$\int IFdl = I\int Fdl = IU, \tag{281}$$

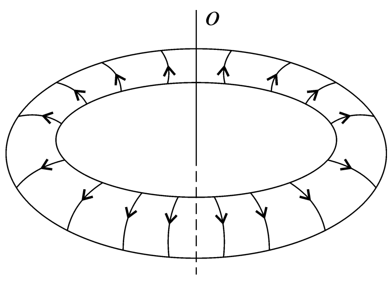
gdje je U napon, koji je priključen na žicu. Pri tome smo dopustili, da F, f i $\varkappa$ budu promjenljivi uzduž žice. Energiju, koju dobivaju elektroni, oni sudarima prenose na atome kristalne rešetke i pojačavaju njihovo titranje, što nam se očituje kao toplina, koju nazivamo **Joulovom toplinom**[10].

No ne mora se rad, koji se ulaže, kada neki napon tjera izvjesnu struju kroz strujni krug, uvijek trošiti na toplinu. Zamislimo, da istosmjerni generator

[10] James Prescott Joule, (1818.-1889.)

priključimo na neki strujni krug, koji ima samoindukciju, ali nema ohmskog otpora. To znači, da je žica savršeno vodljiva ($\varkappa = \infty$), ali se inducirani protunapon magnetskog polja uzrokovanog strujom ne može zanemariti. U tom će slučaju struja linearno rasti, tako da njezino magnetsko polje daje konstantni protunapon. Rastavimo električno polje na jedan dio koji je uzrokovan rastom magnetskog polja. Možemo onda uzeti, da prvi dio električnog polja prenosi na elektrone u strujnom krugu snagu IU, dok drugi dio polja prenosi na elektrone isto toliku negativnu snagu. Naime u savršenom vodiču je ukupno $\vec{F}$ sigurno jednako nuli, inače struja $\varkappa\vec{F}$ sa $\varkappa = \infty$ ne može biti konačna. Stoga je statičko polje generatora unutar žice upravo jednako i protivno električkom polju izazvanom rastom magnetskog polja. Elektroni dakle prenose od prvog polja dobivenu snagu na drugo polje i ta snaga služi za izgradnju magnetskog polja. Snaga, koju daje generator i u tom je slučaju jednaka UI, samo što se ona ne troši na toplinu, nego na izgradnju magnetskog polja. Zapravo se ta snaga uopće ne prenosi na elektrone. Dioba električkog polja na dva dijela bila je samo zamišljena, a stvarno u metalu električkog polja nema i na elektrone se ne prenasi nikakva snaga. Energija struji drugim putem, iz generatora kroz izolator u magnetsko polje, koje se izgrađuje. O strujanju energije će biti još govora.

Treba ovdje napomenuti, da ukupno električno polje u promatranom slučaju nije bezvrtložno, pa stoga $\int \vec{F}\vec{ds}$ ovisi o putu. Pod "naponom" na priključnim stezaljkama tada razumijevamo $\int \vec{F}\vec{ds}$ od jedne stezaljke do druge najkraćim putem kroz izolator, dok bi $\int \vec{F}\vec{ds}$ uzet uzduž žice bio jednak nuli, jer je $\vec{F}$ u žici jednak nuli, kad je ona savršeno vodljiva.



Slika 4.

Na temelju činjenice, da je UI snaga, koja ulazi u strujni krug, ako je priključen napon U, nastojat ćemo odrediti gustoću energije magnetskog polja, promatrajući svitak u obliku torusa, u kojem možemo proizvesti magnetsko polje ograničeno na unutrašnjost torusa. U tu svrhu promatramo najprije idealiziran slučaj. Neka na torusu teče plošna struja tako, da su strujnice meridijanske kružnice torusa (*slika 4*). S obzirom na cilindarsku simetriju takve situacije, bliža je pomisao, da će magnetsko polje u torusu biti cirkularno, tj. $\vec{H}$ će na svakom mjestu biti okomito na osi o torusa i na dotičnoj meridijanskoj ravnini. Uzduž jedne kružnice unutar torusa, kojoj je ravnina okomita na osi, a središte u osi, bit će očito H konstantno, a $\vec{H}$ tangencijalno. Ako ta kružnica ima polumjer r, bit će uzduž nje

$$\int \vec{H}\vec{ds} = \int H ds = H \int ds = H2\pi r. \tag{282}$$

Ukupna plošna struja, koja prolazi kroz plohu takve kružnice, bit će ista za svaku takvu kružnicu i neka iznosi I_1. Onda prema (12) mora biti

$$H2\pi r = I_1 \ \text{ ili } \ H = \frac{I_1}{2\pi r}, \tag{283}$$

tj. H ovisi samo o udaljenosti do osi o.

Dalje će za neku "paralelu" na torusu, koja ima polumjer r, vrijediti

$$I_1 = 2\pi r g, \tag{284}$$

gdje je g gustoća plošne struje na toj paraleli. Promatramo li izraz $\vec{g} \times \vec{n}_0$ na desnoj strani jednadžbe (274), gdje neka $\vec{n}_0$ gleda u torus, tako da medij u torusu ima indeks 2, a medij izvan njega indeks 1, onda vidimo, da $\vec{H}_{2t}$ ima smjer od $\vec{H}_2$, dakle je $H_2 = H_{2t}$. Dalje zbog (284) i zbog $\vec{g} \perp \vec{n}_0$ vrijedi

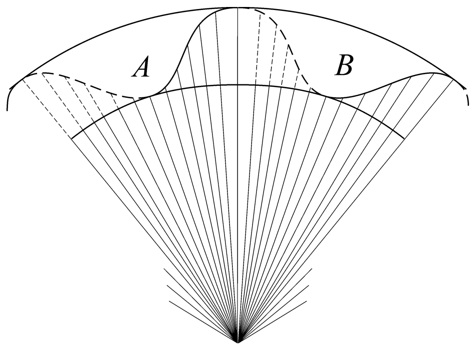
$$H_{2t} = g = \frac{I_1}{2\pi r}, \tag{285}$$

a to je upravo jednako H na toj paraleli s unutarnje strane plohe. Zbog (274) izlazi dakle

$$H_{1t} = 0. \tag{286}$$

Pretpostavimo li, da i izvan torusa magnetsko polje ima samo cirkularnu komponentu, onda (286) pokazuje, da je to polje na vanjskoj površini torusa jednako nuli, pa možmo naslutiti, da je svagdje izvan torusa nula. Takvo polje zaista zadovoljava Maxwellove jednadžbe. Za polje "nula" izvan torusa je to trivijalno. Za polja unutar torusa, koje je cirkularno i određeno jednadžbom (283), može se to lako računom provjeriti, ako Maxwellove jednadžbe izrazimo u cilidričnim koordinatama. S tim računom se ovdje nećemo zadržati. Uvjeti kod prolaza kroz plohu ispunjeni su, kako smo vidjeli. Rješenje je dakle moguće i moglo bi se pokazati, da je i jedino moguće, ako još dodamo zahtjev, da polje bude jednako nuli u neizmjernosti.

Sada ćemo pokušati odrediti gustoću energije toga polja pretpostavljajući, da je ta gustoća funkcija od H. U tu svrhu ćemo idealiziranu pretpostavku plošne struje približno realizirati strujom, koja teče kroz namotaj s vrlo gusto raspoređenim zavojima. Ako takav namotaj (koji neka nema ohmskog otpora) priključimo na istosmjerni napon U, struja i s njom magnetsko polje u torusu će linearno rasti, jer se u namotaju mora inducirati konstantni protunapon. Da se taj inducirani protunapon $\int \vec{F}\vec{ds}$ uzduž žice namotaja dobije, treba upotrijebiti (15). Moramo dakle znati, koji je tok magnetskog polja kroz plohu, kojoj je ta žica rub. U *slici 5* je prikazan jedan dio takve plohe, koju dobivamo, ako jednu točku torusa spojimo sa svim točkama žice. U slici je radi jasnoće namotaj prikazan vrlo razvučen, dok ga u stvari zamišljamo vrlo gustim. Uočimo li jedan zavoj od točke A do točke B, vidimo,



Slika 5.

da cijeli tok magnetskog polja prolazi kroz dio plohe, koji odgovara tom zavoju. Ako je polje upravljeno, recimo, s desna na lijevo, polje prolazi kroz plohu s njene gornje strane prema donjoj. To se ponavlja kod svakog zavoja, tako da cijelo polje prolazi kroz plohu toliko puta, koliko ima zavoja i to uvijek u istom smislu.

Uzmimo sada, da pojednostavimo račun, da je torus vrlo tanak, tako da r (udaljenost od osi o) unutar torusa mnogo ne varira, pa možemo uzeti, da je i H približno konstantno, a tok vektora $\vec{B}$ je onda $Bf = \mu Hf$, gdje je f površina presjeka torusa, a μ permeabilnost medija unutar torusa. Ako ima w zavoja, onda je dakle tok kroz plohu jednak μHfw. Ako je r polumjer toga vrlo tankog torusa, bit će

$$\mu Hfw = \mu fw\frac{I_1}{2\pi r} = \mu fw\frac{Iw}{2\pi r}, \tag{287}$$

jer struja I u žici prolazi w puta kroz plohu svake paralela, pa je $I_1 = wI$.

Inducirani protunapon $-U$ bit će dakle prema (15)

$$-U = -\frac{d}{dt}\frac{\mu fIw^2}{2\pi r} = -\frac{\mu fw^2}{2\pi r}\frac{dI}{dt}, \tag{288}$$

dakle

$$I(t) = \int\limits_0^t \frac{dI}{dt}dt = \frac{2\pi r}{\mu fw^2}Ut, \tag{289}$$

ako u trenutku $t = 0$ još nije tekla struja. Prema tome je trenutna snaga

$$UI(t) = \frac{2\pi r}{\mu fw^2}U^2t, \tag{290}$$

dakle ukupno dobavljena energija A do trenutka t

$$A = \int\limits_0^t UI(t)dt = \frac{\pi r}{\mu fw^2}U^2t^2. \tag{291}$$

Ta energija mora da je uskladištena u magnetskom polju. Neka je gustoća energije polja W_m, dakle

$$A = W_m V = W_m 2r\pi f, \tag{292}$$

gdje je $V = 2\pi r f$ volumen torusa. Iz (291) i (292) izlazi

$$W_m = \frac{A}{2\pi r f} = \frac{U^2 t^2}{2\mu f^2 w^2}. \tag{293}$$

No s obzirom na (289) vrijedi

$$H = \frac{Iw}{2\pi r} = \frac{w}{2\pi r}\frac{2\pi r}{\mu f w^2} Ut = \frac{Ut}{\mu f w}, \tag{294}$$

tako da (293) prelazi u

$$W_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}HB. \tag{295}$$

Time je određena gustoća energije magnetskog polja.

Da nađemo gustoću energije W_e električkog polja, promatramo kuglin kondenzator, koji se sastoji iz dviju koncentričnih metalnih kugala između kojih se nalazi dielektrik s konstantom ε. Ako su kugle nabijene istim nabojem Q, ali različitog predznaka, lako je vidjeti, da je električno polje ograničeno na prostor između kugala. Zaista, zbog kugline simetrije polje će očito biti radijalno. Prema (196) bit će onda između kugala, tj. za $r_1 < r < r_2$, gdje su r_1 i r_2 polumjeri unutarnje i vanjske kugle,

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon}\vec{r}_0, \tag{296}$$

gdje je Q naboj unutarnje kugle. Naboj vanjske kugle je $-Q$, tako da za neku točku izvan nje (196) daje nulu, jer je ukupni naboj unutar kugle sa $r > r_2$ jednak $Q - Q = 0$. Isto tako je dakako polje unutra unutarnje kugle jednako nuli.

Računat ćemo sada rad, koji je potreban za nabijanje toga kondenzatora. Možemo kod toga zamišljati, da postepeno prenosimo male količine dQ elektriciteta s vanjske kugle na unutarnju. Time naboj unutarnje kugle poraste za dQ, a naboj vanjske se smanjuje za dQ i na taj način se unutarnja kugla nabija pozitivno, a vanjska negativno. Da prijenos naboja bude moguć, zamišljamo kroz dielektrik probušen tanak radijalni kanal. Budući da se tangenkcijalna komponenta od $\vec{F}$ mijenja neprekinuto kod prolaza kroz stijene kanala, a sam $\vec{F}$ u dielektriku uz stijene kanala je tangencijalan na te stijene, to možemo uzeti, da je polje $\vec{F}$ u kanalu vrlo približno isto kao u dielektriku, tj. dano formulom (296). Ako dakle na unutarnjoj kugli već imamo neki naboj Q, pa ga povećamo za dQ transportirajući dQ od vanjske kugle na unutarnju, moramo protiv polja obaviti rad

$$dA = dQ\int_{r_1}^{r_2} F dr = dQ\int_{r_1}^{r_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr =$$

$$= \frac{QdQ}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)QdQ. \tag{297}$$

Cijeli rad za postepeno nabijanje bit će dakle

$$A = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\int_0^Q QdQ = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{Q^2}{2}. \tag{298}$$

Uzmimo sada, da je kondenzator vrlo tanak, tj. da je $r_2 = r_1 + \delta$ sa malim δ, onda možemo približno pisati

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \frac{\delta}{r_1(r_1+\delta)} \approx \frac{\delta}{r_1^2}. \tag{299}$$

tj.

$$A = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\delta}{r_1^2}\frac{Q^2}{2}. \tag{300}$$

Volumen kugline ljuske kondenzatora je približno

$$V = 4r_1^2\pi\delta, \tag{301}$$

pa izlazi

$$\frac{A}{V} = \frac{Q^2}{2\,(4\pi)^2\, r_1^4\varepsilon}. \tag{302}$$

No $\vec{F}$ je u toj tankoj ljusci približno konstantan, pa prema (296) vrijedi

$$W_e = \frac{A}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon F^2 = \frac{1}{2}FD. \tag{303}$$

Ako uočimo, da se naše razmatranje ne bi ništa promijenilo, da je kod nabijanja kondenzatora već postojalo neko magnetsko polje, jer ono ne vrši rad kod transporta naboja, to vidimo, da će se jedna i druga gustoća energije naprosto zbrojiti, ako postoje oba polja. Prema tome je gustoća energije W elektromagnetskog polja dana sa

$$W = \frac{1}{2}\left(FD + HB\right). \tag{304}$$

Prelazimo na razmatranje o strujanju energije. Budući da će se u promjenjivom elektromagnetskom polju i gustoća energije mijenjati, to zbog neuništivosti energije ona mora da struji od mjesta, gdje se smanjuje gustoća energije k mjestima, gdje se povećava, a mora i da struji prema mjestima, gdje se pretvara u drugi oblik, npr. toplinu.

Tvrdimo, da se strujanje energije može prikazati tzv. **Poyntingovim**[11] **vektorom** $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \vec{F} \times \vec{H}. \tag{305}$$

Tu ćemo tvrdnju opravdati, ako pokažemo, da je tada bilanca energije ispravna. Da se to vidi, promatramo najprije izraz za divergenciju toga vektora:

$$\operatorname{div} \vec{S} = \nabla \vec{S} = \nabla(\vec{F} \times \vec{H}) = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \operatorname{rot} \vec{H}. \tag{306}$$

Uvrstimo li ovamo izraze za $\operatorname{rot} \vec{F}$ i $\operatorname{rot} \vec{H}$ iz Maxwellovih jednadžbi (1) i (2), izlazi

$$\operatorname{div} \vec{S} = -\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{F}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{F}\vec{G}. \tag{307}$$

U drugu ruku je uz vremenski konstantni ε i μ

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H}\vec{B} + \vec{F}\vec{D}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\vec{B} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}\vec{D} + \vec{F}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\mu\vec{H} + \vec{H}\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}\varepsilon\vec{F} + \vec{F}\varepsilon\frac{\partial \vec{F}}{\partial t}\right) = \mu\vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \varepsilon\vec{F}\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} =$$

$$= \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{F}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{308}$$

Prema tome je

$$\operatorname{div} \vec{S} = -\frac{\partial W}{\partial t} - \vec{F}\vec{G}. \tag{309}$$

Integriramo li to preko jednog dijela prostora omeđenog zatvorenom plohom i primjenimo lijevo Gaussov teorem, izlazi

$$\int\int \vec{S} d\vec{f} = -\frac{d}{dt}\int\int\int W dV - \int\int\int \vec{F}\vec{G} dV, \tag{310}$$

gdje smo u prvom članu desno znak deriviranja po t stavili pred integral. Taj integral je očito ukupna elektromagnetska energija A u tom dijelu prostora, pa možemo pisati

$$\int\int \vec{S} d\vec{f} + \int\int\int \vec{F}\vec{G} dV = -\frac{dA}{dt}. \tag{311}$$

Na desnoj strani piše negativno povećanje, dakle smanjenje elektromagnetske energije toga dijela prostora u jedinici vremena. Na lijevoj strani prvi član znači

[11] John Henry Poynting (1852.-1914.)

energiju, koja po jedinici vremena izlazi iz plohe, a drugi član je razvijena Joulova toplina po jedinici vremena, jer je, kako smo vidjeli, $\vec{F}\vec{G}$ gustoća snage, koja se prenosi na elektrone u vodičima. Bilanca energije je dakle ispravna za svaki dio prostora.

To doduše još nije dokaz, da je $\vec{S}$ zaista vektor strujanja energije, jer bismo mu mogli dodati bilo kakav bezizvorni vektor, pa da bilanca ostaje ispravna. No zbog jednostavnosti izraza $\vec{F}\times\vec{H}$ prihvaća se upravo taj vektor kao vektor strujanja energije. Treba pri tome prihvatiti predodžbu, da i statičkim elektromagnetskim poljima energija može strujati. No, ako se uoči, da su statička magnetska polja uvijek izazvana strujama, dakle elektricitetom u gibanju, čak i ona, koja pripadaju permanentnim magnetima (atomarne "Ampérove"[12] struje), onda ta konsekvencija više nije tako čudna.

Možda je korisno napomenuti, da kod prijenosa energije pomoću voda bez ohmskog otpora energija struji u okolnom izolatoru. U samoj žici je $\vec{F} = 0$, pa stoga energija ne struji. Ako ohmski otpor nije nula, dakle $\varkappa$ konačno, onda u žici energija struji radijalno od površine prema unutra i postepeno se pretvara u Joulovu toplinu. U okolnom izolatoru energija tada struji uglavnom duž žice, ali pri tome djelomično ulazi u žicu i tako snadbijeva pretvaranje u toplinu.

[12] André Marie Ampére (1775.-1836.)

7 Relativistička transformacija elektromagnetskog polja.

U ovome, što slijedi, služit ćemo se isključivo pravocrtnim pravokutnim koordinatnim sustavima.

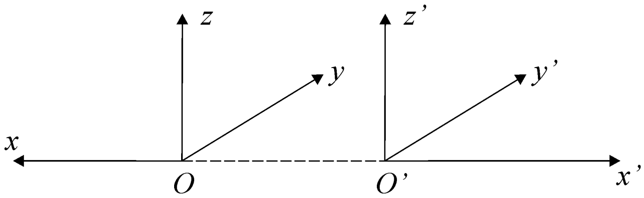
Pod inercijalnim koordinatnim sustavom razumijevamo sustav u kojemu se bilo koja čestica giba jednoliko i po pravcu, ako na nju ne djeluju nikakove sile (pa niti sila gravitacije, koju isključujemo radi naših razmatranja). U takvom sustavu vrijedi dakle zakon tromosti ili inercije. Sustav, kojemu je središte u težištu Sunčeva sustava, a osi su mu upravljene prema nekim zvijezdama stajačicama, predstavlja u vrlo visokom približenju inercijalni sustav. Svaki drugi koordinatni sustav, koji prema ovome miruje, a može biti prema njemu i zakrenut, također je inercijalan. Sve takve inercijalne koordinatne sustave, koji međusobno miruju, zovemo inercijalnim sustavom referencije. No i koordinatni sustav, koji se prema nekom inercijalnom sustavu giba jednoliko i translatorno (bez rotacije) opet je inercijalan i zajedno sa svim sustavima, koji prema njemu miruju, čini drugi inercijalni sustav referencije. Govorimo li samo o "inercijalnom sustavu", mislimo sustav referencije, ako nismo točno specifirali koordinatni sustav, kojim ćemo se služiti ili koordinatni sustav, ako je taj sustav izabran. U samom izricanju zakona inercije izraz "jednoliko gibanje" uključuje mjerenje vremena. Vrijeme se mjeri nekim periodičkim procesom, npr. mehanizmom poput džepna sata ili npr. "atomskim satom", gdje frekvencija od atoma emitirane svjetlosti služi za mjerenje vremena. "Jednoliko gibanje" čestice znači, da čestica u jednakim vremenima prevaljuje jednake putove. Ako dakle na pravčastoj stazi čestice odmjerimo i označimo jednake razmake, čestica te znakove mora susretati u jednakim razmacima vremena. Ti se razmaci vremena mogu izmjeriti jednim satom, koji putuje zajedno sa česticom. Satovi, koji miruju u koordinatnom sustavu i nalaze se na označenim mjestima, moraju onda biti tako sinkronizirani, da i po njima ti razmaci vremena budu jednaki. Pretpostavlja se dakako, da su svi upotrijebljeni satovi (i u različitim sustavima) točno jednako građeni. Vidimo, da definicija jednolikosti gibanja i time definicija inercijalnih sustava još ne pretpostavlja postupak sikroniziranja satova, što napominjemo radi točnog određenja naših pojmova.

Već je u klasičnoj mehanici vrijedio "princip relativnosti" (samo se tada nije tako nazivao), koji izriče, da su zakoni mehanike isti u svim tim sustavima. No za elektromagnetizam taj princip u starijim teorijama nije vrijedio, nego se smatralo, da Maxwellove jednadžbe vrijede točno samo u jednom privilegiranom sustavu, u kojemu miruje tzv. "eter", jedna vrlo fina tvar, koja se pretpostavljala kao nosilac elektromagnetskih pojava, kao što je zrak nosilac zvučnih pojava. Danas smatramo elelektromagnetsko polje u prostoru posebnim fizikalnim stanjem, kojemu nije potreban neki nosilac. Najfiniji elektromagnetski, napose optički pokusi su pokazali, da se ne mogu ustanoviti razlike u zakonima elektromagnetizma za različite inercijalne sustave referencija i stoga je *A.* Einstein[13] protegnuo princip relativnosti i na elektromagnetske pojave. Da to bude provedivo morali su

[13] Albert Einstein (1879.-1955.)

se zakoni mehanike nešto modificirati, a i preračunavanje prostornih i vremenskih podataka (koordinata) iz jednog sustava u drugi je valjalo promijeniti. Razne konsekvencije Einsteinove teorije, kao relativiranje istodobnosti (što je istodobno u jednom sustavu, ne mora biti u drugom), zatim Lorentzova kontrakcija pa dilatacije vremena vrlo su poznate, ali nas ovdje neće zanimati. No moramo nešto reći o preračunavanju prostorno–vremenskih podataka iz jednog inercijalnog sustava u drugi. To preračunavanje je sadržano u tzv. Lorentzovoj[14] transformaciji., dok se preračunavanje prema klasičnoj fizici naziva Galilejevom[15] transformacijom.

Da dođemo do preračunavanja prostorno–vremenskih podataka iz jednog inercijalnog sustava referencije u drugi, odabrat ćemo najprije koordinatne sustave u njima na takav način, da jednadžbe transformacije budu što jednostavnije. Odaberimo najprije jednu prostorno–vremensku točku, tj. jedan točkasti događaj (recimo bljesak jedne fotografske lampice, pa tamo stavimo oba ishodišta O i O' sustava S i S' i smatrajmo, da je na tom mjestu i tom trenutku u oba sustava nula sati, tj. $t = t' = 0$. Promatramo li stvari u necrtkanom sustavu referencije, točka O' će se gibati po nekom pravcu, koji odabiremo kao os x i ujedno os x', tj. osi x i x' neka se trajno pokrivaju. Os x neka je orijentirana od O' prema O (za $t > 0$), a x' od O prema O'. Onda će u oba sustava S i S' gibanje onoga drugoga sustava biti u smjeru negativne vlastite osi x odnosno x'. Osi y i z odnosno y' i z' odabiremo međusobno okomite i okomite na pravac osi x i x' i to tako, da se ravnina xy trajno pokriva s ravninom $x'y'$ (i ravnina xz s ravninom $x'z'$, što je posljedica toga) te ih orijentirajmo tako, da pozitivne osi y i y' budu upravljene u istu poluravninu xy odnosno $x'y'$ i analogno z, z' u istu poluravninu xz odnosno $x'z'$. Sustavi onda izgledaju prema (sl.6.) i razmiču se u pravcu osi x, x'. Ti su sustavi tako odabrani, da iz jednoga gledano drugi izgleda točno onako, kako iz drugoga gledano izgleda onaj prvi. Onaj tuđi se giba u smjeru negativne vlastite osi x nekom brzinom v. Ako su ti sustavi S i S' u smislu principa relativnosti ravnopravni, onda mora transformacija iz S u S' imati točno isti oblik kao transformacija iz S' u S.



Slika 6.

Sada ćemo formulirati neke principe, koji su vrijedili već u klasičnoj mehanici i toliko su očigledni, da jedva u njih možemo posumnjati. Ti su principi ovi:

I. Izotropnost prostora. U svakom inercijalnom sustavu u svakoj su točki svi smjerovi fizikalno ravnopravni.

II. Homogenost vremena. Isti pokus izveden na istom mjestu nekog inercijalnog sustava u različito vrijeme, daje isti rezultat.

[14]Hendrik Antoon Lorentz (1853.-1928.)
[15]Galileo Galilei (1564.-1642.)

III. Princip relativnosti. Svi su inercijalni sustavi ravnopravni.

Iz tih principa može se zaključiti, kakva mora biti transformacija između dvaju inercijalnih sustava. To je potanko izloženo u članku: D. Blanuša, Osnovi relativističke kinematike. Glasnik mat.–fiz. i astr. T.6(1951), br. 1–2, str. 1-22 (njemački tekst str. 23–32). Rezultat je ovaj: Neka su koordinatni sustavi S i S' odabrani prema (sl.6.). Prostorno-vremenske koordinate su x, y, z, t odnosno x', y', z', t'. Brzina ishodišta O' u smjeru negativne osi x, mjerena u sustavu S, neka je v. (Ista je brzina točke O u smjeru negativne osi x', mjerena u sustavu S'). Onda transformacija glasi

$$x' = \frac{1}{\alpha}\left(-x - vt\right), \tag{312}$$

$$y' = y, \tag{313}$$

$$z' = z, \tag{314}$$

$$t' = \frac{1}{\alpha}\left(kvx + t\right), \tag{315}$$

pri čemu je α kratica i to

$$\alpha = \sqrt{1 - kv^2}, \tag{316}$$

a k je konstanta koja ostaje neodređena.

Izračunamo li iz tih jednadžbi x, y, z, t, izlazi

$$x = \frac{1}{\alpha}\left(-x' - vt'\right), \tag{317}$$

$$y = y' \tag{318}$$

$$z = z' \tag{319}$$

$$t = \frac{1}{\alpha}\left(kvx' + t'\right) \tag{320}$$

tj. inverzna transformacija ima isti oblik, što smo već prije istakli kao nužno.

Iz principa **I, II, III**, ne može se odrediti konstanta k. Ako je ta konstanta jednaka nuli, onda izlazi Galilejeva transformacija

$$x' = -x - vt, \tag{321}$$

$$y' = y, \tag{322}$$

$$z' = z, \tag{323}$$

$$t' = t, \tag{324}$$

odnosno

$$x = -x' - vt', \tag{325}$$

$$y = y', \tag{326}$$

$$z = z', \tag{327}$$

$$t = t'. \tag{328}$$

Obično se orijentacija osi ne uzima kao u *slici 6* već se x-osi orijentiraju na istu stranu. Promijenimo li dakle orijentaciju osi x (*slika 7*) moramo u jednadžbama svagdje pisati $-x$ umjesto x. Izlaze tako jednadžbe

$$x' = \frac{1}{\alpha}\left(x - vt\right), \tag{329}$$

$$y' = y, \tag{330}$$

$$z' = z, \tag{331}$$

$$t' = \frac{1}{\alpha}\left(-kvx - t\right), \tag{332}$$

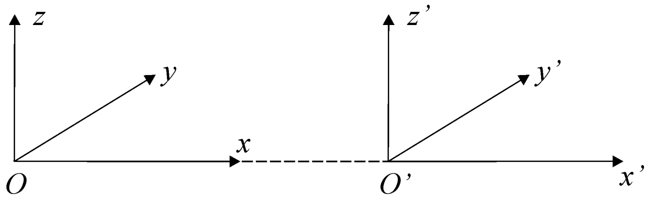
odnosno

$$x = \frac{1}{\alpha}\left(x' - vt'\right), \tag{333}$$

$$y = y', \tag{334}$$

$$z = z', \tag{335}$$

$$t = \frac{1}{\alpha}\left(-kvx' - t'\right). \tag{336}$$



Slika 7.

Vidi se, da sada inverzna transformacija nema točno isti oblik, jer u njoj v ima drugi predznak. To je razumljivo, jer prema (*slika 7*) O' u sustavu S odmiče u smjeru pozitivne osi x, dok O u sustavu S', odmiče u smjeru negativne osi x'. Analogno bi prema *slici 7* Galilejeva transformacija glasila.

$$x' = x - vt, \tag{337}$$

$$y' = y, \tag{338}$$

$$z' = z, \tag{339}$$

$$t' = t, \tag{340}$$

i

$$x = x' - vt', \tag{341}$$

$$y = y', \tag{342}$$

$$z = z', \tag{343}$$

$$t = t'. \tag{344}$$

Vidi se, da naši principi daju klasičnu Galilejevu transformaciju samo kao jednu mogućnost. Da se odluči, kolika je konstanta k, valjalo bi izvršiti neki eksperiment. Taj bi mogao biti mehanički, no mehanički eksperimenti u okviru današnjih mogućnosti nisu dosta točni, da bi se odredila konstanta k, koja je vrlo malena, pa se iz mehančkih eksperimenata ne vidi, da je različita od nule.

Mi ćemo tu konstantu moći odrediti na temelju zahtjeva, da princip relativnosti vrijedi i za elektromagnetske pojave.

Maxwellove jednadžbe (1) i (4) odnose se na pojave u mediju, koji miruje u inercijalnom sustavu, koji upotrebljavamo. U nekom drugom inercijalnom sustavu taj medij općenito neće mirovati, pa ne možemo zahtijevati, da u njemu jednadžbe vrijede nepromijenjeno. Ta teškoća otpada u vakuumu, pa ćemo se ovdje ograničiti na istraživanje transformacije elektromagnetskog polja u vakuumu i pretpostaviti ćemo, da u njemu nema naboja. Princip relativnosti onda zahtijeva, da Maxwellove jednadžbe za vakuum, tj.

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}, \tag{345}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{346}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 0, \tag{347}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0. \tag{348}$$

vrijede nepromijenjeno u svakom inercijalnom sustavu. Tražimo jednadžbe, kojima će se veličine $\vec{F}$, $\vec{H}$, mjerene u nekom sustavu S, preračunati u veličine $\vec{F}'$, $\vec{H}'$, mjerene u drugom sustavu S'.

Da ta transformacija bude jednoznačno određena treba povrh principa relativnosti prihvatiti još jednu tvrdnju:

IV. Invarijancija principa superpozicije. Transformacijom superpozicije dvaju polja dobiva se superpozicija transformiranih pojedinih polja.

Jasno je, da je superpozicija dvaju mogućih polja (tj. dvaju polja koja zadovoljavaju Maxwellove jednadžbe) opet moguće polje, što je posljedica linearnosti Maxwellovih jednadžbi. Princip superpozicije dakle sigurno vrijedi u svakom inercijalnom sustavu, jer su Maxwellove jednadžbe svagdje istoga oblika, dakle linearne. No nije unaprijed jasno, da će se superpozicijom dvaju polja dobiti polje, koje transformirano na drugi sustav daje superpoziciju transformiranih pojedinih polja, koje je doduše sigurno također jedno moguće polje, ali možda ne isto.

Ipak možemo uvidjeti da princip **IV** možemo prihvatiti. Zamislimo naime, da je polje $\vec{F}_1$, $\vec{H}_1$ u nekom dijelu prostora (vakuumu) uzrokovano nekim nabojima u gibanju, koji se nalaze izvan toga dijela protora, a polje $\vec{F}_2$, $\vec{H}_2$ nekim drugim nabojima i njihovim gibanjem. Ako onda postoje oba sustava naboja najedanput, dobit ćemo polje $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3$, $\vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \vec{H}_3$, sve to mjereno u nekom sustavu S. Mjerimo li ista polja u sustavu S', bit će po istoj argumentaciji $\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 = \vec{F}'_3$, $\vec{H}'_1 + \vec{H}'_2 = \vec{H}'_3$ gdje su to polja izazvana istim sustavima naboja, samo mjerena u drugom sustavu. No onda polje $\vec{F}'_1$, $\vec{H}'_1$ dobivamo transformacijom od $\vec{F}_1$, $\vec{H}_1$, jer je izazvano istim sustavom naboja, samo mjereno u drugom sustavu. Isto tako $\vec{F}'_2$, $\vec{H}'_2$ kao polje drugog sustava naboja, a $\vec{F}'_3$, $\vec{H}'_3$ mora biti rezultat transformacije polja $\vec{F}_3$, $\vec{H}_3$, jer je izazvano istim kombiniranim sustavom naboja. Time je princip **IV** fizikalno opravdan.

Prelazimo sada na razmatranje, koje će nas nužno dovesti do jednoznačno određene transformacije elektromagnetskog polja u vakuumu.

U prvom redu ćemo pokazati, da tražene transformacije moraju biti **linearne**, što će biti posljedica principa **IV**. Pri tome nam još treba fizikalno evidentna pretpostavka, da je transformacija **neprekinuta**, što grubo rečeno znači, da vrlo malo različita polja transformirana daju opet vrlo malo različita polja. Oštrije se neprekinutost transformacije može definirati pomoću pojma limesa. Imamo li niz polja $\left\{\vec{F}_1, \vec{H}_1\right\}$, $\left\{\vec{F}_2, \vec{H}_2\right\}$, ,..., $\left\{\vec{F}_n, \vec{H}_n\right\}$,..., onda kažemo, da ta polja teže prema polju $\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\}$, ako vrijedi $\vec{F}_n \to \vec{F}$ i $\vec{H}_n \to \vec{H}$, a to opet znači $|\vec{F}_n - \vec{F}| \to 0$ i $|\vec{H}_n - \vec{H}| \to 0$. Ekvivalentno je tome $F_{nx} \to F_x$, $F_{ny} \to F_y$, $F_{nz} \to F_z$, $H_{nx} \to H_x$, $H_{ny} \to H_y$, $H_{nz} \to H_z$, tj. svaka komponenta teži prema određenom limesu. Ako transformaciju označimo slovom T, tj. pišemo

$$\left\{\vec{F}', \vec{H}'\right\} = T\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\}, \tag{349}$$

onda se neprekinutost transformacije može formulirati u obliku

$$\lim_{n\to\infty} T\left\{\vec{F}_n, \vec{H}_n\right\} = T\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{\vec{F}_n, \vec{H}_n\right\}\right\}, \tag{350}$$

tj. transformirana polja nekog niza polja teže prema onom polju, koje se dobiva transformacijom limesa prvotnih polja. Ako je dakle

$$\left\{\vec{F}'_n, \vec{H}'_n\right\} = T\left\{\vec{F}_n, \vec{H}_n\right\}, \tag{351}$$

$$\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\vec{F}_n, \vec{H}_n\right\}, \tag{352}$$

$$\left\{\vec{F}', \vec{H}'\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\vec{F}'_n, \vec{H}'_n\right\}, \tag{353}$$

onda vrijedi (349).

Pišemo li princip **IV** u obliku

$$T\left\{\vec{F}_1 + \vec{F}_2, \vec{H}_1 + \vec{H}_2\right\} = T\left\{\vec{F}_1, \vec{H}_1\right\} + T\left\{\vec{F}_2, \vec{H}_2\right\} =$$

$$= \left\{\vec{F}'_1, \vec{H}'_1\right\} + \left\{\vec{F}'_2, \vec{H}'_2\right\} = \left\{\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2, \vec{H}'_1 + \vec{H}'_2\right\}, \tag{354}$$

lako je višekratnom primjenom te jednadžbe pokazati, da općenitije vrijedi

$$T\left\{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n, \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + ... + \vec{H}_n\right\}$$

$$= T\left\{\vec{F}_1, \vec{H}_1\right\} + T\left\{\vec{F}_2, \vec{H}_2\right\} + ... + T\left\{\vec{F}_n, \vec{H}_n\right\}. \tag{355}$$

Uzmemo li napose

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = ... = \vec{F}_n = \vec{F}, \tag{356}$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_2 = ...\vec{H}_n = \vec{H}, \tag{357}$$

to izlazi

$$T\left\{n\vec{F}, n\vec{H}\right\} = nT\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} = n\left\{\vec{F}', \vec{H}'\right\} = \left\{n\vec{F}', n\vec{H}'\right\}, \tag{358}$$

gdje je n prirodni broj.

Stavimo li u toj jednadžbi

$$\vec{F} = \frac{1}{n}\vec{F}_1, \quad \vec{H} = \frac{1}{n}\vec{H}_1, \tag{359}$$

to ona daje dalje

$$T\left\{\frac{1}{n}\vec{F}_1, \frac{1}{n}\vec{H}_1\right\} = \frac{1}{n}T\left\{\vec{F}_1, \vec{H}_1\right\}. \tag{360}$$

Dalje neka je

$$\vec{F}_1 = m\vec{F}_2, \quad \vec{H}_1 = m\vec{H}_2, \tag{361}$$

gdje je m prirodni broj, onda uvrštenje u (239) i primjena jednadžbe (358) daje

$$T\left\{\frac{m}{n}\vec{F}_2, \frac{m}{n}\vec{H}_2\right\} = \frac{1}{n}T\left\{m\vec{F}_2, m\vec{H}_2\right\} = \frac{m}{n}T\left\{\vec{F}_2, \vec{H}_2\right\}. \tag{362}$$

Možemo dakle reći, da vrijedi

$$T\left\{\alpha\vec{F}, \alpha\vec{H}\right\} = \alpha T\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} = \left\{\alpha\vec{F}', \alpha\vec{H}'\right\} \tag{363}$$

za svaki pozitivni racionalni broj α. Za negativne brojeve ta relacija vrijedi, ako vrijedi za $\alpha = -1$, jer onda izlazi dvokratnom primjenom jednadžbe (362). No za $\alpha = -1$ relacija zaista vrijedi, ako uzmemo u obzir, da je dakako $T\{0,0\} = \{0,0\}$, tj. ako u nekom sustavu nema elektromagnetskog polja, onda ga nema ni u kojem drugom sustavu. Treba samo u (354) staviti $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ i $\vec{H}_2 = -\vec{H}_1$, pa izlazi odmah (363) za $\alpha = -1$.

Da relacije (363) protegnemo i na iracionalne brojeve α, dakle time na sve brojeve α, potrebna je pretpostavka neprekinutosti transformacije. Ako je α neki iracionalni broj, on se uvijek može prikazati kao limes niza racionalnih brojeva (npr. kao niz decimalnih razlomaka, koji se dobivaju, ako se u beskonačnom decimalnom razlomku broja α uzima u obzir sve veći broj decimala). Neka je dakle

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha, \quad \text{tada je,} \quad \lim_{n\to\infty}\left\{\alpha_n\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\alpha_n\vec{F}, \alpha_n\vec{H}\right\} =$$

$$= \left\{\alpha\vec{F}\alpha\vec{H}\right\} = \alpha\left\{\vec{F},\vec{H}\right\}, \tag{364}$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n, ...$ racionalni brojevi, a α iracionalan broj. Sada je zbog (363)

$$T\left\{\alpha_n\vec{F},\alpha_n\vec{H}\right\} = \alpha_n T\left\{\vec{F},\vec{H}\right\} \quad (n{=}1{,}2{,}3{,}...). \tag{365}$$

Dalje je zbog (350)

$$\lim_{n\to\infty} T\left\{\alpha_n\vec{F},\alpha_n\vec{H}\right\} = T\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{\alpha_n\vec{F},\alpha_n\vec{H}\right\}\right\} = T\left\{\alpha\vec{F},\alpha\vec{H}\right\}, \tag{366}$$

a u drugu ruku je zbog (365)

$$\lim_{n\to\infty} T\left\{\alpha_n\vec{F},\alpha_n\vec{H}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\alpha_n T\left\{\vec{F},\vec{H}\right\}\right\} = \alpha T\left\{\vec{F},\vec{H}\right\}. \tag{367}$$

Iz (366) i (367) izlazi (363) za iracionalno α.

Kombinacijom jednadžbe (363) i principa **IV**, tj. jednadžbe (354), dobivamo lako

$$T\left\{\alpha\left\{\vec{F}_1,\vec{H}_1\right\} + \beta\left\{\vec{F}_2,\vec{H}_2\right\}\right\} = T\left\{\alpha\vec{F}_1 + \beta\vec{F}_2, \alpha\vec{H}_1 + \beta\vec{H}_2\right\} =$$

$$= T\left\{\alpha\vec{F}_1,\alpha\vec{H}_1\right\} + T\left\{\beta\vec{F}_2,\beta\vec{H}_2\right\} = \alpha T\left\{\vec{F}_1,\vec{H}_1\right\} + \beta T\left\{\vec{F}_2,\vec{H}_2\right\}. \tag{368}$$

To znači, da je transformacija linearne kombinacije dvaju polja jednaka linearnoj kombinaciji transformiranih polja. Ako transformaciju

$$\left\{\vec{F}',\vec{H}'\right\} = T\left\{\vec{F},\vec{H}\right\} \tag{369}$$

napišemo opširnije, tj. za svaku komponentu, ona općenito glasi

$$F'_x = f_1(F_x, F_y, F_z, H_x, H_y, H_z), \tag{370}$$

$$F'_y = f_2(.............), \tag{371}$$

$$F'_z = f_3(.............), \tag{372}$$

$$H'_x = f_4(.............), \tag{373}$$

$$H'_y = f_5(.............), \tag{374}$$

$$H'_z = f_6(.............), \tag{375}$$

gdje su $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ neke funkcije istih 6 varijabli $F_x, F_y, F_z, H_x, H_y, H_z$. Jednadžba (368) onda znači, da će npr. za funkciju f_1 vrijedi

$$f_1(\alpha F_{1x} + \beta F_{2x}, \alpha F_{1y} + \beta F_{2y}, \alpha F_{1z} + \beta F_{2z}, \alpha H_{1x} + \beta H_{2x},$$

$$\alpha H_{1y} + \beta H_{2y}, \alpha H_{1z} + \beta H_{2z}) = \alpha f_1(F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, H_{1x}, H_{1y}, H_{1z})$$

$$+\beta f_1(F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, H_{2x}, H_{2y}, H_{2z}), \tag{376}$$

a analogne jednadžbe vrijede za ostalih 5 funkcija f_2 do f_6. Lako se dokazuje da su funkcije s takvim svojstvom nužno linearne. Naša transformacija dakle mora imati opći oblik.

$$F'_x = a_{11}F_x + a_{12}F_y + a_{13}F_z + a_{14}H_x + a_{15}H_y + a_{16}H_z, \tag{377}$$

$$F'_y = a_{21}F_x + a_{22}F_y + a_{23}F_z + a_{24}H_x + a_{25}H_y + a_{26}H_z, \tag{378}$$

$$F'_z = a_{31}F_x + a_{32}F_y + a_{33}F_z + a_{34}H_x + a_{35}H_y + a_{36}H_z, \tag{379}$$

$$H'_x = a_{41}F_x + a_{42}F_y + a_{43}F_z + a_{44}H_x + a_{45}H_y + a_{46}H_z, \tag{380}$$

$$H'_y = a_{51}F_x + a_{52}F_y + a_{53}F_z + a_{54}H_x + a_{55}H_y + a_{56}H_z, \tag{381}$$

$$H'_z = a_{61}F_x + a_{62}F_y + a_{63}F_z + a_{64}H_x + a_{65}H_y + a_{66}H_z, \tag{382}$$

gdje će koeficijenti $a_{ik}(i, k = 1, ..., 6)$ općenito ovisiti o položaju koordinatnih sustava i njihovoj relativnoj brzini.

Na temelju linearnosti tražene transformacije elektromagnetskog polja moći ćemo odrediti konstantu k u transformaciji prostorno–vremenskih koordinata.

Neka su dakle zadana dva inercijalna koordinatna sustava prema sl.6. Transformacija prostorno–vremenskih koordinata x, y, z, t ima onda oblik (312, 313, 314, 315). U svakom od sustava moraju vrijediti Maxwellove jednadžbe za vakuum, dakle i d'Alembertova jednadžba za svaku komponentu vektora $\vec{F}$ i $\vec{H}$. Pri tom ćemo d'Alembertov operator u sustavu S' označiti sa $\Box'$, tj. stavit ćemo

$$\Box' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}. \tag{383}$$

Vrijedi dakle primjerice

$$\Box' F'_x = 0 \tag{384}$$

u sustavu S'. Primjenimo li operator $\Box$ (koji se odnosi na sustav S) na jednadžbu (377), izlazi

$$\Box F'_x = a_{11}\Box F_x + a_{12}\Box F_y + a_{13}\Box F_z + a_{14}\Box H_x + a_{15}\Box H_y + a_{16}\Box H_z. \tag{385}$$

No desno su svi članovi jednaki nuli, dakle vrijedi ne samo (384), već i

$$\Box F'_x = 0. \tag{386}$$

Promatranjem inverzne transformacije dobili slično, da vrijedi

$$\Box' F_x = 0 \tag{387}$$

i analogno za sve ostale komponente vektora $\vec{F}$ i $\vec{H}$. Možemo dakle primjeniti bilo koji od dva d'Alembertova operatora $\Box$ i $\Box'$ na bilo koju od komponenata vektora $\vec{F}$, $\vec{H}$, $\vec{F}'$ i $\vec{H}'$ i dobiveni izraz staviti jednak nuli.

Dakako, $\Box$ sadržava operatore deriviranja po x, y, z, t, a F'_x je funkcija od x', y', z', t', pa npr. kod tvorbe izraza $\Box F'_x$ treba $F'x$ derivirati kao složenu funkciju uzimajući u obzir, da su x', y', z', t', funkcije od x, y, z, t prema (312), (313), (314), (315). Trebat će nam u tom smislu veza između operatora $\Box$ i $\Box'$. Prema pravilima o deriviranju složenih funkcija i s obzirom na (317), (318), (319), (320) vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{kv}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{388}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}, \tag{389}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial x}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \tag{390}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{v}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{391}$$

Dalje dobivamo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \left(-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{kv}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2kv}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{k^2v^2}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{392}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{393}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{394}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \left(-\frac{v}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 = \frac{v^2}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2v}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{395}$$

Prema tome je

$$\Box' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{1}{\alpha^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\alpha^2}\left(k^2 v^2 - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2v}{\alpha^2}\left(k - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}. \tag{396}$$

Vrijedi dakle primjerice

$$\Box' H_x = \frac{1}{\alpha^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}$$

$$+\frac{1}{\alpha^2}\left(k^2 v^2 - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} - \frac{2v}{\alpha^2}\left(k - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} = 0. \tag{397}$$

Ta jednadžba mora vrijediti za H_x bilo kojega mogućeg elektromagnetskog polja.

Odaberimo Hertzov vektor s komponentama

$$Z_x = Z_y = 0, \;\; Z_z = 3c^2 x y t^2 + x y^3 \tag{398}$$

Taj vektor zadovoljava d'Alembertovu jednadžbu. Trivijalno je, da to čine komponente Z_x i Z_y. Dalje je

$$\frac{\partial^2 Z_z}{\partial x^2} = 0, \;\; \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2} = 6xy, \;\; \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2} = 0, \;\; \frac{\partial^2 Z_z}{\partial t^2} = 6c^2 xy. \tag{399}$$

Stoga je zaista i

$$\Box Z_z = 0. \tag{400}$$

Magnetsko polje je dano sa

$$\vec{H} = \varepsilon_0 \mathrm{rot}\,\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}, \tag{401}$$

dakle

$$H_x = \varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Z_z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial Z_y}{\partial t}\right) = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial y}\left(6c^2 x y t\right) = 6\varepsilon_0 c^2 x t. \tag{402}$$

Prema tome je

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0, \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial t} = 6\varepsilon_0 c^2, \tag{403}$$

i jednadžba (397) daje

$$-\frac{2v}{\alpha^2}\left(k-\frac{1}{c^2}\right)6\varepsilon_0 c^2 = 0 \text{ ili } k=\frac{1}{c^2}, \tag{404}$$

čime je konstanta k određena. Vidimo dakle, da zahtjev principa relativnosti za elektromagnetske pojave, tj. zahtjev invarijantosti Maxwellovih jednadžbi nužno dovodi do toga, da k mora biti različit od nule, tj. da ne vrijedi Galilejeva transformacija, već transformacija, koja za sustave prema sl.6. glasi

$$x'=\frac{1}{\alpha}\left(-x-vt\right), \tag{405}$$

$$y'=y, \tag{406}$$

$$z'=z, \tag{407}$$

$$t'=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{vx}{c^2}+t\right) \tag{408}$$

odnosno

$$x=\frac{1}{\alpha}\left(-x'-vt'\right), \tag{409}$$

$$y=y', \tag{410}$$

$$z=z', \tag{411}$$

$$t=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{vx'}{c^2}+t'\right) \tag{412}$$

a za sustave prema sl.7.

$$x'=\frac{1}{\alpha}\left(x-vt\right), \tag{413}$$

$$y'=y, \tag{414}$$

$$z'=z, \tag{415}$$

$$t'=\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{vx}{c^2}+t\right) \tag{416}$$

odnosno

$$x = \frac{1}{\alpha}(x + vt), \tag{417}$$

$$y = y', \tag{418}$$

$$z = z', \tag{419}$$

$$t = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{vx}{c^2} + t\right) \tag{420}$$

Pri tome je α kratica

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{421}$$

Ova se transformacija naziva **Lorentzovom transformacijom**.

Mogli bismo sada napisati konkretno, kako glasi transformacija elektromagnetskog polja i uvjeriti se, da Maxwellove jednadžbe ostavljaju invarijantne. No ne bismo onda znali, da li je to jedino moguća takva transformacija, tj. da li je ona našim upotrijebljenim principima potpuno određena. Želimo dakle istražiti, da li može postojati više takvih transformacija. Za to je potrebno nešto dulje razmatranje.

Označujući linearne transformacije, kojima podvrgavamo komponente vektora $\vec{F}$ i $\vec{H}$ slovom T, kojemu ćemo po potrebi pridati neki indeks, možemo T shvatiti kao operator, za koji definiramo računske operacije.

a) Množenje operatora T s brojem.

Ako je T neka transformacija

$$\left\{\vec{F}', \vec{H}'\right\} = T\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\}, \tag{422}$$

onda pod $T_1 = \alpha T$, gdje je α realan broj, razumijevamo u smislu (363)

$$T_1\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} = \alpha T\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} = \alpha\left\{\vec{F}', \vec{H}'\right\} = \left\{\alpha\vec{F}', \alpha\vec{H}'\right\}, \tag{423}$$

b) Zbrajanje dvaju operatora.

Ako su T_1, T_2 transformacije

$$\left\{\vec{F}_1', \vec{H}_1'\right\} = T_1\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\}, \tag{424}$$

$$\left\{\vec{F}_2', \vec{H}_2'\right\} = T_2\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\}, \tag{425}$$

onda pod transformacijom $T_3 = T_1 + T_2$ razumijevamo

$$T_3\left\{\vec{F},\vec{H}\right\} = T_1\left\{\vec{F},\vec{H}\right\} + T_2\left\{\vec{F},\vec{H}\right\} =$$

$$= \left\{\vec{F}_1',\vec{H}_1'\right\} + \left\{\vec{F}_2',\vec{H}_2'\right\} = \left\{\vec{F}_1' + F_2',\vec{H}_1' + \vec{H}_2'\right\}. \tag{426}$$

c) Množenje dvaju operatora T.

Ako su T_1 i T_2 transformacije prema (424,425), onda pod transformacijom $T_3 = T_2T_1$ razumijevamo

$$T_3\left\{\vec{F},\vec{H}\right\} = T_2\left\{T_1\left\{\vec{F},\vec{H}\right\}\right\} = T_2\left\{\vec{F}_1',\vec{H}_1'\right\}, \tag{427}$$

tj. transformacije treba izvršiti jednu za drugom i to prema poređaju faktora s desna na lijevo.

Razumije se, da kod svake transformacija moramo znati, kako se istodobno transformiraju koordinate x, y, z, t.

Ostaju li Maxwellove jednadžbe za vakuum invarijantne, ako se vektori $\vec{F},\vec{H}$ podvrgnu transformaciji T_1 ili T_2? Ostati će zbog svoje linearnosti invarijantne i pod transformacijom T_1, a isto tako i pod transformacijom T_2T_1, jer ta transformacija znači uzastopno izvršavanje transformacija T_1 i T_2, koje obje puštaju invarijante Maxwellove jednadžbe.

Tražit ćemo sada najprije najopćenitiju transformaciju, koje pušta Maxwellove jednadžbe invarijantne, ako pri tome ostajemo u istom koordinatnom sustavu, tj. ako se x, y, z, t kod toga uopće ne mijenjaju. Treba dakle izraze (377, 378, 379, 380, 381, 382) uvrstiti u Maxwellove jednadžbe napisane za crtkane veličine, ostavljajući derivacije po x, y, z, t, jer su crtkane koordinate $\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}', \mathrm{t}'$ identične s necrtkanim. Dobivene relacije onda moraju biti zadovoljene za svako polje, koje zadovoljava Maxwellove jednadžbe za necrtkane veličine.

Pokušajmo promatrati polje, kod kojega su sve komponente vektora $\vec{F},\vec{H}$ linearne funkcije od x, y, z, t, tj. izrazi oblika $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t$. U tom slučaju sve parcijalne derivacije prvoga reda komponenata od $\vec{F}$ i $\vec{H}$ po koordinatama postaju konstane. Tih konstanata ima 24 (6 komponenata, svaka ima 4 derivacije). Budući da Maxwellove jednadžbe predstavljaju 8 skalarnih jednadžbi, to možemo očekivati, da će 16 komponenata biti po volji odaberivo, a ostalih 8 će onda biti određeno tako, da Maxwellove jednadžbe budu zadovoljene. Npr. možemo za tih 8 konstanata odabrati sve parcijalne derivacije po vremenu (ima ih 6) koje su po jedna na desnoj strani prvih 6 skalarnih Maxwellovih jednadžbi (koje odgovaraju prvim dvjema vektorskim jednadžbama) i recimo, derivacije $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ i $\frac{\partial H_z}{\partial z}$, koje se pojavljuju samo u posljednjim dvjema skalarnim jednadžbama ($\operatorname{div}\vec{F} = 0$ i $\operatorname{div}\vec{H} = 0$), pa se iz njih mogu odrediti. Sve ostale derivacije možemo smatrati po volji odaberivim konstantama.

Počnimo sa x–komponentom jednadžbe rot $\vec{H}' = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{F}'}{\partial t}$:

$$\frac{\partial H'_z}{\partial y} - \frac{\partial H'_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial F'_x}{\partial t}. \tag{428}$$

Izrazit ćemo pojedine članove pomoću necrtkanih veličina uzevši u obzir Maxwellove jednadžbe za necrtkane veličine, tako da konačni izrazi sadržavaju samo po volji odaberive derivacije.

$$\frac{\partial F'_x}{\partial t} = a_{11}\frac{\partial F_x}{\partial t} + a_{12}\frac{\partial F_y}{\partial t} + a_{13}\frac{\partial F_z}{\partial t} + a_{14}\frac{\partial H_x}{\partial t} + a_{15}\frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$+a_{16}\frac{\partial H_z}{\partial t} = a_{11}\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + a_{12}\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$

$$+a_{13}\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) + a_{14}\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}\right)$$

$$+a_{15}\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + a_{16}\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right); \tag{429}$$

$$\frac{\partial H'_z}{\partial y} = a_{61}\frac{\partial F_x}{\partial y} + a_{62}\frac{\partial F_y}{\partial y} + a_{63}\frac{\partial F_z}{\partial y} + a_{64}\frac{\partial H_x}{\partial y} + a_{65}\frac{\partial H_y}{\partial y} + a_{66}\frac{\partial H_z}{\partial y}; \tag{430}$$

$$-\frac{\partial H'_y}{\partial z} = -a_{51}\frac{\partial F_x}{\partial z} - a_{52}\frac{\partial F_y}{\partial z} - a_{53}\frac{\partial F_z}{\partial z} - a_{54}\frac{\partial H_x}{\partial z} - a_{55}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

$$-a_{56}\frac{\partial H_z}{\partial z} = -a_{51}\frac{\partial F_x}{\partial z} - a_{52}\frac{\partial F_y}{\partial z} + a_{53}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right) - a_{54}\frac{\partial H_x}{\partial z}$$

$$-a_{55}\frac{\partial H_y}{\partial z} + a_{56}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right). \tag{431}$$

Po uvrštenju u jednadžbu (428) moraju koeficijenti istih derivacija lijevo i desno biti jednaki, jer su te derivacije po volji odaberive (pa možemo, recimo, sve staviti jednake nuli, osim one, čiji koeficijent promatramo). Dobivamo tako: iz koeficijenata od $\frac{\partial H_z}{\partial y}$:

$$a_{11} = a_{66}, \tag{432}$$

iz koeficijenta od $\frac{\partial F_y}{\partial z}$:

$$a_{14} = -\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}a_{52}. \tag{433}$$

Ostale koeficijente ne računamo, jer ćemo dotične rezultate dobiti promatranjem jednadžbe

$$\frac{\partial F'_x}{\partial x}+\frac{\partial F'_y}{\partial y}+\frac{\partial F'_z}{\partial z}=0. \tag{434}$$

Imat ćemo:

$$\frac{\partial F'_x}{\partial x}=a_{11}\frac{\partial F_x}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial F_y}{\partial x}+a_{13}\frac{\partial F_z}{\partial x}+a_{14}\frac{\partial H_x}{\partial x}+a_{15}\frac{\partial H_y}{\partial x}+a_{16}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \tag{435}$$

$$\frac{\partial F'_y}{\partial y}=a_{21}\frac{\partial F_x}{\partial y}+a_{22}\frac{\partial F_y}{\partial y}+a_{23}\frac{\partial F_z}{\partial y}+a_{24}\frac{\partial H_x}{\partial y}+a_{25}\frac{\partial H_y}{\partial y}+a_{26}\frac{\partial H_z}{\partial y}, \tag{436}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F'_z}{\partial z}&=a_{31}\frac{\partial F_x}{\partial z}+a_{32}\frac{\partial F_y}{\partial z}+a_{33}\frac{\partial F_z}{\partial z}+a_{34}\frac{\partial H_x}{\partial z}+a_{35}\frac{\partial H_y}{\partial z}+a_{36}\frac{\partial H_z}{\partial z}\\&=a_{31}\frac{\partial F_x}{\partial z}+a_{32}\frac{\partial F_y}{\partial z}-a_{33}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}+\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)+a_{34}\frac{\partial H_x}{\partial z}+\\&+a_{35}\frac{\partial H_y}{\partial z}-a_{36}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{437}$$

Uvrštenje tih izraza u (434) i uspoređivane koeficijenata derivcija po redu: $\frac{\partial F_x}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial x}$, $\frac{\partial F_z}{\partial x}$, $\frac{\partial H_x}{\partial x}$, $\frac{\partial H_y}{\partial x}$, $\frac{\partial H_z}{\partial x}$, $\frac{\partial F_x}{\partial y}$, $\frac{\partial F_y}{\partial y}$, $\frac{\partial F_z}{\partial y}$, $\frac{\partial H_x}{\partial y}$, $\frac{\partial H_y}{\partial y}$, $\frac{\partial H_z}{\partial y}$, $\frac{\partial F_x}{\partial z}$, $\frac{\partial F_y}{\partial z}$, $\frac{\partial H_x}{\partial z}$, $\frac{\partial H_y}{\partial z}$, daje ove rezultate:

$$a_{11}=a_{33}, \tag{438}$$

$$a_{12}=0, \tag{439}$$

$$a_{13}=0, \tag{440}$$

$$a_{14}=a_{36}, \tag{441}$$

$$a_{15}=0, \tag{442}$$

$$a_{16}=0, \tag{443}$$

$$a_{21}=0, \tag{444}$$

$$a_{22} = a_{33}, \tag{445}$$

$$a_{23} = 0, \tag{446}$$

$$a_{24} = 0, \tag{447}$$

$$a_{25} = a_{36}, \tag{448}$$

$$a_{26} = 0, \tag{449}$$

$$a_{31} = 0, \tag{450}$$

$$a_{32} = 0, \tag{451}$$

$$a_{34} = 0, \tag{452}$$

$$a_{35} = 0. \tag{453}$$

Jednadžba

$$\frac{\partial H_x'}{\partial x} + \frac{\partial H_y'}{\partial y} + \frac{\partial H_z'}{\partial z} = 0 \tag{454}$$

vodi na isti račun, samo je prvi indeks svih koeficijenata za 3 veći. Izlaze stoga rezultati:

$$a_{41} = a_{63}, \tag{455}$$

$$a_{42} = 0, \tag{456}$$

$$a_{43} = 0, \tag{457}$$

$$a_{44} = a_{66}, \tag{458}$$

$$a_{45} = 0, \tag{459}$$

$$a_{46} = 0, \tag{460}$$

$$a_{51} = 0, \tag{461}$$

$$a_{52} = a_{63}, \tag{462}$$

$$a_{53} = 0, \tag{463}$$

$$a_{54} = 0, \tag{464}$$

$$a_{55} = a_{66}, \tag{465}$$

$$a_{56} = 0, \tag{466}$$

$$a_{61} = 0, \tag{467}$$

$$a_{62} = 0, \tag{468}$$

$$a_{64} = 0, \tag{469}$$

$$a_{65} = 0. \tag{470}$$

Ostale jednadžbe ne promatramo, jer ne daju ništa novo, tako da su dobivene relacije svi uvjeti, koje invarijancija Maxwellovih jednadžbi nameće koeficijentima $a_{ik}(i, k = 1, ..., 6)$.

Stavimo li u smislu jednadžbi (432), (438), (445), (458), (465)

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a_{55} = a_{66} = k_1 \tag{471}$$

i u smislu jednadžbi (433), (441), (448), (455), (462)

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}a_{14} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}a_{25} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}a_{36} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}a_{41} =$$

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}a_{52} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}a_{63} = k_2 \tag{472}$$

to će shema koeficijenata ili, kako se još kaže, matrica koeficijenata a_{ik} izgledati ovako:

$$T = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & -k_2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & -k_2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & -k_2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \\ k_2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} & 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} & 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \tag{473}$$

pri čemu smo tu matricu označili sa T, jer ona stvarno karakterizira transformaciju T.

Lako je uvidjeti u smislu (423) i (424), (425), (426) da se općenito matrica za αT dobiva iz matrice za T, da se svi elementi od T množe s α, dalje da se iz matrica T_1 i T_2 dobiva matrica $T_1 + T_2$ tako da se istoimeni elementi (tj. elementi s istim indeksima) zbroje. Stoga možemo transformaciju (293) prikazati u obliku

$$T = k_1 I + k_2 T_d, \tag{474}$$

gdje je I tzv. identična transformacija s "jediničnom" matricom I:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{475}$$

koja ostavlja polje nepromijenjeno, jer daje $F'_x = F_{x'}$, $F'_y = F_{y'}$, itd., dok je T_d matrica

$$T_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{476}$$

koja daje transformaciju

$$F'_x = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_x, \tag{477}$$

$$F'_y = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_y, \tag{478}$$

$$F'_z = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_z, \tag{479}$$

$$H'_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} F_x, \tag{480}$$

$$H'_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} F_y, \tag{481}$$

$$H'_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} F_z, \tag{482}$$

ili kraće napisano,

$$\vec{F}' = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \vec{H}, \tag{483}$$

$$\vec{H}' = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \vec{F}. \tag{484}$$

Tako dobiveno polje nazivat ćemo "dualno polje" i transformaciju T_d dualnom transformacijom (odatle indeks d).

Lako je provjeriti, da ta transformacija zaista ostavlja Maxwellove jednadžbe invarijantne. To trivijalno vrijedi i za (475), pa stoga i za (474), čime je potvrđena naša tvrdnja, da preostale jednadžbe, koje nismo računali, ne daju daljih uvjeta za koefiocijente a_{ik}. Transformacija (474) je dakle najopćenitija linearna transformacija, koja ostavlja Maxwellove jednadžbe invarijantne, ako ostajemo u istom koordinatnom sustavu.

Treba sada nešto reći o prijelazu od desnog sustava na lijevi.

Vektorski produkt je definiran sa

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{485}$$

Načinimo li transformaciju

$$x' = -x, \tag{486}$$

$$y' = y, \tag{487}$$

$$z' = z, \tag{488}$$

onda to znači, da smo osi x obrnuli smjer, a ostale osi ostavili netaknute. Iz desnog sustava je time postao lijevi. Za jedinične vektore onda vrijedi

$$\vec{i}' = -\vec{i}, \tag{489}$$

$$\vec{j}' = \vec{j}, \tag{490}$$

$$\vec{k}' = \vec{k}, \tag{491}$$

a komponente vektora $\vec{a}$ su u novom sustavu

$$a'_x = -a_x, \tag{492}$$

$$a'_y = a_y, \tag{493}$$

$$a'_z = a_z \tag{494}$$

i analogno za vektor $\vec{b}$. Vrijedi dakle

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ -a'_x & a'_y & a'_z \\ -b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix}. \tag{495}$$

Definiramo li dakle vektorski produkt u lijevom sustavu analognom determinantom (485), onda to znači, da kod prijelaza na lijevi sustav taj produkt mijenja predznak. Zaista autori, koji upotrebljavaju lijeve koordinatne sustave (naročito Francuzi) definiraju vektorski produkt s obrnutim smjerom. Kažemo, da je vektorski produkt "aksijalni" vektor, dok se obični vektori zovu "polarni" vektori.

Analogni vrijedi za $\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$. I on ima kod autora, koji se služe lijevim sustavima, obrnuti smjer.

Posljedica je toga, da se u prve dvije Maxwellove jednadžbe moraju na jednoj strani promijeniti predznaci, kada se one odnose na lijevi koordinatni sustav.

No zapravo to fizikalno nije sasvim opravdano. Moglo bi se naime postići, da te jednadžbe ostanu iste, ako se u lijevom sustavu ili $\vec{F}$ ili $\vec{H}$ računa u obrnutom smjeru. Za $\vec{F}$ je to fizikalno neprihvatljivo, jer je $\vec{F}$ definirano kao sila na jedinicu naboja i ta sila ima sasvim određen smjer, koji se ne može promjeniti prijelazom na drugi sustav. Naprotiv, smjer vektora $\vec{H}$ je stvar konvencije. Mogli bismo magnetskom polju obrnuti smjer, tj. svim magnetima pripisati obrnuti polaritet, ako istodobno sva pravila "desne ruke" pretvorimo u pravila "lijeve ruke" i obrnuto. Opet bi se sve slagalo s fizikalnim opažanjima. To se može još nešto bolje shvatiti, ako se odvažimo na jednu matematičku spekulaciju. Uzmimo da se može neki fizikalni laboratorij u četverodimenzionalnom prostoru, u kojem neka se nalazi naš trodimenzionalni prostor, preklopiti, tj. zakrenuti za 180^o oko jedne svoje vertikalne ravnine, slično kao što se dio ravnine može u prostoru preklopiti oko jednog pravca te ravnine. Poslije preklapanja laboratorij bi se vratio u naš prostor i izgledao bi kao da je zrcaljen na toj ravnini. Fizičar u laboratoriju bi tvrdio, da mu je desna ruka ono, što se nama čini da je lijeva itd. Ako mu je na stolu bila uspravna uzvojnica, kroz koju je tekla struja u pozitivnom smislu, dakle magnetsko polje bilo upravljeno prema gore, sada je zrcaljena, pa struja teče u negativnom smislu i mi ćemo reći, da je magnetsko polje upravljeno prema dolje. Fizičar laboratorija će reći naprotiv, da to polje još uvijek prema gore, jer za njega se subjektivno nije ništa promijenilo.

On će dakako tvrditi da struja teče još u pozitivnom smislu i primjenjujući, recimo pravilo desne ruke, on će se služiti lijevom rukom tvrdeći, da mu je to desna. Možda je iz ove spekulacije nešto jasnije, da je smjer magnetskog polja zaista konvencija.

Za naše svrhe je poželjno, da Maxwellove jednadžbe budu invarijatne kod prijelaza na bilo koje inercijalne sustave, pa ćemo stoga biti konsekventni i obrnut ćemo kod prijelaza na lijevi sustav magnetskom polju smjer. Dotična transformacija, koja se vrši, ako se koordinate transformiraju prema (486), (487), (488), glasit će dakle

$$\vec{F}' = \vec{F}, \tag{496}$$

$$\vec{H}' = -\vec{H} \tag{497}$$

ili opširnije, s obzirom na (492), (493), (494),

$$F'_x = -F_x, \tag{498}$$

$$F'_y = F_y, \tag{499}$$

$$F'_z = F_z, \tag{500}$$

$$H'_x = H_x, \tag{501}$$

$$H'_y = -H_y, \tag{502}$$

$$H'_z = -H_z. \tag{503}$$

Ako tu transformaciju "zrcaljenje" označimo sa T_{rx} (indeks r podsjeća na riječ refleksija, a indeks x označuje, da je zrcaljeno u smjeru osi x, tj. prema ravnini yz), onda je matrica dana sa

$$T_{rx} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{504}$$

Promatramo li zrcaljenje s obzirom na ma koju ravninu kroz ishodište, opet će vrijediti (496), (497), ali će se koordinate drukčije transformirati i matrica (504) će biti drukčija. Općenito ćemo takvu matricu zvati T_r, dok će npr. T_{ry} biti zrcaljenje na xz-ravnini.

Treba sad još spomenuti neka računska pravila za transformacije odnosno matrice.

Ne vrijedi općenito **zakon komutacije** kod množenja, tj. T_2T_1 i T_1T_2 nije uvijek isto, za što se lako mogu navesti primjeri.

Vrijedi zakon asocijacije za množenje

$$(T_3T_2)\,T_1 = T_3\,(T_2T_1)\,, \tag{505}$$

što izlazi lako iz samog smisla množenja kao uzastopnog izvršavanja dotičnih transformacija. Isti zakon vrijedi dakako i za zbrajanje, što je gotovo trivijalno.

Vrijedi zakon distribucije

$$T_3\,(T_1 + T_2) = T_3T_1 + T_3T_2 \tag{506}$$

i

$$(T_1 + T_2)\,T_3 = T_1T_3 + T_2T_3. \tag{507}$$

(Budući da ne vrijedi zakon komutacije, treba oba ta zakona distribucije posebno formulirati).

Prvi zakon izlazi ovako: Neka je

$$\left\{\vec{F}_1, \vec{H}_1\right\} = T_1\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\}, \tag{508}$$

$$\left\{\vec{F}_2, \vec{H}_2\right\} = T_2\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\}. \tag{509}$$

Onda je

$$(T_1 + T_2)\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} = T_1\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} + T_2\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} =$$

$$= \left\{\vec{F}_1, \vec{H}_1\right\} + \left\{\vec{F}_2, \vec{H}_2\right\} = \left\{\vec{F}_1 + \vec{F}_2, \vec{H}_1 + \vec{H}_2\right\}. \tag{510}$$

i dalje

$$T_3\left\{(T_1 + T_2)\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\}\right\} = T_3\left\{\vec{F}_1 + \vec{F}_2, \vec{H}_1 + \vec{H}_2\right\} =$$

$$= T_3\left\{\vec{F}_1, \vec{H}_1\right\} + T_3\left\{\vec{F}_2, \vec{H}_2\right\} = T_3T_1\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} + T_3T_2\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} \tag{511}$$

čime je (506) dokazano.

Ako je dalje

$$T_3\left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} = \left\{\vec{F}_3, \vec{H}_3\right\} \tag{512}$$

onda je

$$(T_1 + T_2)\,T_3 \left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} = (T_1 + T_2) \left\{\vec{F}_3, \vec{H}_3\right\} =$$

$$T_1 \left\{\vec{F}_3, \vec{H}_3\right\} + T_2 \left\{\vec{F}_3, \vec{H}_3\right\} = T_1 T_3 \left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} + T_2 T_3 \left\{\vec{F}, \vec{H}\right\}, \tag{513}$$

čime je dokazano.

Pod inverznom matricom T^{-1} neke matrice T mislimo matricu inverzne transformacije, pa očito vrijedi

$$T^{-1}T = TT^{-1} = I, \tag{514}$$

tj. poslije izvršene neke transformacije i njoj inverzne dobivamo opet staro polje.

Zabilježimo još, da je za zrcaljenje

$$T_r T_r = T_r^2 = I, \tag{515}$$

jer, ako dvaput zrcalimo na istoj ravnini, opet smo na prvotnim koordinatama i na prvotnom polju. Dalje tvrdimo, da vrijedi

$$T_d^2 = -I. \tag{516}$$

Zaista, ako uzastopno primjenimo (483) i (484), onda izlazi

$$\vec{F}'' = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\vec{H}' = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{F} = -\vec{F}, \tag{517}$$

$$\vec{H}'' = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{F}' = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(-\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\vec{H}\right) = -\vec{H}. \tag{518}$$

Polje je dakle pomnoženo sa -1, a to odgovara transformaciji $-I$.

Promatrajmo dalje transformaciju $T_r T_d T_r$. Kod T_r se koordinatni ustav zrcali, kod T_d se ne mijenja, kod T_r se ponovo zrcali, dakle cijela transformacija ostavlja koordinate netaknute. Dalje u smislu (496), (497)

$$\left\{\vec{F}', \vec{H}'\right\} = T_r \left\{\vec{F}, \vec{H}\right\} \tag{519}$$

znači

$$\vec{F}' = \vec{F}, \quad \vec{H}' = \vec{H}. \tag{520}$$

U smislu (483), (484)

$$\left\{\vec{F}'', \vec{H}''\right\} = T_d \left\{\vec{F}', \vec{H}'\right\} \tag{521}$$

znači

$$\vec{F}'' = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\vec{H}', \ \ \vec{H}'' = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{F}' \tag{522}$$

i dalje

$$\left\{\vec{F}''', \vec{H}'''\right\} = T_r \left\{\vec{F}'', \vec{H}''\right\} \tag{523}$$

znači

$$\vec{F}''' = \vec{F}'', \ \ \vec{H}''' = -\vec{H}''. \tag{524}$$

Uvrštavanjem izlazi

$$\left\{\vec{F}''', \vec{H}'''\right\} = T_r \left\{\vec{F}'', \vec{H}''\right\} = T_r T_d \left\{\vec{F}', \ \ \vec{H}'\right\} =$$

$$= T_r T_d T_r \left\{\vec{F}, \vec{H}\right\}, \tag{525}$$

tj.

$$\vec{F}''' = \vec{F}'' = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\vec{H}' = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\vec{H}, \tag{526}$$

$$\vec{H}''' = -\vec{H}'' = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{F}' = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{F}, \tag{527}$$

a to znači

$$T_r T_d T_r = -T_d \tag{528}$$

Pomnožimo li s lijeva sa T_r, izlazi

$$T_r T_r T_d T_r = I T_d T_r = T_d T_r = -T_r T_d, \tag{529}$$

tj. T_d i T_r su "antikomutativne" matrice. Vidi se ovdje, da zaista zakon komutacije ne vrijedi općenito.

Razmotrimo sada neka svojstva, koja ćemo morati očekivati od transformacije, koja daje prijelaz od nekog sustava S na sustav S', ako ti sustavi imaju relativnu brzinu v i ako su odabrani prema *slici 6.* Pretpostavljamo, da će biti T **neprekinuta funkcija od** v, tj. koeficijenti transformacije su neprekinute funkcije od v. U tom smislu pišemo $T(v)$, tj. T je funkcija od v. Dalje će za $v = 0$ prema sl.6. ta transformacija biti zrcaljenje na ravnini yz (jer se ishodišta poklapaju za $t = 0$ i zbog $v = 0$ za sva vremena), tj. vrijedi

$$T(0) = T_{rx}. \tag{530}$$

Sustavi S i S' su ravnopravni i S' promatran sa stajališta sustava S izgleda isto tako, kao S sa stajališta sustava S': ishodište tuđeg sustava odmiče brzinom v u smjeru vlastite negativne osi x koje su na istom pravcu i protusmjerne, osi y i osi z su istosmjerno paralelne. Transformacija polja (kao i koordinata x, y, z, t) mora dakle biti ista od S na S' i obrnuto, tj. T je identična sa svojom inverznom transformacijom:

$$T = T^{-1}. \tag{531}$$

Pomnožimo li s T, izlazi

$$T^2 = I \tag{532}$$

Obrnimo sada smjer osi y' u sustavu S'. Dobiveni sustav S'' također je ravnopravan sa S i opet vrijedi, da svaki od ta dva sustava, s drugog gledan, izgleda jednako: tuđe ishodište odmiče brzinom v u smjeru vlastite negativne osi x. Osi x su na istom pravcu i suprotno orijentirane, osi y su protusmjerno paralelne, a osi z su istosmjerno paralelne. Transformacija od S u S'' mora dakle biti identična svojoj inverznoj, a tome je ekvivalentno, njezin kvadrat mora biti identična (jedinična) transformacija I. No transformacija iz S u S'' je $T_{ry}T$, jer treba najprije od S pomoću T prijeći na S' i zatim zrcaliti na $x'z'$-ravnini, tj. primjeniti transformaciju T_{ry}. Vrijedi dakle

$$(T_{ry}T)^2 = T_{ry}TT_{ry}T = I. \tag{533}$$

Pomnožimo li to s desna sa T, dobivamo zbog (532)

$$T_{ry}TT_{ry} = T. \tag{534}$$

Pitamo sada, da li mogu postojati različite transformacije T_1 i T_2 elektromagnetskog polja od S na S', od kojih bi svaka bila neprekinuta funkcija od v i imala svojstva (530), (532) i (534).

Transformirajmo od S na S' pomoću T_1 i natrag od S' na S pomoću T_2^{-1}, što je isto što T_2 (u smislu (531). Time smo izvršili transformaciju T_2T_1 i vratili se na stari sustav S, dakle stare koordinate. Stoga T_2T_1 znači transformaciju s nepromijenjenim koordinatama i mora imati oblik $k_1I + k_2T_d$, tj.

$$T_2T_1 = k_1I + k_2T_d. \tag{535}$$

Množenje s lijeva sa T_2 daje zbog (532)

$$T_2^2T_1 = T_1 = T_2\left(k_1I + k_2T_d\right) = k_1T_2 + k_2T_2T_d. \tag{536}$$

Dalje zbog (534) vrijedi

$$T_1 = T_{ry}T_1T_{ry} = T_{ry}\left(k_1T_2 + k_2T_2T_d\right)T_{ry} =$$

$$k_1T_{ry}T_2T_{ry} + k_2T_{ry}T_2T_dT_{ry} = k_1T_2 + k_2T_{ry}T_2\left(-T_{ry}T_d\right) =$$

$$= k_1 T_2 - k_2 T_{ry} T_2 T_{ry} T_d = k_1 T_2 - k_2 T_2 T_d. \tag{537}$$

Usporedbom sa (536) daje $k_2 = 0$, dakle

$$T_1 = k_1 T_2. \tag{538}$$

Zbog

$$T_1^2 = I = k_1^2 T_2^2 = k_1^2 I \tag{539}$$

Izlazi

$$k_1^2 = 1\,,\ \text{dakle}\ \ k_1 = \pm 1. \tag{540}$$

No T_1 i T_2 su neprekinute funkcije od v, pa stoga k_1 mora ili uvijek biti $+1$ ili uvijek -1. No za $v = 0$ je $T_1(0) = T_2(0) = T_{rx}$, dakle je

$$k_1 = +1 \text{ i } T_1 = T_2, \tag{541}$$

tj. te dvije transformacije su identične.

Ako dakle uopće postoji tražena transformacija elektromagnetskog polja, onda je jednoznačno određena. Kod toga dokaza se uopće nismo služili Lorentzovom transformacijom, tj. jednoznačna određenost je osigurana, a da ne znamo, kako se transformiraju koordinate x, y, z, t.

Vidjeli smo, da je za postojanje tražene transformacije elektromagnetskog polja nužno, da transformacija koordinata bude baš Lorentzova, tj. da u općenitijoj transformaciji (312), (313), (314), (315) konstanta k bude jednaka $\frac{1}{c^2}$.

Treba samo još naći traženu transformaciju. Mi ćemo je napisati i provjeriti, da zaista ostavlja invarijantne Maxwellove jednadžbe. Time je dakako njena egzistencija dokazana.

Ta transformacija glasi:

$$F'_x = -F_x, \tag{542}$$

$$F'_y = \frac{1}{\alpha}\left(F_y + v\mu_0 H_z\right), \tag{543}$$

$$F'_z = \frac{1}{\alpha}\left(F_z - v\mu_0 H_y\right), \tag{544}$$

$$H'_x = H_x, \tag{545}$$

$$H'_y = \frac{1}{\alpha}\left(-H_y + v\varepsilon_0 F_z\right), \tag{546}$$

$$H'_z = \frac{1}{\alpha}\left(-H_z - v\varepsilon_0 F_y\right), \tag{547}$$

Okrenemo li u sustavu S' smjer osi x', tako da oba sustava imaju sve tri osi istosmjerne, transformacija dobiva oblik

$$F'_x = F_x, \tag{548}$$

$$F'_y = \frac{1}{\alpha}\left(F_y - v\mu_0 H_z\right), \tag{549}$$

$$F'_z = \frac{1}{\alpha}\left(F_z + v\mu_0 H_y\right), \tag{550}$$

$$H'_x = H_x, \tag{551}$$

$$H'_y = \frac{1}{\alpha}\left(H_y + v\varepsilon_0 F_z\right), \tag{552}$$

$$H'_z = \frac{1}{\alpha}\left(H_z - v\varepsilon_0 F_y\right), \tag{553}$$

Inverzna transformacija (542), (543), (544), (545), (546), (547) izgleda točno isto tako, samo su izmjenjene crtkane veličine s necrtkanim. U inverznoj transformaciji (548), (549), (550), (551), (552), (553) još će se promijeniti i predznak od v.

Napišemo li Maxwellove jednadžbe za sustav S' i uvrstimo za operatore deriviranja izraze (388), (389), (390), (391) sa $k = \frac{1}{c^2}$, a za komponente polja izraze (542), (543), (544), (545), (546), (547), vidjet ćemo, da su te jednadžbe zadovoljene, ako pretpostavimo, da su zadovoljene Maxwellove jednadžbe za sustav S. Obrnuti zaključak se dobiva analogno pomoću inverzne transformacije. Ispuštamo taj lagani račun, koji nam pokazuje, da smo zaista našli ispravne transformacije.

Želimo li ukloniti iz transformacije faktore ε_0 i μ_0, možemo transformaciju napisati ili za $\vec{F}$ i $\vec{B}$ ili za $\vec{D}$ i $\vec{H}$. Napisat ćemo je odmah u vektorskom obliku za $\vec{F}$ i $\vec{B}$:

$$\vec{F}' = \frac{1}{\alpha}\left[\vec{F} - (1-\alpha)\left(\vec{v}\vec{F}\right)\frac{\vec{v}}{v^2} + \vec{v}\times\vec{B}\right], \tag{554}$$

$$\vec{B}' = \frac{1}{\alpha}\left[\vec{B} - (1-\alpha)\left(\vec{v}\vec{B}\right)\frac{\vec{v}}{v^2} + \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{F}\right]. \tag{555}$$

Uočimo li, da je za sustav S $\vec{v} = \vec{i}v$, jer v ima smjer osi x, lako se rastavljanjem u komponente možemo uvjeriti, da se te jednadžbe slažu sa (548), (549), (550), (551), (552), (553).

Za vektore $\vec{D}$ i $\vec{H}$ glasila bi transformacija u vektorskom obliku

$$\vec{D}' = \frac{1}{\alpha}\left[\vec{D} - (1-\alpha)\left(\vec{v}\vec{D}\right)\frac{\vec{v}}{v^2} + \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{H}\right], \tag{556}$$

$$\vec{H}' = \frac{1}{\alpha}\left[\vec{H} - (1-\alpha)\left(\vec{v}\vec{H}\right)\frac{\vec{v}}{v^2} + \vec{v}\times\vec{D}\right]. \tag{557}$$

Vektorski oblik nas je učinio nezavisnim od izbora koordinatnih sustava u oba sustava referencije. (Formule vrijede uz naše konvencije o smjeru vektorskog produkta, koja je prilagođena desnim sustavima i konvencinalnom smjeru magnetskog polja).

Bit će korisno, da zabilježimo i Lorentzovu transformaciju u vektorskom obliku, služeći se radijvektorom $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)(\vec{v}\vec{r})\frac{\vec{v}}{v^2} - \frac{\vec{v}}{\alpha}t, \tag{558}$$

$$t' = \frac{1}{\alpha}\left[-\frac{1}{c^2}(\vec{v}\vec{r}) + t\right]. \tag{559}$$

Tu mogu koordinatni sustavi biti bilo kako orijentirani, ali je ipak pretpostavljeno, da se ishodišta u jednom trenutku pokrivaju i da je sada na tom mjestu u oba sustava $t = t' = 0$.

Konačno dajemo vektorsku transformaciju operatora deriviranja služeći se operatorom $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\nabla' = \nabla + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{\vec{v}}{v^2}(\vec{v}\nabla) + \frac{1}{\alpha}\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{560}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{\alpha}\left[(\vec{v}\nabla) + \frac{\partial}{\partial t}\right]. \tag{561}$$

Ovdje su sustavi opet sasvim po volji.

Za slučaj, da su koordinatni sustavi onako specijalno odabrani, kako smo to mi učinili, te formule rastavljanjem u komponente prelaze u prije navedene relacije.

Za ilustraciju značenja jednadžbi (554), (555) razmotrit ćemo dva primjera.

Pretpostavimo, da imamo vertikalno homogeno magnetsko polje takvo, da indukcija $\vec{B}$ iznosi 1 tesla (10000 gausa), što je već gornja granica za polje u zračnom rasporu generatora. U tom polju neka se miče horizontalna žica okomito a svoj smjer protezanja i okomito na polje brzinom od 157 m/s (to odgovara obodnoj brzini turborotora od 1m promjera kod 3000 okretaja u minuti). U koordinatnom sustavu S, u kojemu se nalazimo, nema električnog polja, dakle je $\vec{F} = 0$. U sustavu

S', u kojemu žica miruje, dobivamo prema (562) polje $\vec{F}'$ u iznosu od $\vec{F}' = \frac{1}{\alpha} vB$, (jer je $\vec{v} \perp \vec{B}$). Za odabranu brzinu je α vrlo približno jednako 1, dakle izlazi 157 V/m kao inducirani napon u žici. Na temelju toga se grade generatori.

Neka je sada dano vertikalno homogeno električno polje od 10^6 V/m (to je otprilike polovica vrijednosti, kod koje u zraku nastaje proboj). U njemu neka se pomiče neka horizontalna šipka okomito na svoj vlastiti smjer i okomito na polje brzinom od 150 m/s. Magnetskog polja nema. Ako šipka ima permeabilnost vakuuma (a na vakuum se odnose formule) izlazi prema (555)(uz $\alpha \doteq 1$) $B' = \frac{1}{c^2} vF = \frac{1}{9 \cdot 10^{16}} \cdot 150 \cdot 10^6 = \frac{1}{6} 10^{-8}$ tesla. Ako je šipka od željeza sa $\mu = 1500$, u njoj će biti 1500 puta veća indukcija (jer se tangencijalna komponenta od $\vec{H}$ mijenja neprekinuto kod prijelaza iz okoline u šipku), pa će indukcija biti $250 \cdot 10^{-8}$ tesla ili $250 \cdot 10^{-4} = 0.025$ gausa. Na temelju toga se ne gradi ništa.

Vidi se, da se jednadžbe (554), (555) za male brzine pojednostavljuju na

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{V} \times \vec{B}, \tag{562}$$

$$\vec{B}' = \vec{B}, \tag{563}$$

kako je to dobro poznato. Jednadžba (562) nam pokazuje, da se u žici inducira napon, ako ona "siječe silnice magnetskog polja". Na temelju toga se može integralni oblik druge Maxwellove jednadžbe, dakle zakon indukcije, protegnuti i na zatvorene krivulje, koje su pomične. Potanje u to ovdje ne ulazimo.

Vidimo, da je zakon induciranja napona u žici, koja se pomiče u magnetskom polju, nužna posljedica principa relativnosti, tj. zahtjeva invarijancije Maxwellovih jednadžbi.

Pokušat ćemo još izvesti izraz za silu, kojom elektromagnetsko polje djeluje na naboj u gibanju. Neka se u sustavu S naboj Q giba brzinom v. Onda on miruje u sustavu S', koji ima tu brzinu prema S, pa je sila P' u sustavu S' dana sa

$$P' = Q'F'. \tag{564}$$

Tražimo li formulu za silu, kojom elektromagnetsko polje u sustavu S djeluje na taj isti naboj, moramo znati, kako se u tom sustavu prosuđuje ta sila, kako naboj, a kako polje. Za polje smo to pitanje već riješili. Da ga riješimo za naboj, posežemo najprije za jednadžbama Lorentzove teorije elektrona. One glase slično kao Maxwellove jednadžbe za vakuum, samo je u prvoj jednadžbi dodan član $\rho\vec{v}$, koji odgovara struji u vodičima:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \rho\vec{v}, \tag{565}$$

a treća jednadžba glasi kao Maxwellova, kada ima naboja:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{566}$$

Ostale dvije jednadžbe su nepromijenjene. Zamislimo, da se naboji gibaju brzinom $\vec{v}$ i odaberemo sustave S i S' prema *slici 7* (tj. $\vec{v}$ ima smjer osi x, sve tri osi su u ta dva sustava istosmjerno paralelne, ishodište O' odmiče brzinom $\vec{v}$ po osi x). U sustavu S' je onda brzina naboja $\vec{v}' = 0$, pa dotične jednadžbe glase

$$\mathrm{rot}\vec{H}' = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{F}'}{\partial t'}, \tag{567}$$

$$\mathrm{div}\, \vec{F}' = \frac{\rho'}{\varepsilon_0}.$$

Jednadžbe (388), (389), (390), (391), u kojima treba promijeniti predznak od $\frac{\partial}{\partial x}$, jer su sustavi sada odabrani prema *slici 7*, a ne prema *slici 6* kao tamo i jednadžbe (548), (549), (550), daju

$$\frac{\rho'}{\varepsilon_0} = \mathrm{div}\, \vec{F}' = \frac{\partial F_x'}{\partial x'} + \frac{\partial F_y'}{\partial y'} + \frac{\partial F_y'}{\partial y'} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{v}{\alpha c^2}\frac{\partial F_x}{\partial t}$$

$$+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{v}{\alpha}\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{v}{\alpha}\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) - \frac{v}{\alpha}\mu_0 \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \frac{v}{\alpha c^2}\frac{\partial F_x}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\mathrm{div}\, \vec{F} - \frac{v}{\alpha}\mu_0 \left(\mathrm{rot}\, \vec{H}\right)_x + \frac{v}{\alpha c^2}\frac{\partial F_x}{\partial t}. \tag{568}$$

No zbog (565) vrijedi

$$\left(\mathrm{rot}\vec{\mathrm{H}}\right)_x = \varepsilon_0 \frac{\partial F_x}{\partial t} + \rho v, \tag{569}$$

dakle,

$$\rho' = \frac{\varepsilon_0}{\alpha}\mathrm{div}\, \vec{F} - \varepsilon_0 \frac{v}{\alpha}\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial F_x}{\partial t} - \varepsilon_0 \frac{v}{\alpha}\mu_0 \rho v + \varepsilon_0 \frac{v}{\alpha c^2}\frac{\partial F_x}{\partial t}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{\alpha}\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \varepsilon_0 \frac{v}{\alpha}\mu_0 \rho v = \frac{\rho}{\alpha}\left(1 - \varepsilon_0 \mu_0 v^2\right)$$

$$= \frac{\rho}{\alpha}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \rho \frac{\alpha^2}{\alpha} = \rho\alpha. \tag{570}$$

Našli smo dakle transformaciju gustoće naboja. Treba sada još uzeti u račun tzv. Lorentzovu kontrakciju. Naime, sve dimenzije u smjeru osi x' tjelesa, koja miruju u

S' prikazuju se u S skraćene, dok dimenzije u smjeru osi y i z ostaju nepromijenjene. Ovo potonje je evidentno iz (414), (415). Uzmimo sada dužinu u smjeru osi x', kojoj krajnje točke imaju apscise x'_1 i x'_2, tako da je duljina

$$l' = x'_2 - x'_1. \tag{571}$$

U sustavu S u nekom trenutku t_0 (dakle istodobno u S) konstatiramo apscise x_1 i x_2 tih točaka i dobivamo duljinu l te dužine mjerene u S:

$$l = x_2 - x_1. \tag{572}$$

Iz (413) izlazi odmah

$$x'_1 = \frac{1}{\alpha}\left(x_1 - vt_0\right), \tag{573}$$

$$x'_2 = \frac{1}{\alpha}\left(x_2 - vt_0\right), \tag{574}$$

dakle,

$$x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\alpha}\left(x_2 - x_1\right), \tag{575}$$

ili

$$l = \alpha l'. \tag{576}$$

Za neki element volumena dV onda vrijedi

$$dV = \alpha dV', \tag{577}$$

jer su se dimenzije skratile samo u jednom smjeru. Naboj u takvom elementu volumena je

$$dQ = \rho dV \tag{578}$$

odnosno

$$dQ' = \rho' dV', \tag{579}$$

pa iz (570) i (577) odmah izlazi

$$dQ = dQ', \tag{580}$$

tj. **naboj je invarijanta Lorentzove transformacije**. Zaista je naboj u gibanju isti kao u mirovanju, inače bi se poremetila neutralnost atoma, u kojemu jezgra miruje, a elektroni se brzo gibaju.

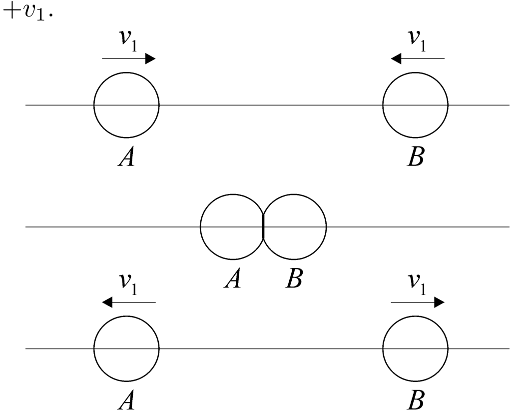
Tražimo konačnu transformaciju sile, pa za to provodimo jedno razmatranje u okviru relativističke mehanike.

Osnovni zakon gibanja je tzv. II. Newtonov zakon ili aksiom, koji kaže, da je sila jednaka derivaciji impulsa (ili veličine gibanja):

$$P = \frac{d}{dt}\,(\mathrm{mv}). \tag{581}$$

Izvorna je Newtonova formulacija, da je promjena veličine gibanja (mutatio motus) razmjerna sa silom i da ima smjer te sile. U klasičnoj mehanici je masa konstatna, pa se može izlučiti ispred znaka deriviranja i stoga se onda kaže, da je sila jednaka masi puta ubrzanje. No katkad je masa promjenljiva, npr. kod rakete, gdje se masa stalno smanjuje zbog izbacivanja plinova, koji svojom reakcijom tjeraju raketu. Tada vrijedi upravo jednadžba (581). Polazimo stoga i u teoriji relativnosti od te Newtonove formulacije ostavljajući otvoreno, da li je masa nekog tijela konstantna ili nije.

Promatrat ćemo elastični sudar dviju čestica, koje se gibaju obje duž osi x. Kuglica A neka ima brzinu $+v_1$, tj. giba se u smjeru pozitivne osi x sustava S, a kuglica B joj dolazi ususret brzinom $-v_1$ (*slika 8*). Nastaje sudar, koji traje izvjesno vrijeme, jer se kuglice, kada stupe u dodir, deformiraju, dok se ne umire i zatim opet raziđu poprimivši stari oblik. Točka dodira ostaje na miru, jer su brzine iste i protivnog smjera, a kuglice jednake. Poslije sudara kuglica A ima brzinu $-v_1$, a kuglica B brzinu $+v_1$.



Slika 8.

Promatrat ćemo tu pojavu u sustavu S'. U njemu dakle prije sudara miruje kuglica B, dok kuglica A ima neku brzinu $+v$, koju ćemo računati. Poslije sudara u njemu miruje kuglica A, a kuglica B je dobila brzinu $+v$. Računajmo dakle najprije tu brzinu v. Za kuglicu A prije sudara vrijedi

$$-\frac{dx}{dt} = v_1, \tag{582}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = v. \tag{583}$$

U jednadžbama (413), (414), (415), (416) treba v zamijeniti sa $-v_1$, jer je to sada brzina sustava S' prema S. Onda iz njih izlazi

$$dx' = \frac{1}{\alpha}\left(dx + v_1 dt\right), \tag{584}$$

$$dt' = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{v_1}{c^2}dx + dt\right), \tag{585}$$

dakle

$$v = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{1}{\alpha}\left(dx + v_1 dt\right)}{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{v_1}{c^2}dx + dt\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} + v_1}{\frac{v_1}{c^2}\frac{dx}{dt} + 1} = \frac{2v_1}{1 + \frac{v_1^2}{c^2}}. \tag{586}$$

(To je specijalan slučaj Einsteinova teorema zbrajanja brzina). Rješavanjem po v_1 izlazi s obzirom na $v > v_1$

$$v_1 = \frac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right). \tag{587}$$

Promatrajmo sada rad, koji obavlja za vrijeme sudara u sustavu S' sila P', kojom kuglica A djeluje na kuglicu B. Taj je rad jednak kinetičkoj energiji E_k, koju kuglica B dobiva u sustavu S', jer ona od brzine nula dovodi na brzinu v. Točka dodira se pomiče brzinom v_1 u sustavu S' jer u sustavu S miruje. Vrijedi dakle, da je

$$E_k = \int P' ds' = \int P' v_1 dt' = \int v_1 \frac{d(mv')}{dt'} dt' = v_1 \int \frac{d(mv')}{dt'} dt' =$$

$$= v_1\left(mv - m \cdot 0\right) = v_1 mv = mc^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right). \tag{588}$$

Time je kinetička energije E_k izražena kao funkcija brzoine v, pri čemu ostavljamo otvoreno mogućnost, da je i masa m funkcija te brzine v. Maloj promjeni dv brzine odgovara onda promjena dE_k kinetičke energije, pa dobivamo diferenciranjem

$$\boxed{dE_k = dm \cdot c^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) + mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{v}{c^2}dv.} \tag{589}$$

No u drugu ruku iz (581) možemo zaključiti, da je promjena dE_k kinetičke energije pod utjecajem neke sile P jednaka radu Pds te sile, dakle

$$dE_k = Pds = Pvdt = v\frac{d(mv)}{dt}dt = vd\left(mv\right) =$$

$$= v\,(vdm + mdv) = v^2 dm + mvdv. \tag{590}$$

Izjednačenjem izraza (589) i (590) dobivamo diferencijalnu jednadžbu između m i v, koja poslije sređivanja dobiva oblik

$$\frac{dm}{m} = \frac{vdv}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{591}$$

Integracijom izlazi

$$\ln m = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \ln C \tag{592}$$

ili

$$m = \frac{C}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{593}$$

Označi li se "masa mirovanja" sa m_0, izlazi za $v = 0$, $m_0 = C$, pa dobivamo izraz za ovisnost mase o brzini

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\alpha}, \tag{594}$$

koji je eksperimentalno vrlo dobro provjeren, napose na brzim katodnim zrakama. Za kinetičku energiju E_k izlazi prema (588)

$$E_k = (m - m_0)\,c^2. \tag{595}$$

Prirast mase puta c^2 daje dakle kinetičku energiju, što je u smislu opće ekvivalencije energije i mase po poznatoj formuli $E = mc^2$.

Možemo sada odrediti, kako se transformira sila, koja ima smjer brzine hvatišta.

Za silu u smjeru osi x na česticu, koja ima brzinu v u tom smjeru, vrijedi

$$P = \frac{d}{dt}(mv) = m_0 \frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}}\frac{dv}{dt}. \tag{596}$$

Promatrajmo gibanje iste čestice u sustavu S', koji ima (konstantnu) brzinu v_0 u smjeru osi x prema S. Tome neka odgovara kratica

$$\alpha_0 = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}. \tag{597}$$

Lorentzova transformacija glasi

$$x' = \frac{1}{\alpha_0}\,(x - v_0 t)\,, \tag{598}$$

$$y' = y \tag{599}$$

$$z' = z \tag{600}$$

$$t' = \frac{1}{\alpha_0}\left(-\frac{v_0 x}{c^2} + t\right) \tag{601}$$

Brzina v čestice u S je $\frac{dx}{dt}$, a brzina v' u S' je $\frac{dx'}{dt'}$. Vrijedi

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\alpha_0}\left(-\frac{v_0}{c^2}\frac{dx}{dt} + 1\right), \tag{602}$$

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \cdot \frac{dx'}{dt} = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{v_0}{c^2}\frac{dx}{dt}} \frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{dx}{dt} - v_0\right) =$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt} - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{v - v_0}{1 - \frac{v v_0}{c^2}}. \tag{603}$$

(To je teorem adicije brzina). Dalje je

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{dv'}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dv'}{dt} = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{v_0}{c^2} v}\frac{d}{dt}\frac{v - v_0}{1 - \frac{v_0 v}{c^2}}$$

$$= \frac{\alpha_0}{1 - \frac{v_0 v}{c^2}} \frac{\left(1 - \frac{v_0 v}{c^2}\right)\frac{dv}{dt} - (v - v_0)\left(-\frac{v_0}{c^2}\right)\frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v_0 v}{c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\alpha_0\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)\frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v_0 v}{c^2}\right)^3} = \frac{\alpha_0^3 \frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v_0 v}{c^2}\right)^3}. \tag{604}$$

U sustavu S' dakako vrijedi formula, koja je analogna formuli (596), tj.

$$P' = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^3}}\frac{dv'}{dt'}. \tag{605}$$

Uvrstimo li za v' i $\frac{dv'}{dt'}$ izraze (603) i (604), vidimo poslije jednostavnoga računa, da izlazi izraz (596), tj. vrijedi

$$P' = P. \tag{606}$$

Ako je napose brzina v_0 sustava S' u nekom trenutku jednaka brzini čestice v, pa čestica u taj tren miruje u S', onda možemo reći: **Ako sila ima smjer brzine hvatišta , ona se jednako prosuđuje kao u sustavu mirovanja hvatišta**.

Neka je sada sila $\vec{F}$ kosa prema brzini hvatišta. Rastavit ćemo je u longitudinalnu komponentu P_x i transverzalnu komponentu, koja, recimo, ima smjer osi y, pa je označujemo sa P_y. Za P_x već znamo, da je ista kao u sustavu mirovanja S' hvatišta. Da nađemo transformaciju transverzalne komponente P_y, dakle sile, koja djeluje u smjeru osi y, promatrajmo šuplji pravokutni paralelepiped, koji sadržava plin pod tlakom p'. Bridovi u smjerovima osi x', y', z', neka su a, b, c, mjereno u sustavu S' u kojima neka paralelepiped miruje. Sila na stijenu okomitu na osi x' će biti $P'_x = b'c'p'$. Sila na tu stijenu u sustavu S bit će $P_x = P'_x$, a zbog $b = b'$ i $c = c'$ izlazi

$$p = p', \tag{607}$$

tj. **tlak je invarijanta Lorentzove transformacije**.

Promatrajmo sada silu P_y na stijenu okomitu na osi y. Tlak je dakako zbog uvjeta ravnoteže u plinu isti na sve stijene. Vrijedi $P_y = acp$ i $P'_y = a'c'p'$. Dalje je $c = c'$, ali zbog Lorentzove kontrakcije

$$a = \alpha a', \tag{608}$$

tako da je

$$P_y = \alpha P'_y, \tag{609}$$

tj. transverzalna sila je u sustavu S manja nego u sustavu mirovanja S' hvatišta. Sada imamo sve podatke, da nađemo izraz za silu na naboj koji se giba u elektromagnetskom polju.

Neka je dakle naboj Q' na miru u sustavu S', tj. on se u sustavu S giba rzinom v u smjeru osi x. U sustavu S' vrijedi

$$\vec{P}' = Q'\vec{F}', \tag{610}$$

dakle

$$P'_x = Q'F'_x, \tag{611}$$

$$P'_y = Q'F'_y, \tag{612}$$

$$P'_z = Q'F'_z. \tag{613}$$

Prema tome je u smislu (606), (609) i (580)

$$P_x = QF'_x, \tag{614}$$

$$P_y = \alpha Q F'_y, \tag{615}$$

$$P_z = \alpha Q F'_z. \tag{616}$$

Uvrstimo sada izraze (614), (615), (616):

$$P_x = Q F_x, \tag{617}$$

$$P_y = Q \left(F_y - v \mu_0 H_z \right), \tag{618}$$

$$P_z = Q \left(F_z + v \mu_0 H_y \right). \tag{619}$$

Time je nađen traženi izraz za silu, koji se u vektorskom obliku može pisati

$$\vec{P} = Q \left(\vec{F} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \tag{620}$$

Dodatna sila, koja potječe od magnetskog polja i okomita je na smjer gibanja, nije dakle izraz nekog zasebnog prirodnog zakona, već posljedica Maxwellovih jednadžbi i principa relativnosti.

Time prekidamo razmatranja u vezi s teorijom relativnosti.

8 Dipol i Hertzov oscilator

Zamislimo u vakuumu u točkama P_0 i P_1 naboje $-Q$ i $+Q$. Označimo vektor $\vec{P_0P_1}$ sa $\vec{\triangle s}$ i produkt $Q\vec{\triangle s}$ sa $\vec{p}$. Možemo sada dalje uzeti, da iznos $\triangle s$ teži k nuli i istodobno naboj Q raste, tako da produkt $Q\triangle s$ dakle iznos p ostaje konstantan. Pri tome graničnom prijelazu se dakle radi o dva sve bliža i sve jača naboja suprotnih predznaka. Rezultat takvog graničnog prijelaza nazivamo **dipolom**. Takav će dipol dakle biti približno realiziran, ako promatramo dva jaka naboja suprotnih predznaka, koji se nalaze u maloj udaljenosti.

Razmotrimo, kako se ponaša elektrostatičko polje takvih dvaju naboja, ako provedemo opisani granični prijelaz, tj. pokušajmo odrediti polje dipola. Neka je r udaljenost neke točke $P(x, y, z)$ od točke $P_0(x', y', z')$, u kojoj će se nalaziti dipol i u kojoj se prije graničnog prijelaza nalazi naboj $-Q$. r_1 neka je udaljenost točke P do P_1, gdje se nalazi naboj $+Q$. Kod graničnog prijelaza se točka P_1 primiče točki P_0. Elektrostatički potencijal tih dvaju naboja očito je dan sa

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right). \tag{621}$$

Zbog $Q\triangle s = p$ možemo pisati

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\triangle s}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right). \tag{622}$$

Granični prijelaz zbog konstantnog p daje kao potencijal dipola

$$\Phi = \lim_{\triangle s\to 0}(\Phi_1 + \Phi_2) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\triangle s\to 0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\frac{1}{\triangle s}. \tag{623}$$

Uočimo li, da $\frac{1}{r}$ zavisi od varijabli x, y, z i x', y', z', naime

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}, \tag{624}$$

i da su u $\frac{1}{r_1}$ varijable x, y, z iste, dok su x', y', z' promjenjive, jer je P_1 pomaknuto prema P_0, to je jasno, da je gornji limes usmjerena derivacija u smjeru vektora $\vec{p}$, ali s obzirom na varijable x', y', z'. Označimo li

$$\nabla' = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x'} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y'} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z'}, \tag{625}$$

to možemo pisati

$$\lim_{\triangle s\to 0}\frac{1}{\triangle s}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) = \frac{\partial'\frac{1}{r}}{\partial p} = \frac{\vec{p}}{p}\left(\nabla'\frac{1}{r}\right), \tag{626}$$

gdje smo sa $\frac{\partial'}{\partial p}$ označili operator usmjerene derivacije u smjeru $\vec{p}$, s obzirom na crtkane varijable.

Budući da $\frac{1}{r}$ ovisi od diferencija $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, to je jasno, da vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z'}, \tag{627}$$

dakle, ako je

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{628}$$

vrijedi

$$\nabla = -\nabla'. \tag{629}$$

Prema tome je

$$\lim_{\triangle s \to 0} \frac{1}{\triangle s}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) = \frac{\vec{p}}{p}\left(\nabla'\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{p}}{p}\left(\nabla\frac{1}{r}\right) \tag{630}$$

i stoga potencijal dipola

$$\Phi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\triangle s \to 0} \frac{1}{\triangle s}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{r}. \tag{631}$$

Pod vektorom $\vec{r}$ ćemo razumjevati radijvektor točke $P(x, y, z)$ s obzirom na početnu točku P_0, gdje se nalazi dipol. Strelica je dakle kod točke $P(x, y, z)$, a početak vektora u točki $P_0(x', y', z')$. Vektor $\vec{p}$ nazivamo **moment dipola**, koji smo ovdje shvatili kao konstantan vektor. Takvom konstantom dipolu odgovara dakle elekrostatičko polje, koje je dano potencijalom (631).

Htjeli bismo odrediti polje promjenljivog dipola, tj. za slučaj, da je moment $\vec{p}$ vremenski promjenljiv, općenito i po smjeru i veličini.

Dok je još $\vec{p}$ konstantno, može se pisati

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec{p}\nabla\frac{1}{r}\right) = -\nabla\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\mathrm{div}\,\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{632}$$

Stoga se taj potencijal može izvesti iz Hertzova vektora

$$\vec{Z} = \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{633}$$

kao

$$\Phi = -\mathrm{div}\,\vec{Z}. \tag{634}$$

Taj Hertzov vektor dakako zadovoljava Laplaceovu jednadžbu, jer mu svaka komponenta ima oblik Coulombova potencijala, koji tu jednadžbu zadovoljava.

Hoćemo li naći elektromagnetsko polje za promjenljiv dipol, tražit ćemo Hertzov vektor, koji zadovoljava d'Alembertovu jednadžbu $\Box\vec{Z} = 0$. Ta jednadžba prelazi u Laplaceovu, ako načinimo granični prijelaz $c \to \infty$, pa ćemo dakle tražiti njezino rješenje $\vec{Z}$, koje pri tom prijelazu daje statičko rješenje (633). Prema razmatranjima o retardiranim potencijalima, koja smo proveli, jasno je, da to rješenje treba postaviti u obliku

$$Z = \frac{\{\vec{p}\}_{t-\frac{r}{c}}}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{635}$$

tj. funkciji vremena $\vec{p}(t)$ treba nadomjestiti t sa $t - \frac{r}{c}$, pri čemu je r jednako

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}. \tag{636}$$

Sada možemo odrediti skalarni i vektorski potencijal kao i električko i magnetsko polje:

$$\Phi = -\operatorname{div}\vec{Z} = -\operatorname{div}\frac{\{\vec{p}\}_{t-\frac{r}{c}}}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{637}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\{\vec{p}\}_{t-\frac{r}{c}}}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{638}$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\{\vec{p}\}_{t-\frac{r}{c}}}{r}$$

$$-\frac{1}{c^2 4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\{\vec{p}\}_{t-\frac{r}{c}}}{r}, \tag{639}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\{\vec{p}\}_{t-\frac{r}{c}}}{r} \tag{640}$$

(jer je $\frac{1}{\mu_0} = c^2\varepsilon_0$).

Tim formulama je polje vremenski promjenljivog dipola općenito određeno. Moramo ga još potanje diskutirati razrađujući dobivene izraze. Za kraće pisanje ćemo uvesti kratice

$$\vec{p}' = \{\vec{p}\}_{t-\frac{r}{c}}, \tag{641}$$

$$t' = t - \frac{r}{c} \tag{642}$$

i dalje pisati

$$\dot{\vec{p}}' = \frac{\partial\vec{p}'}{\partial t'} = \frac{\partial\vec{p}'}{\partial t}, \tag{643}$$

$$\ddot{\vec{p}}' = \frac{\partial^2 \vec{p}'}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 \vec{p}'}{\partial t^2}, \tag{644}$$

jer je očito

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{645}$$

Izlazi tako najprije:

$$4\pi\varepsilon_0 \Phi = -\mathrm{div}\,\frac{\vec{p}'}{r} = -\nabla\frac{\vec{p}'}{r} = -\frac{1}{r}\nabla p' - \vec{p}'\nabla\frac{1}{r}. \tag{646}$$

Da se odredi $\nabla\vec{p}'$ treba uočiti, da je $\vec{p}'$ funkcija od t', tj. od $t - \frac{r}{c}$, koje je sa svoje strane preko r funkcija od x, y, z. Sjetivši se, da je ∇ izraz (628), tj. da sadrži operatore deriviranja $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, koji djeluju na pojedine komponente od $\vec{p}$, to možemo npr. pisati

$$\frac{\partial}{\partial x} p_i' = \frac{\partial p_i'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\underline{\frac{\partial p_i'}{\partial t'}} t'\right), \tag{647}$$

gdje $\frac{\partial}{\partial x}$ ne djeluje na podcrtani faktor, a p_i' je i-ta (tj. bilo koja) komponenta od $\vec{p}'$. Analogni su izrazu za djelovanje $\frac{\partial}{\partial y}$ i $\frac{\partial}{\partial z}$ za neku komponentu p_i'. Vidi se dakle, da ćemo dobiti ispravni rezultat, ako naprosto vektor $\vec{p}'$ zamijenimo sa

$$\underline{\frac{\partial \vec{p}'}{\partial t'}} t'$$

u bilo kakvom izrazu, gdje ∇ djeluje na $\vec{p}'$. Tako izlazi

$$\nabla\vec{p}' = \nabla\left(\underline{\frac{\partial p'}{\partial t'}} t'\right) = \frac{\partial \vec{p}'}{\partial t'}\nabla t' = \dot{\vec{p}}'\nabla\left(t - \frac{r}{c}\right) =$$

$$= -\frac{1}{c}\dot{\vec{p}}'\nabla r = -\frac{1}{c}\dot{\vec{p}}'\frac{\vec{r}}{r}. \tag{648}$$

Dalje je

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\nabla r = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{649}$$

Dobivamo dakle

$$4\pi\varepsilon_0 \Phi = \frac{\dot{\vec{p}}'\vec{r}}{cr^2} + \frac{\vec{p}'\vec{r}}{r^3}. \tag{650}$$

Prema (638), (641), (643) pišemo

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\dot{\vec{p}}'}{r}. \tag{651}$$

Računamo dalje magnetsko polje:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\,\frac{\dot{\vec{p}}}{r} = \frac{1}{4\pi}\left(\nabla \times \frac{\dot{\vec{p}}}{r}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi r}\left(\nabla \times \dot{\vec{p}}\right) - \frac{1}{4\pi}\left(\dot{\vec{p}} \times \nabla\frac{1}{r}\right). \tag{652}$$

Analogno prema (648) bit će

$$\nabla \times \dot{\vec{p}} = \nabla \times \left(\underline{\ddot{\vec{p}}} t'\right) = -\left(\ddot{\vec{p}} \times \nabla t'\right) = -\left(\ddot{\vec{p}} \times \nabla\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{c}\left(\ddot{\vec{p}} \times \nabla r\right) = \frac{1}{cr}\left(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}\right). \tag{653}$$

Stoga dobivamo s obzirom na (649)

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi c r^2}\left(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}\right) + \frac{1}{4\pi r^3}\left(\dot{\vec{p}} \times \vec{r}\right). \tag{654}$$

Pišemo li još

$$\vec{r} = r\vec{r}_0, \tag{655}$$

gdje je $\vec{r}_0$ jedinični vektor u smjeru radijvektora, izlazi, da se polje $\vec{H}$ sastoji od dva dijela $\vec{H}^{(1)}$ i $\vec{H}^{(2)}$, tj.

$$\vec{H} = \vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)} \tag{656}$$

gdje je

$$\vec{H}^{(1)} = \frac{1}{4\pi r^2}\left(\dot{\vec{p}} \times \vec{r}_0\right), \tag{657}$$

$$\vec{H}^{(2)} = \frac{1}{4\pi c r}\left(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}_0\right). \tag{658}$$

Kod toga opažamo, da $\vec{H}^{(1)}$ teži k nuli kao $\frac{1}{r^2}$, kad se udaljujemo od dipola, a $\vec{H}^{(2)}$ samo kao $\frac{1}{r}$, tj. sporije, ne gledajući pri tom na ovisnost od $\dot{\vec{p}}$ i $\ddot{\vec{p}}$ od r preko $t' = t - \frac{r}{c}$.

Prelazimo na određivanje električnog vektora.

$$\vec{F} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\Phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\ddot{\vec{p}}}{r} - \mathrm{grad}\Phi. \tag{659}$$

Posljednji član od (659) razvijamo zasebno služeći se izrazom (650).

$$4\pi\varepsilon_0 \mathrm{grad}\,\Phi = \mathrm{grad}\,\frac{\dot{\vec{p}}'\vec{r}}{cr^2} + \mathrm{grad}\,\frac{\vec{p}'\vec{r}}{r^3}$$

$$= \frac{1}{cr^2}\mathrm{grad}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}\right) - \frac{2}{cr^3}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}\right)\mathrm{grad}\,r + \frac{1}{r^3}\mathrm{grad}\,(\vec{p}'\vec{r}) - \frac{3}{r^4}(\vec{p}'\vec{r})\,\mathrm{grad}\,r. \tag{660}$$

Znamo da je $\mathrm{grad}\,r = \vec{r}_0$ i time je drugi član od (660) jednak

$$\frac{2}{cr^3}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}\right)\mathrm{grad}\,r = \frac{2\vec{r}_0}{cr^3}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}\right) = \frac{2\vec{r}_0 r}{cr^3}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}_0\right) = \frac{2\vec{r}_0}{cr^2}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}_0\right). \tag{661}$$

Analogno je za četvrti član:

$$-\frac{3}{r^4}(\vec{p}'\vec{r})\,\mathrm{grad}\,r = -\frac{3\vec{r}_0}{r^3}(\vec{p}'\vec{r}_0)\,. \tag{662}$$

Dalje tretiramo najprije treći član izraza (660).

$$\mathrm{grad}\,(\vec{p}'\vec{r}) = \nabla\left(\underline{\vec{p}'}\vec{r}\right) + \nabla\left(\vec{p}'\underline{\vec{r}}\right). \tag{663}$$

Vrijedi

$$\vec{p}' \times (\nabla \times \vec{r}) = \nabla\left(\underline{\vec{p}'}\vec{r}\right) - (\vec{p}'\nabla)\,\vec{r}. \tag{664}$$

No općenito je

$$(\vec{a}\nabla)\,\vec{r} = \left(a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{z}k\right) =$$

$$= \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z = \vec{a}, \tag{665}$$

dakle prema (664)

$$\nabla\left(\underline{\vec{p}'}\vec{r}\right) = \vec{p}' \times (\nabla \times \vec{r}) + \vec{p}' = \vec{p}' \tag{666}$$

(jer je $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$).

Dalje vrijedi

$$\vec{r} \times (\nabla \times \vec{p}') = \nabla\left(\vec{p}'\underline{\vec{r}}\right) - (\vec{r}\nabla)\,\vec{p}'. \tag{667}$$

Posljednji član od (667)se dalje razvija u analogiji sa (648):

$$(\vec{r}\nabla)\,\vec{p}' = (\vec{r}\nabla)\left(\underline{\frac{\partial\vec{p}'}{\partial t'}}t'\right) = \frac{\partial\vec{p}'}{\partial t'}(\vec{r}\nabla)\,t' = \dot{\vec{p}}'\,(\vec{r}\nabla)\,t' =$$

$$= \dot{\vec{p}}' \left(\vec{r}\nabla t'\right) = \dot{\vec{p}}' \left(\vec{r}\nabla\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) = -\frac{1}{c}\dot{\vec{p}}' \left(\vec{r}\nabla r\right) = -\frac{1}{c}\dot{\vec{p}}' \left(\vec{r}\vec{r}_0\right) =$$

$$= -\frac{r\dot{\vec{p}}'}{c}. \tag{668}$$

Stoga je

$$\nabla\left(\vec{p}'\underline{\vec{r}}\right) = \vec{r} \times \left(\nabla \times \vec{p}'\right) - \frac{r\dot{\vec{p}}'}{c}. \tag{669}$$

U prvom članu desno od (669) će biti, u analogiji sa (648).

$$\nabla \times \vec{p}' = \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{p}'}{\underline{\partial t'}} t'\right) = \nabla t' \times \dot{\vec{p}}' = -\frac{1}{c}\left(\nabla r \times \dot{\vec{p}}'\right) =$$

$$= -\frac{1}{c}\left(\vec{r}_0 \times \dot{\vec{p}}'\right) = \frac{1}{c}\left(\dot{\vec{p}}' \times \vec{r}_0\right), \tag{670}$$

dakle

$$\vec{r} \times \left(\nabla \times \dot{\vec{p}}'\right) = \frac{1}{c}\vec{r} \times \left(\dot{\vec{p}}' \times \vec{r}_0\right) = \frac{1}{c}\dot{\vec{p}}' \left(\vec{r}\vec{r}_0\right) - \frac{1}{c}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}\right)\vec{r}_0 =$$

$$= \frac{r\dot{\vec{p}}'}{c} - \frac{1}{c}\vec{r}_0\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}\right) = \frac{r\dot{\vec{p}}'}{c} - \frac{\vec{r}_0 r}{c}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}_0\right). \tag{671}$$

Izlazi tako

$$\nabla\left(\vec{p}'\underline{\vec{r}}\right) = \frac{r\dot{\vec{p}}'}{c} - \frac{\vec{r}_0 r}{c}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}_0\right) - \frac{r\dot{\vec{p}}'}{c} = -\frac{\vec{r}_0 r}{c}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}_0\right). \tag{672}$$

Uvrštavanjem izraza (672) i (666) u (663) dobivamo

$$\mathrm{grad}\left(\vec{p}'\vec{r}\right) = \vec{p}' - \frac{\vec{r}_0 r}{c}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}_0\right). \tag{673}$$

Prvi član izraza (660) razlikuje se od toga samo time, da mjesto $\vec{p}'$ stoji $\dot{\vec{p}}'$. Dakle:

$$\mathrm{grad}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}\right) = \dot{\vec{p}}' - \frac{\vec{r}_0 r}{c}\left(\ddot{\vec{p}}'\vec{r}_0\right). \tag{674}$$

Prema (674), (661), (673) i (662) izraz (660) dobiva oblik

$$4\pi\varepsilon_0 \mathrm{grad}\,\mathit{\Phi} = \frac{1}{cr^2}\left\{\dot{\vec{p}}' - \frac{\vec{r}_0 r}{c}\left(\ddot{\vec{p}}'\vec{r}_0\right)\right\} - \frac{2\vec{r}_0}{cr^2}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}_0\right)$$

$$+\frac{1}{r^3}\left\{\vec{p}' - \frac{\vec{r}_0 r}{c}\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}_0\right)\right\} - \frac{3\vec{r}_0}{r^3}\left(\vec{p}'\vec{r}_0\right)$$

$$= \frac{1}{r^3}\left\{\vec{p}' - 3\vec{r}_0\left(\vec{p}'\vec{r}_0\right)\right\} + \frac{1}{cr^2}\left\{\dot{\vec{p}}' - 3\vec{r}_0\left(\dot{\vec{p}}'\vec{r}_0\right)\right\} - \frac{\vec{r}_0}{c^2 r}\left(\ddot{\vec{p}}'\vec{r}_0\right). \tag{675}$$

Prema (659) dobili smo tako električki vektor u obliku

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{3\vec{r}_0(\vec{r}_0\vec{p}') - \vec{p}'\right\} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c r^2}\left\{3\vec{r}_0\left(\vec{r}_0\dot{\vec{p}}'\right) - \dot{\vec{p}}'\right\}$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left\{\vec{r}_0\left(\vec{r}_0\ddot{\vec{p}}'\right) - \ddot{\vec{p}}'\right\}. \tag{676}$$

Vidi se, da se taj izraz sastoji iz tri sumanda. Prvi opada s uzlaznim r kao $\frac{1}{r^3}$, a drugi kao $\frac{1}{r^2}$, a treći kao $\frac{1}{r}$, ako ne gledamo na ovisnost vektora $\vec{p}'$ i njegovih derivacija od r. Ako se radi o oscilacijama, srednja vrijednost tih veličina neće ovisiti od r. Pisat ćemo:

$$\vec{F} = \vec{F}^{(0)} + \vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)}, \tag{677}$$

gdje je

$$\vec{F}^{(0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{3\vec{r}_0\left(\vec{r}_0\vec{p}'\right) - \vec{p}'\right\}, \tag{678}$$

$$\vec{F}^{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c r^2}\left\{3\vec{r}_0\left(\vec{r}_0\dot{\vec{p}}'\right) - \dot{\vec{p}}'\right\}, \tag{679}$$

$$\vec{F}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left\{\vec{r}_0\left(\vec{r}_0\ddot{\vec{p}}'\right) - \ddot{\vec{p}}'\right\}. \tag{680}$$

Možemo dakle očekivati, da će $\vec{F}^{(0)}$ dominirati u blizini dipola, $\vec{F}^{(1)}$ će doći do izražaja u nekoj srednjoj udaljenosti, a $\vec{F}^{(2)}$ u velikoj udaljenosti, tzv. **valnoj zoni**. Vidi se, da taj izraz zavisi o drugoj derivaciji momenta dipola.

Prije smo vidjeli, da magnetski vektor ima dva sumanda, reda veličine $\frac{1}{r^2}$ odnosno $\frac{1}{r}$, pa stoga možemo zaključiti, da magnetsko polje u neposrednoj blizini ne dolazi do izražaja u usporedbi s električnim, koje je tamo mnogo jače. Izrazi za $\vec{H}^{(2)}$ i $\vec{F}^{(2)}$ daju polje u velikoj udaljenosti, tj. u valnoj zoni.

Izraz $\vec{H}^{(1)}$ podsjeća na Biot-Savartov[16] zakon. Ako zamislimo, da se $\vec{p}$ mijenja samo po iznosu, a ne po smjeru i da je dipol aproksimiran sa dvije kugle, koje su spojene žicom, onda je $p = Q \cdot \triangle s$, $\dot{p} = \frac{dQ}{dt}\triangle s = I\triangle s$, gdje je I struje, koja teče u toj žici i povećava pozitivni naboj, a smanjuje negativni (tj. povećava njegovu

[16] Jean Baptiste Biot (1774.-1862.)
Felix Savart (1791.-1841.)

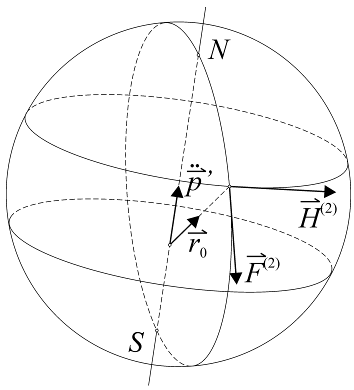
apsolutnu vrijednost). Izraz za $\vec{H}^{(1)}$ onda odgovara Biot–Savartovu zakonu, samo s korekcijom, da je još t nadomješten sa $t - \frac{r}{c}$, tj. uzima se u obzir, da se stanje dipola na nekom drugom mjestu očituje tek kasnije, kad je djelovanje do toga mjesta doprlo šireći se brzinom svjetlosti. Analogno je $\vec{F}^{(0)}$ statičko električko polje dipola, opet s korekcijom konačne brzine širenja djelovanja. Izraz za $\vec{F}^{(2)}$ možemo pisati u obliku

$$\vec{F}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left(\vec{r}_0 \times \left(\vec{r}_0 \times \ddot{\vec{p}}\right)\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\vec{r}_0 \times \left(\vec{r}_0 \times \ddot{\vec{p}}\right)\right), \tag{681}$$

što se odmah vidi razvijanjem dvostrukog vektorskog produkta i uspoređivanjem sa (680). Pogledamo li uz to izraz (658) za $\vec{H}^{(2)}$, koji glasi

$$\vec{H}^{(2)} = \frac{1}{4\pi c r}\left(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}_0\right) \tag{682}$$

vidimo odmah, da su oba vektora okomita na $\vec{r}_0$, dakle i na radijvektor $\vec{r}$, a osim toga okomita i međusobno. Zamislimo li $\ddot{\vec{p}}$ kao os kugle, onda $\vec{F}^{(2)}$ tangira meridijan, a $\vec{H}^{(2)}$ tangira paralelu (sl.9.). $\vec{H}^{(2)}$ je upravljeno prema istoku, a $\vec{F}^{(2)}$ prema jugu, ako je $\ddot{\vec{p}}$ upravljeno u smjeru prema sjeveru.



Slika 9.

Lako je provjeriti relacije

$$\vec{F}^{(2)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\vec{H}^{(2)} \times \vec{r}_0; \tag{683}$$

$$\vec{H}^{(2)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{r}_0 \times \vec{F}^{(2)}. \tag{684}$$

Budući da je $\vec{r}_0$ jedinični vektor i okomit na $\vec{H}^{(2)}$, to iz (683) odmah izlazi

$$\sqrt{\varepsilon_0}F^{(2)} = \sqrt{\mu_0}H^{(2)}. \tag{685}$$

Tu ćemo relaciju susresti i kod ravninskih valova.

Ako je θ polarni kut između $\ddot{\vec{p}}'$ i $\vec{r}_0$ vrijedi

$$F^{(2)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left|\ddot{\vec{p}}'\right|}{r} \sin\theta. \tag{686}$$

Razumije se, da treba imati na umu, da $\ddot{\vec{p}}'$ može mijenjati svoj smjer, a time i vektori $\vec{H}^{(2)}$ i $\vec{F}^{(2)}$. Razmotrimo sada specijalni slučaj, da je

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \sin\omega t, \tag{687}$$

gdje je $\vec{p}_0$ stalan vektor. Kažemo tada, da se radi o **Hertzovu oscilatoru**. Bit će onda

$$\dot{\vec{p}} = \omega\vec{p}_0 \cos\omega t, \tag{688}$$

$$\ddot{\vec{p}} = -\omega^2\vec{p}_0 \sin\omega t, \tag{689}$$

dakle

$$\ddot{\vec{p}}' = -\omega^2\vec{p}_0 \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{690}$$

Dalje vrijedi

$$F^{(2)}_{max} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H^{(2)}_{max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2 p_0}{r} \sin\theta. \tag{691}$$

Računajmo sada ukupnu snagu dipola, tj. energiju, koju emitira u jedinici vremena. U izrazu za Poyntingov vektor $\vec{S} = \vec{F} \times \vec{H}$ dovoljno je uvrstiti $\vec{F}^{(2)}$ i $\vec{H}^{(2)}$. Naime, potpuno bi izraz glasio

$$\vec{S} = \left(\vec{F}^{(0)} + \vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)}\right) \times \left(\vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)}\right). \tag{692}$$

Kada se izmnoži, onda jedino produkt $\vec{F}^{(2)} \times \vec{H}^{(2)}$ teži k nuli kao $\frac{1}{r^2}$, dok svi ostali barem kao $\frac{1}{r^3}$. No plošni integrali preko kugle oko dipola, koju sve više povećavamo, teži k nuli, ako integrand teži k nuli kao $\frac{1}{r^3}$ ili još brže, jer sama površina kugle raste samo kao r^2

Vektor $\vec{F}^{(2)} \times \vec{H}^{(2)}$ ima smjer radijvektora, dakle je okomit na površinu kugle, a osim toga mu je iznos $F^{(2)}H^{(2)}$, jer su $\vec{F}^{(2)}$ i $\vec{H}^{(2)}$ međusobno okomiti. Snaga je dakle

$$N = \int\int F^{(2)}H^{(2)} df = \int\int \left(F^{(2)}\right)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} df$$

$$= \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\left|\ddot{\vec{p}}'\right|^2}{r^2} \int\int \sin^2\theta df. \tag{693}$$

Računajmo dakle

$$\int\int \sin^2\theta df = \int\int \sin^2\theta \cdot rd\theta \cdot r\sin\theta d\varphi$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = r^2 \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta. \tag{694}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \int_0^{\pi} \left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta = [-\cos]_0^{\pi} +$$

$$+ \left[\frac{\cos^3}{3}\right]_0^{\pi} = 1 + 1 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}, \tag{695}$$

tj.

$$\int\int \sin^2\theta df = \frac{8\pi}{3} r^2. \tag{696}$$

Trenutna snaga kroz kuglu s polumjerom r je dakle prema (693)

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c}\left|\ddot{\vec{p}}\right|^2 = \frac{\mu_0}{6\pi c}\omega^4 p_0^2 \sin^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{697}$$

Vremensku srednju vrijednost N_0 će se dobiti, ako odredimo vremensku srednju vrijednost faktora $\sin^2\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)$:

$$\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) dt = \frac{1}{2}. \tag{698}$$

dakle

$$N_0 = \frac{\mu_0}{12\pi c}\omega^4 p_0^2. \tag{699}$$

Vidimo, da je to nezavisno od r, tako da možemo zamisliti, da r teži prema ∞, pa tada otpadaju zanemareni prinosi ostalih produkata. Dakako, ti su prinosi onda ukupno jednaki nuli za svaki r, jer srednja snaga kroz kuglu bilo kojeg polumjera mora biti ista.

Ako Hertzov oscilator opet zamislimo realiziran u obliku dviju kugli spojenih žicom, onda je sada, ako još $\triangle s$ označimo sa l,

$$p = p_0 \sin \omega t = Q \cdot l, \tag{700}$$

dakle,

$$Q = Q_m \sin \omega t \tag{701}$$

sa

$$Q_m = \frac{p_0}{l}. \tag{702}$$

Struja je

$$I = \frac{dQ}{dt} = Q_m \omega \cos \omega t = I_m \cos \omega t. \tag{703}$$

Dalje je

$$I_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m = \frac{\omega Q_m}{\sqrt{2}} \tag{704}$$

i

$$Q_m l = p_0 = \frac{\sqrt{2}}{\omega} l I_{ef}. \tag{705}$$

Računajmo sada efektivne vrijednosti od $F^{(2)}$ i $H^{(2)}$. Izlazi

$$F_{ef}^{(2)} = F_{max} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mu_0}{4\pi\sqrt{2}} \frac{\omega^2 p_0}{r} \sin\theta$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi\sqrt{2}} \frac{\omega^2}{r} \frac{\sqrt{2}}{\omega} l I_{ef} \sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega l}{r} I_{ef} \sin\theta$$

$$= \mu_0 c \frac{I_{ef} l}{2\lambda r} \sin\theta = 60\pi \frac{I_{ef} l}{\lambda r} \sin\theta = 60\pi \frac{I_{ef} l}{\lambda r} \cos\alpha, \tag{706}$$

pri čemu je λ valna duljina zračenja, dakle $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, dalje vrijedi $\mu_0 c = 120\pi$, a mjesto θ smo stavili $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdje je α kut radijvektora prema ekvatorskoj ravnini, dakle "geografska širina".

Dalje računamo analogno

$$H_{ef}^{(2)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} F_{ef}^{(2)} = \frac{F_{ef}^{(2)}}{120\pi} = \frac{I_{ef} l}{2\lambda r} \cos\alpha. \tag{707}$$

Konačno je

$$N_0 = \frac{\mu_0}{12\pi c}\omega^4 p_0^2 = \frac{10}{c^2}\omega^4 p_0^2 = \frac{10}{c^2}\omega^4 \frac{2}{\omega^2} l^2 I_{ef}^2 = \frac{20}{c^2}\omega^2 l^2 I_{ef}^2 =$$

$$= \frac{20}{c^2}\frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} l^2 I_{ef}^2 = 80\pi^2 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 I_{ef}^2. \tag{708}$$

Formule (706), (707) i (708) mogu se naći u knjizi J. Lončar, Osnovi elektrotehnike II, 2 (1947) str. 343 i 345.

Zračenje dipola je osnovni problem za tretiranje zračenja antena, pa smo ga zato opširnije raspravili.

9 Prijenosni vodovi

Kod širenja elektromagnetskih valova uzduž vodova (koji se mogu sastojati od jednog ili više vodiča) istaknut je smjer, u kojem se proteže sam vod. U tom smjeru će se ti valovi širiti i u tom smjeru će teći energija, ukoliko ne ulazi u same vodiče. Zamislimo li, da se radi o savršenim vodičima, dakle s vodljivošću neizmjerno, neće se u njima stvarati Joulova toplina i stoga neće energija iz okolnog medija ulaziti u vodiče. Možemo dakle naslutiti, da će oko takvih vodiča biti mogući elektromagnetski valovi, gdje je smjer širenja energije svagdje paralelan sa smjerom protezanja samog voda.

Pokušat ćemo stoga najprije sagraditi dovoljno općenita promjenljiva elektromagnetska polja, u kojima Poyntingov vektor $\vec{S}$ ima svagdje isti smjer, recimo smjer osi x. Vrijedi dakle

$$\vec{S} = \vec{i}S. \tag{709}$$

Budući da je $\vec{S} = \vec{F} \times \vec{H}$, to su $\vec{F}$ i $\vec{H}$ okomiti na osi x, dakle

$$F_x = 0, \tag{710}$$

$$H_x = 0. \tag{711}$$

Da nađemo takva polja, poći ćemo od Hertzova vektora $\vec{Z}$. Ponovit ćemo najprije već prije izvedene jednadžbe. Hertzov vektor (i vektori $\vec{A}$, $\vec{F}$, $\vec{H}$ kao i skalar $\varPhi$) zadovoljavaju telegrafsku jednadžbe

$$\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} + \varkappa\mu \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}, \tag{712}$$

pri čemu pretpostavljamo, da se nalazimo u homogenom mediju, koji može imati neke konstante ε, μ i $\varkappa$, dakle smije imati i neku vodljivost.

Veza s potencijalima i s elektromagnetskim poljem glasi

$$\varPhi = -\operatorname{div} \vec{Z}, \tag{713}$$

$$\vec{A} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{Z}}{\partial x} + \varkappa\mu \vec{Z}, \tag{714}$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} \varPhi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{Z} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} - \varkappa\mu \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}$$

$$= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{Z} - \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial z^2} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{Z}. \tag{715}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A} = \varepsilon\mathrm{rot}\,\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} + \varkappa\mathrm{rot}\,\vec{Z}. \tag{716}$$

Budući da je smjer osi x istaknut, pokušat ćemo pretpostaviti Hertzov vektor, koji ima samo x-komponentu, tj. stavljamo

$$Z_y = 0, \tag{717}$$

$$Z_z = 0. \tag{718}$$

Osim toga ćemo pretpostaviti, da se ta funkcija $Z_x(x, y, z, t)$ raspada u dva faktora, u funkciju $U(y, z)$ i u funkciju $V(x, t)$, tj.

$$Z_x = U(y, z) \cdot V(x, t). \tag{719}$$

Time je dakle razdioba funkcijskih vrijednosti u svim ravninama okomitim na osi x istog karaktera i takve razdiobe se razlikuju međusobno samo u jednom faktoru, koji zavisi od položaja x te ravnine i od trenutka t, u kojemu se promatra.

Neka razmatranja će biti nezavisna od pretpostavke (719). U ostalom, mogu se promatrati i znatno općenitije funkcije Z_x, koje se dobivaju kao zbroj produkata oblika (719). Za naše svrhe će postavka (719) biti dovoljno općenita.

Vrijedi najprije za x-komponentu vektora $\vec{Z}$

$$\frac{\partial^2 Z_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 Z_x}{\partial t^2} + \varkappa\mu\frac{\partial Z_x}{\partial t}. \tag{720}$$

Dalje izlazi zbog (717), (718)

$$\Phi = -\frac{\partial\vec{Z}_x}{\partial x}, \tag{721}$$

$$A_x = \varepsilon\mu\frac{\partial Z_x}{\partial t} + \varkappa\mu Z_x, \tag{722}$$

$$A_y = 0, \tag{723}$$

$$A_z = 0, \tag{724}$$

$$F_x = \frac{\partial^2 Z_x}{\partial x^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 Z_x}{\partial t^2} - \varkappa\mu\frac{\partial Z_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 Z_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Z_x}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2 Z_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Z_x}{\partial z^2}, \tag{725}$$

$$F_y = \frac{\partial^2 Z_x}{\partial x \partial y}, \tag{726}$$

$$F_z = \frac{\partial^2 Z_x}{\partial x \partial z}, \tag{727}$$

$$H_x = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = 0, \tag{728}$$

$$H_y = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{1}{\mu}\left(\varepsilon\mu\frac{\partial^2 Z_x}{\partial z \partial t} + \varkappa\mu\frac{\partial Z_x}{\partial z}\right)$$

$$= \varepsilon\frac{\partial^2 Z_x}{\partial z \partial t} + \varkappa\frac{\partial Z_x}{\partial z}, \tag{729}$$

$$H_z = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_x}{\partial y} = -\varepsilon\frac{\partial Z_x}{\partial y \partial t} - \varkappa\frac{\partial Z_x}{\partial y}. \tag{730}$$

Vidi se, da je uvjet (711) ispunjen, a uvjet (710) daje prema (725)

$$\frac{\partial^2 Z_x}{\partial x^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 Z_x}{\partial t^2} + \varkappa\mu\frac{\partial Z_x}{\partial t} \tag{731}$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 Z_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z_x}{\partial z^2} = 0, \tag{732}$$

tj. jednadžba (720) se raspala u dvije jednadžbe.

Uvedemo li sada zahtjev (719), izlazi iz (731)

$$U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \varepsilon\mu U\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \varkappa\mu U\frac{\partial V}{\partial t} \tag{733}$$

ili

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \varkappa\mu\frac{\partial V}{\partial t}, \tag{734}$$

a iz (732)

$$V\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + V\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{735}$$

ili

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{736}$$

Prema tome U zadovoljava dvodimenzionalnu Laplaceovu jednadžbu, a V zadovoljava prostorno jednodimenzionalnu telegrafsku jednadžbu (733).

Računajmo dalje izraze za $\vec{F}$ i $\vec{H}$.

$$F_y = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(UV) = \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}, \tag{737}$$

$$F_z = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(UV) = \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x}, \tag{738}$$

$$H_y = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial z \partial t}(UV) + \varkappa \frac{\partial}{\partial z}(UV) = \varepsilon \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa \frac{\partial U}{\partial z} V, \tag{739}$$

$$H_z = -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial y \partial t}(UV) - \varkappa \frac{\partial}{\partial y}(UV) = -\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial t} - \varkappa \frac{\partial U}{\partial y} V. \tag{740}$$

Pokušajmo sada odrediti skalarni produkt $\vec{F}\vec{H}$:

$$\vec{F}\vec{H} = F_y H_y + F_z H_z = \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa \frac{\partial U}{\partial z} V\right)$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x}\left(-\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial t} - \varkappa \frac{\partial U}{\partial y} V\right) = 0. \tag{741}$$

Vektori $\vec{F}$ i $\vec{H}$ su dakle međusobno okomiti:

$$\vec{F} \perp \vec{H}. \tag{742}$$

Napominjemo, da to izlazi tek na temelju postavka (719).

Telegrafska jednadžbe za Φ, $\vec{A}$, $\vec{F}$, $\vec{H}$, također se raspadaju u smislu (731), (732). Zaista, ako primjenimo skalarni operator

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(koji komutira s ostalim operatorima deriviranja) na (726), (727) te na (715), (716), izlazi lako zbog (732), da vektori, dakle i sve njihove komponente, zadovoljavaju dvodimenzionalnu Laplaceovu jednadžbu:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \tag{743}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \tag{744}$$

Analogno na temelju (713), (714) izlazi

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \tag{745}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = 0. \tag{746}$$

Kombinirajući to s telegrafskom jednadžbom (712), koja vrijedi i za $\vec{F}$, $\vec{H}$, Φ, $\vec{A}$, izlazi, da te veličine sve zadovoljavau i prostorno jednodimenzionalnu telegrafsku jednadžbu (731).

Prema (737), (738) se vektor $\vec{F}$ raspada, slično kao za Z_x, u produkt dviju funkcija, naime

$$\vec{F} = \frac{\partial V}{\partial x} \operatorname{grad} U, \tag{747}$$

gdje prvi faktor zavisi samo od x, t a drugi od y, z.

Na temelju (739) i (740) dobivmo slično raspadanje za $\vec{H}$ i to:

$$\vec{H} = -\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V\right)\left(\vec{i} \times \operatorname{grad} U\right), \tag{748}$$

kako je to lako provjeriti. Dalje za vektorski potencijal $\vec{A}$ prema (714), (717), (718) i (719) izlazi

$$A_x = \mu \left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V\right) U, \tag{749}$$

$$A_y = 0 \tag{750}$$

$$A_z = 0 \tag{751}$$

tj. može se smatrati, da se vektor $\vec{A}$ raspao u vektor s komponentama $\mu U, 0, 0$ i skalarni faktor $\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V\right)$.

Promatrajmo polje u nekoj ravnini paralelnoj s ravninom (y, z) uzevši

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U, \tag{752}$$

$$\vec{H} = -\left(\vec{i} \times \operatorname{grad} U\right), \tag{753}$$

gdje je U rješenje dvodimenzionalne Laplaceove jednadžbe (736). Takvo polje može postojati u svim ravninama paralelnim s (y, z)-ravninom, ako je $\varkappa = 0$. Zaista, postavka

$$\vec{Z} = \vec{i}U(y, z) \cdot \left(-x + \frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{754}$$

dakle

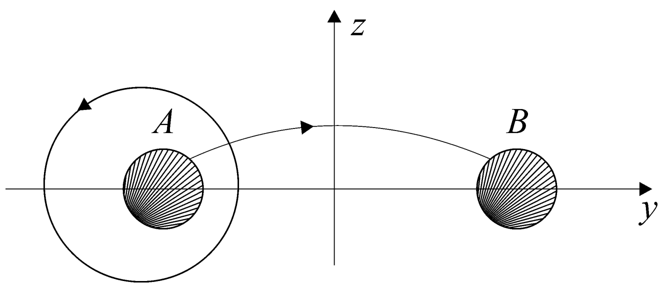
$$V = -x + \frac{t}{\varepsilon} \tag{755}$$

daje polje (752), (753), kako se odmah vidi iz (747) i (748). Funkcija (755) zadovoljava jednadžbu (734), ako je $\varkappa = 0$.

Uzmemo li sada neko rješenje $V(x, t)$ prostorno jednodimenzionale telegrafske jednadžbe (734), gdje smije biti $\varkappa \neq 0$, onda dobivamo polje u ma kojoj ravnini paralelnoj s (y, z)-ravninom za ma koji trenutak t, tj. za ma koji x i t, ako električno polje (752), (753) pomnožimo sa skalarnim faktorom $-\frac{\partial V}{\partial x}$, a magnetsko polje sa skalarnim faktorom $\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V$. Polje je dakle u svim tim ravninama istovrsno, samo jače ili slabije, već prema vrijednosti tih skalarnih faktora.

Vidi se, da U prema (752) možemo shvatiti kao elektrostatički potencijal u ravnini. Silnice magnetskog polja (753) bit će ortogonalne trajektorije silnica električkog polja, jer je očito $\vec{F} \perp \vec{H}$.

Promatrat ćemo sada vod, koji se proteže u smjeru osi x, a sastoji se od dva vodiča stalnog presjeka. Taj presjek može biti bilo kakav, pa recimo, da je kružni, što odgovara praktičnoj izvedbi. Želimo odrediti polje u homogenom mediju, u kojem se taj vodič nalazi (*slika 10*).



Slika 10.

Ako želimo, da polje bude promatranoga tipa, tj. prema (747), (748), onda to znači, da $\vec{F}$ stoji okomito na osi x. Ako dakle u vodičima teku neke struje, mora njihova vodljivost biti neizmjerna, inače bi polje moralo imati tangencijalnu komponentu. Polje će dakako na površini vodiča biti okomito na tu površinu. Prema tome polja promatranoga tipa možemo dobiti, ako zanemarimo ohmski otpor vodiča. To je u skladu s pretpostavkom (709), da je strujanje energije paralelno s vodičima.

Zaista, ako je vodljivost konačna, u vodičima se stvara Joulova toplina, dakle elektromagnetska energija mora prodirati u vodiče i strujanje energije ne može biti paralelno s vodičima.

U prvom (lijevom) vodiču neka je struja $i(x,t)$, a u drugom povratna struja $-i(x,t)$. Ta je struja općenito funkcija od x i t, jer može varirati prema mjestu i vremenu. Napon između vodiča neka je $u(x,t)$, koji je također funkcija mjesta x i vremena t.

Pokušajmo odrediti struju i napon pomoću polja u mediju oko vodiča.

Napon će biti određen kao

$$u = \int_A^B \vec{F}\vec{ds} \tag{756}$$

na putu od jedne točke A na površini prvoga vodiča do točke B na drugom vodiču, pri čemu se taj put može odabrati po volji, jer je integral nezavisan od puta. Zaista, dva različita takva puta daju isti integral, jer je integral po zatvorenoj krivulji u promatranoj ravnini po Stokesovom teoremu

$$\oint \vec{F}\vec{ds} = \int\int \operatorname{rot}\vec{F}\vec{df} = \int\int \left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)_x \, dy\, dz, \tag{757}$$

budući da $\vec{df}$ ima smjer osi x. No zbog

$$\operatorname{rot}\vec{F} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{758}$$

vrijedi

$$\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)_x = -\mu\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \tag{759}$$

jer je $H_x = 0$. Prema tome je za zatvorenu krivulju u ravnini okomitoj na osi x

$$\oint \vec{F}\vec{ds} = 0.$$

Integrali uzduž dviju različitih krivulja s istim krajnjim točkama moraju dakle biti jednaki. Razumije se, da je svejedno, koje točke na površini vodiča u toj ravnini odabiremo, jer je tangencijalna komponenta uzduž površine vodiča nula, pa integriracija po površini vodiča ne daje prinosa.

Uvrstimo li sada u (756) izraz (747), izlazi

$$u(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\int_A^B \operatorname{grad} U\vec{ds} = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\,(U_2 - U_1) =$$

$$= -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\left(U_1 - U_2\right), \tag{760}$$

gdje su U_1 i U_2 vrijednosti $U(y,z)$ na jednom i drugom vodiču. Na površini vodiča je ta vrijednost konstatna, jer je sa $\vec{F}$ i grad$U$ svagdje okomit na površini vodiča.

U smislu (752) mogu se U_1 i U_2 shvatiti kao elektrostatički potencijali na samim vodičima, ako u ravnini postoji elektrostatičko polje prema (753). Zamišljamo $U_1 > U_2$.

Da nađemo struju $i(x,t)$ računamo integral vektora $\vec{H}$ duž zatvorene krivulje oko jednog vodiča (v.sl. 10), dakle

$$\oint \vec{H}\vec{ds} = \int\int \mathrm{rot}\,\vec{H}\,\vec{df} = \int\int\left(\varepsilon\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \vec{G}\right)\vec{df} = \int\int\left(\varepsilon\frac{\partial F_x}{\partial t} + G_x\right)dy\,dz$$

$$= \varepsilon\int\int\frac{\partial F_x}{\partial t}dy\,dz + \int\int G_x dy\,dz. \tag{761}$$

Zbog $F_x = 0$ prvi integral desno je nula. Dalje je u mediju izvan vodiča zbog $G_x = \varkappa F_x$ i $F_x = 0$ nužno $G_x = 0$. U vodiču je doduše također $F_x = 0$, ali zbog $\varkappa = \infty$ može G_x biti konačan i integral $\int\int G_x dy$ preko presjeka vodiča predstavlja struju i, tj.

$$i(x,t) = \oint \vec{H}\vec{ds}. \tag{762}$$

Uvrštenjem izraza (748) daje

$$i(x,t) = -\left(\varepsilon\frac{\partial C}{\partial t} + \varkappa V\right)\oint\left(\vec{i}\times\mathrm{gradU}\right)ds, \tag{763}$$

gdje faktor pred integralom ne zavisi od y, z i stoga je iz integrala izlučen. Vektor

$$\vec{dn} = \vec{n_0}ds \tag{764}$$

u smjeru normale prema vani na obilaznu krivulju možemo sa $\vec{ds}$ povezati jednadžbom

$$\vec{ds} = \vec{i}\times\vec{dn}, \tag{765}$$

ako smjer $\vec{ds}$ odgovara pozitivnom smislu obilaženja. Vrijedi najprije

$$\left(\vec{i}\times\mathrm{grad}\,U\right)\vec{ds} = \vec{i}\left(\mathrm{grad}\,U\times\vec{ds}\right) \tag{766}$$

i dalje

$$\mathrm{grad}\,U\times\vec{ds} = \mathrm{grad}\,U\times\left(\vec{i}\times\vec{dn}\right) = \vec{i}\left(\mathrm{grad}\,U\vec{dn}\right) - \vec{dn}\left(\vec{i}\mathrm{grad}\,U\right). \tag{767}$$

No $\operatorname{grad} U$ je okomit na osi x, dakle

$$\vec{i} \operatorname{grad} U = 0, \tag{768}$$

tj.

$$\operatorname{grad} U \times \vec{ds} = \vec{i}\left(\operatorname{grad} U \vec{dn}\right) \tag{769}$$

i

$$\vec{i}\left(\operatorname{grad} U \times \vec{ds}\right) = \vec{i}^2\left(\operatorname{grad} U \vec{dn}\right) = \operatorname{grad} U \vec{dn}. \tag{770}$$

Izlazi konačno

$$i(x,t) = -\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V\right) \oint \operatorname{grad} U \vec{dn} \tag{771}$$

za struju, koja teče u jednom vodiču.

Funkcija $V(x,t)$ zadovoljava telegrafsku jednadžbu (734). No onda to čini i $\frac{\partial V}{\partial t}$ i $\frac{\partial V}{\partial x}$, što dobivamo odmah, ako tu jednadžbu deriviramo po t odnosno po x. Čini to onda i linearna kombinacija $\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V$. Konačno faktori $U_2 - U_1$ odnosno $\oint \operatorname{grad} U \vec{dn}$ nezavisni su od x, z, pa tako i funkcije $u(x,t)$ i $i(x,t)$ zadovoljavaju telegrafsku jednadžbu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varkappa\mu \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{772}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \varkappa\mu \frac{\partial i}{\partial t}, \tag{773}$$

No mogu se za $i(x,t)$ i $u(x,t)$ izvesti i jednadžbe prvoga reda, gdje se u svakoj jednadžbi pojavljuju obje funkcije. Zaista, vrijedi na temelju (771)

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x} \oint \operatorname{grad} U \vec{dn} + \varkappa \frac{\partial V}{\partial x} \oint \operatorname{grad} U \vec{dn} \tag{774}$$

ili, zbog (757),

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = -\varkappa \frac{\oint \operatorname{grad} U \vec{dn}}{U_1 - U_2} u - \varepsilon \frac{\oint \operatorname{grad} U \vec{dn}}{U_1 - U_2} \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{775}$$

Dalje vrijedi, s obzirom na (734)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(U_1 - U_2) = \left(\varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \varkappa\mu \frac{\partial V}{\partial t}\right)(U_1 - U_2) = \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V\right)(U_1 - U_2) = -\mu \frac{U_1 - U_2}{\oint \operatorname{grad} U \vec{dn}} \frac{\partial i}{\partial t}. \end{aligned} \tag{776}$$

Pokušat ćemo sada konstante ε, μ, $\varkappa$, $U_1 - U_2$, $\oint \operatorname{grad} U d\vec{n}$, koje su se pojavile i jednadžbama (772), (773), (775), (776), dovesti u vezu s nekim konstantama voda, koje se upotrebljavaju u elektrotehnici.

Promatrajmo u tu svrhu jedno pogonsko stanje, gdje je vod priključen na istosmjerni napon i nastalo je stacionarno stanje. Budući da nema ohmskog otpora u vodičima, a niti promjenljivog magnetskog polja, mora napon biti uzduž voda prostorno i vremenski konstanta. To će prema (757) biti, ako je $\frac{\partial V}{\partial x}$ konstantan.

Stavimo dakle

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = a, \tag{777}$$

dakle

$$V = -ax + f(t). \tag{778}$$

S obzirom na stacionarnost stanja V je nezavisan od t, dakle $f(t) = b$, tj.

$$V = -ax + b. \tag{779}$$

Dobivamo tako

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = a, \tag{780}$$

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V = \varkappa(-ax + b) \tag{781}$$

i

$$u = a\,(U_1 - U_2)\,; \tag{782}$$

$$i(x) = -\varkappa(-ax + b) \oint \operatorname{grad} U d\vec{n}. \tag{783}$$

U mediju može teći struja samo okomito na os x, jer je $\vec{F}$ svagdje okomit na tu os. To strujanje je u svim ravninama jednako, jer je razdioba polja $\vec{F}$ u svim ravninama ista, što se vidi iz (747) i (780). Struja, koja na jedinicu duljine voda, tj. između dviju ravnina okomitih na os x u razmaku jedan, teče kroz medij s jednog voda na drugi, mora biti jednaka smanjenju struje voda, dakle jednaka negativnom prirastu, tj.

$$-\left\{-\varkappa\,[-a\,(x+1)+b] \oint \operatorname{grad} U d\vec{n} + \varkappa\,(-ax+b) \oint \operatorname{grad} U d\vec{n}\right\} =$$

$$= -\varkappa a \oint \operatorname{grad} U d\vec{n}. \tag{784}$$

Podijelimo li tu struju s naponom u, dobivamo konstantu, koja se zove "odvod" po jedinici duljine i opbično se bilježi sa G. (To kolidira s našom oznakom za gustoću struje, ali u ovoj vezi neće dovesti do nesporazuma). Vrijedi dakle za odvod G, da je

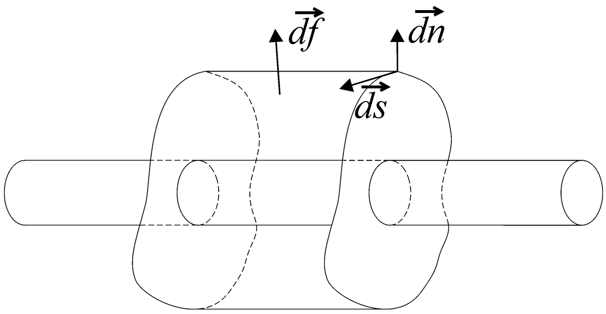
$$G = \frac{-\varkappa a \oint \operatorname{grad} U \vec{dn}}{a\,(U_1 - U_2)} = -\varkappa \frac{\oint \operatorname{grad} U \vec{dn}}{U_1 - U_2}. \tag{785}$$

Pokušajmo sada odrediti kapacitivnost C voda po jedinici duljine. U tu svrhu treba odrediti naboj voda po jedinici duljine i podijeliti ga s naponom.

U smislu jednadžbe (187), koja glasi

$$\int\!\!\int \vec{D}\vec{df} = Q, \tag{786}$$

računajmo plošni integral preko plohe, koja je površina valjka s bazama okomitim na os x u razmaku jedan, a plaštem, koji je određen zatvorenom krivuljom oko jednog vodiča (*slika 11*).



Slika 11.

Integracija preko obadviju baza dat će nulu, jer je D_x zbog $F_x = 0$ svagdje nula. Preostaje integral preko plašta. Kao plošni element $\vec{df}$ možemo uzeti

$$\vec{df} = \vec{dn} \cdot l = \vec{ds} \cdot l \times \vec{i}, \tag{787}$$

tako da je

$$\int\!\!\int \vec{D}\vec{df} = \varepsilon \oint \vec{F}\vec{dn} = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \oint \operatorname{grad} U \vec{dn} = -\varepsilon a \oint \operatorname{grad} U \vec{dn} = Q. \tag{788}$$

Kapacitet C po jedinici duljine bit će dakle

$$C = \frac{Q}{u} = \frac{-\varepsilon a \oint \operatorname{grad} U \vec{dn}}{a\,(U_1 - U_2)} = -\varepsilon \frac{\oint \operatorname{grad} U \vec{dn}}{U_1 - U_2}. \tag{789}$$

Konačno, da odredimo samoindukciju L voda po jedinici duljine, promatramo pogonsko stanje, kod kojega je napon vremenski stalan, ali linearno opada uzduž voda u smjeru osi x. U tom slučaju možemo očekivati, da će se struja u vodičima sastojati iz jednog vremenski konstantnog člana, koji snadbjeva strujanje u mediju između vodova i iz jednog člana, koji raste linearno s vremenom. Ta struja, koja raste linearno s vremenom, daje magnetsko polje, koje također raste linearno s vremenom, pa će to polje inducirati u vodiču potrebni protunapon, jer u vodiču mora biti $\vec{F} = 0$.

Promjena napona $u(x)$ po jedinici duljine bit će dakle proporcionalna s vremenskom derivacijom struje, a konstantu proporcionalnosti ćemo nazivati samoidukcijom L voda po jedinici duljine.

Stavimo dakle

$$\frac{\partial V}{\partial x} = ax - b \tag{790}$$

tj. u smislu jednadžbu (757)

$$u(x) = (-ax + b)\,(U_1 - U_2)\,. \tag{791}$$

Prema (790) mora biti

$$V(x,t) = \frac{ax^2}{2} + bx + f(t), \tag{792}$$

što uvršteno u (734) daje

$$a = \varepsilon\mu\ddot{f} + \varkappa\mu\dot{f}. \tag{793}$$

Opće rješenje skraćene jednadžbe

$$\varepsilon\mu\ddot{y} + \varkappa\mu\dot{y} = 0 \tag{794}$$

glasi

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}. \tag{795}$$

Partikularno rješenje neskraćene jednadžbe (793) možemo postaviti u obliku

$$\nu(t) = \alpha t, \tag{796}$$

što uvršteno u (793) daje

$$a = \varkappa\mu\alpha, \;\; \alpha = \frac{a}{\varkappa\mu}. \tag{797}$$

Prema tome je opće rješenje jednadžbe (793)

$$f(t) = y(t) + \nu(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} + \frac{a}{\varkappa\mu}t. \tag{798}$$

Dobivamo dakle

$$V(x,t) = -\frac{ax^2}{2} + bx + C_1 + C_2 e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t} + \frac{a}{\varkappa\mu}t. \tag{799}$$

Da se dobije struja u lijevom vodiču prema (771) računamo

$$\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}+\varkappa V=-\varkappa C_2e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}+\frac{a\varepsilon}{\varkappa\mu}-\varkappa\frac{ax^2}{2}+\varkappa bx+\varkappa C_1$$

$$+\varkappa C_2e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t}+\frac{a}{\mu}t=\frac{a\varepsilon}{\varkappa\mu}+\varkappa C_1-\frac{\varkappa a}{2}x^2+\varkappa bx+\frac{a}{\mu}t. \tag{800}$$

Vidi se, da C_2 ne ulazi u rezultat, pa ga možemo odabrati jednak nuli.

Prikladnim pomakom početka brojanja vremena možemo uz zadano C_1 postići, da konstanta $\frac{a\varepsilon}{\varkappa\mu}+\varkappa C_1$ postane jednaka nuli, odnosno, možemo to isto postići izborom konstante C_1, naime

$$C_1=-\frac{a\varepsilon}{\varkappa^2\mu}. \tag{801}$$

Prema tome sada funkcija $V(x,t)$ glasi:

$$V(x,t)=-\frac{ax^2}{2}+bx-\frac{a\varepsilon}{\varkappa^2\mu}+\frac{a}{\varkappa\mu}t, \tag{802}$$

a za struju vrijedi prema (771)

$$i(x,t)=\left(\frac{\varkappa a}{2}x^2-\varkappa bx-\frac{a}{\mu}t\right)\oint\mathrm{grad}U d\vec{n}. \tag{803}$$

Slučaj $\varkappa=0$ daje za struju neposredno

$$i(x,t)=-\frac{a}{\mu}t\oint\mathrm{grad}\,U d\vec{n}. \tag{804}$$

Funkcija $f(t)$ je u tom slučaju rješenje jednadžbe

$$a=\varepsilon\mu\ddot{f}, \tag{805}$$

dakle

$$f(t)=\frac{a}{\varepsilon\mu}\frac{t^2}{2}+\beta t+\gamma, \tag{806}$$

pri čemu se prikladnim izborom početka brojanja vremena može postići, da bude $\beta=0$. Bit će dakle onda

$$f(t)=\frac{a}{\varepsilon\mu}\frac{t^2}{2}+\gamma, \tag{807}$$

tj.

$$V(x,t)=-\frac{ax^2}{2}+bx+\frac{a}{\varepsilon\mu}\frac{t^2}{2}+\gamma. \tag{808}$$

Do istoga rezultata možemo doći i graničnim prijelazom $\varkappa \to 0$ iz općeg rješenja (798), ako stavimo

$$C_1 = -\frac{a\varepsilon}{\varkappa^2 \mu}, \tag{809}$$

$$C_2 = \frac{a\varepsilon}{\varkappa^2 \mu} + \gamma \tag{810}$$

i zatim pustimo $\varkappa$ težiti k nuli primjenjujući l'Hospitalovo pravilo.

Ako smo polje U odabrali tako, da je $U_1 > U_2$, onda je $\oint \mathrm{grad} U d\vec{n}$ oko prvog vodiča negativno, pa prema (803) odnosno (804) struja zaista linearno raste.

Dobivamo

$$\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{a}{\mu} \oint \mathrm{grad}\, U d\vec{n} \tag{811}$$

i stoga iz

$$u(x) - u(x+1) = L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{812}$$

zbog (791) izlazi

$$L = \frac{u(x) - u(x+1)}{\frac{\partial i}{\partial t}} = \frac{a\,(U_1 - U_2)}{-\frac{a}{\mu} \oint \mathrm{grad}\, U d\vec{n}} = -\mu \frac{U_1 - U_2}{\oint \mathrm{grad}\, U d\vec{n}}. \tag{813}$$

Prema (785), (789) i (813) dobivamo

$$LC = \varepsilon\mu, \tag{814}$$

$$GL = \varkappa\mu, \tag{815}$$

tako da jednadžbe (772) i (773) možemo pisati u obliku

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + GL\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{816}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + GL\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{817}$$

Te se jednadžbe u elektrotehnici zovu "telegrafske jednadžbe".

No i jednadžbe 1. reda (775) i (776) primaju jednostavan oblik:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{818}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{819}$$

Iz tih se jednadžbi lako dobije (816) i (817) time, da se jedna derivira po x, a druga po t i zatim eliminira jedna od funkcija i odnosno u. Mnogi autori ove jednadžbe (807) i (819) zovu "telegrafskim jednadžbama".

Vidi se, da se te jdnadžbe dobivaju iz egzaktnih rješenja Maxwellovih jednadžbi za elektromagnetsko polje, pod pretpostavkom, da se ohmski otpor vodiča može zanemariti.

U elektrotehnici se te jednadžbe redovno izvode na drugi, manje egzaktni način, pa se tako može uzeti u obzir i ohmski otpor vodiča, no onda se dolazi do jednadžbi, koje vrijede samo približno. Prelazimo na to, da to potanje raspravimo.

Uvedimo ove pretpostavke u svrhu približnog tretiranja problema.

1. Polje $\vec{B}$ u ravnini okomitoj na vodiče se računa, kao da svagdje u vodičima teče ista struja kao na tom mjestu, tj. za dotično x.

2. Zanemaruje se $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, tj. pojava se smatra kvazistacionarnom.

3. Napon $u(x)$ dobiva se iz naboja po jedinici duljine $q(x)$ i $-q(x)$ na vodičima tako, kao da je gustoća naboja uzduž cijelog voda ista.

4a. Struja, koja teče kroz medij, dobiva se kao da je napon između vodiča svagdje isti, tj. za dotično x.

4b. Magnetsko polje te struje odvoda se zanemaruje.

5. $i_2 = -i_1$, tj. struje u vodičima su jednake i suprotnog smjera.

Te su pretpostavke dopustive za ne prebrze promjene, jer su prilike u nekoj ravnini okomitoj na vodiče u prvom redu ovisne o vrijednostima struje, napona i naboja u blizini toga mjesta, a kod polaganih promjena te su vrijednosti i prostorno slabo promjenljive.

Napon je dan sa

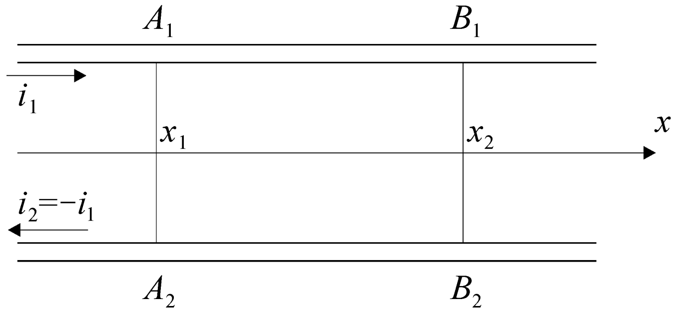
$$u(x) = \int\limits_A^B \vec{F}\vec{ds} \tag{820}$$

gdje se integral uzima od jednog vodiča do drugog u ravnini okomitoj na vodiče, kako smo to i prije uzeli. Promatramo sad zatvoreni put $A_1A_2B_2B_1A_1$ (v.sl.12). Onda će vrijediti

$$\oint \vec{F}\vec{ds} = \int\int \operatorname{rot}\vec{F}\vec{df} = -\frac{\partial}{\partial t}\int\int \vec{B}\vec{df}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int\int B_n df, \tag{821}$$

gdje su dvostruki integrali uzeti preko plohe pravokutnika,



Slika 12.

što ga čini taj zatvoreni put. Lijeva strana će se raspasti na 4 dijela, od kojih su dva naponi između vodiča na mjestima x_1 i x_2, a ostala dva su padovi napona uzduž vodiča. Možemo dopustiti, da je ohmski otpor vodiča različit, R_1 za vodič 1 i R_2 za vodič 2. Onda će biti

$$\oint \vec{F}\vec{ds} = u(x_1) + \int\limits_{A_2}^{B_2} R_2 i_2 dx - u(x_2) + \int\limits_{B_1}^{A_1} R_1 i_1 dx$$

$$= u(x_1) - u(x_2) - \int\limits_{A_1}^{B_1} R_1 i_1 dx - \int\limits_{A_2}^{B_2} R_2 i_1 dx =$$

$$= u(x_1) - u(x_2) - (R_1 + R_2) \int\limits_{x_1}^{x_2} i dx. \tag{822}$$

Stavimo li

$$R_1 + R_2 = R \tag{823}$$

kao ukupni otpor voda po jedinici duljine, izlazi dakle

$$\oint \vec{F}\vec{ds} = u(x_1) - u(x_2) - R \int\limits_{x_1}^{x_2} i dx = -\frac{\partial}{\partial t} \int \int B_n df. \tag{824}$$

Promatramo li kratak odsječak voda, s duljinom $\triangle x$, moći ćemo približno staviti – to točnije, što je $\triangle x$ manji – da je

$$u(x_1) - u(x_2) = u(x_1) - u(x_1 + \triangle x) = -\triangle u \doteq -\frac{\partial u}{\partial x} \triangle x, \tag{825}$$

dalje

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} i dx = \int\limits_{x_1}^{x_1+\triangle x} i dx \doteq i\triangle x \tag{826}$$

i

$$\int\int B_n df = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2} B_n dx\, dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} B_n dy \cdot \triangle x. \tag{827}$$

Označimo li sa L samoindukciju voda po jedinici duljine, bit će $L\triangle x$ samoindukcija toga dijela voda, pa će vrijediti

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\int B_n df = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{y_1}^{y_2} B_n dy \cdot \triangle x = L\triangle x \frac{\partial i}{\partial t}, \tag{828}$$

gdje je predznak minus uvjetovan time, da struja, koja ima pozitivni smjer s lijeva na desno (v.sl.12.) stvara magnetski tok, koji između vodiča prolazi od naprijed prema natrag s obzirom na ravninu slike, dok je smjer od $\vec{df}$ prema naprijed. Stoga pozitivnom $i(x,t)$ odgovara negativni tok $\int\int B_n df$.

Uvrštenje dobivenih izraza u (824) daje

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\triangle x - Ri\triangle x = L\triangle x \frac{\partial i}{\partial t} \tag{829}$$

ili poslije kraćenja sa $\triangle x$,

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{830}$$

Vidi se, da se ta jednadžba podudara sa (819), samo tamo nedostaje član Ri, jer je ohmski otpor voda bio jednak nuli.

Kod izvođenja (830) došla je do izražaja pretpostavka 1, kada smo napisali relaciju (828). Na desnoj strani ulazi $\frac{\partial i}{\partial t}$ na mjestu x. Kada bi polje $\vec{B}$, koje se javlja na lijevoj strani, bilo ovisno o vrijednostima struje na udaljenim mjestima, ne bi faktor L bio konstanta, koja ne zavisi od prostorne razdiobe struje uzduž voda. U (822) je upotrijebljena i pretpostavka 5. Dalje je zanemarano magnetsko polje struje odvoda i zanemaren je utjecaj $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ na magnetsko polje, tj. ušle su pretpostavke 4b i 2.

Pišemo dalje

$$q(x,t) = Cu(x,t), \tag{831}$$

gdje je C kapacitet voda na jedinicu duljine. Za neku kratku duljinu $\triangle x$ bio bi dakle kapacitet $C\triangle x$, a naboj $q(x,t)\triangle x$ (točnije $\int\limits_{x}^{x+\triangle x} q(x,t)dx$), dakle $q\triangle x = C \cdot \triangle x \cdot u$, što daje relaciju (831).

Ovdje je ušla pretpostavka 3. Zaista, da $u(x,t)$ znatno ovisi o razdiobi naboja na udaljenim mjestima voda, ne bi faktor C mogao biti konstanta. Dalje pišemo za struju odvoda i_{od}, da je

$$i_{od}(x,t) = Gu(x,t). \tag{832}$$

Tu G predstavlja vodljivost (recipročni otpor) medija na jedinicu duljine. Na duljini $\triangle x$ bila bi ta vodljivost $G\triangle x$, a struja odvoda na toj duljini $i_{od}\triangle x$, pa bi bilo $i_{od}\triangle x = G\triangle x \cdot u$, što daje (832). Pri tom je ušla pretpostavka 4a, inače G ne bi bio konstanta.

Razlika struje $i(x_1)$ i $i(x_2)$ mora biti jednaka struji odvoda između ta dva mjesta i struji nabijanja, tj. porastu naboja u jedinici vremena, dakle:

$$i(x_1) - i(x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} i_{od} dx + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x_1}^{x_2} q dx =$$

$$= G\int\limits_{x_1}^{x_2} u dx + C\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} dx. \tag{833}$$

Za maleno $x_2 - x_1 = \triangle x$ bit će približno (to točnije, što je $\triangle x$ manje):

$$-\frac{\partial i}{\partial x}\triangle x = Gu\triangle x + C\frac{\partial u}{\partial t}\triangle x, \tag{834}$$

tj.

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{835}$$

a ta se jednadžba podudara sa (807).

Vidimo dakle, kolika su sve zanemarenja sadržana u takvom izvođenju tih jednadžbi. Utoliko je zanimljivije, da su te jednadžbe za $R = 0$ egzaktno ispravne, tj. sva se zanemarenja u tom slučaju u svome djelovanju kompenziraju. No to se ovim putem ne može vidjeti, već je trebalo to izvesti na temelju složenijih razmatranja u okviru Maxwellove teorije.

Za slučaj, da je $R \neq 0$, sigurno su dobivene jednadžbe samo približne. Treba samo pomisliti na brzo promjenljive pojave, gdje nastaje tzv. skin-efekt, dakle povećanje otpora R uzrokovano time, da struja više nije jednoliko raspodijeljena po presjeku vodiča, već teče pretežno u blizini površine. Isto tako ni L više nije konstanta zbog međusobno induktivnog djelovanja strujnih niti u vodičima. Jednadžbe su ipak dobro upotrebljive za ne prebrzo promjenljive pojave, a kod visokofrekventnih pojava moraju se konstante korigirati prema upotrebljenoj frekvenciji.

Iz jednadžbi (830) i (835) (telegrafske jednadžbe 1. reda) izvodimo još telegrafsku jednadžbu 2. reda za struju odnosno za napon. Deriviramo li (830) po x, a (835) po t, izlazi

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R\frac{\partial i}{\partial x} + L\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}, \tag{836}$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = G\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{837}$$

Uvrstimo li u jednadžbu (836) izraz za $\frac{\partial i}{\partial x}$ iz (835) i izraz za $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$ iz (837), izlazi

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -RGu - RC\frac{\partial u}{\partial t} - LG\frac{\partial u}{\partial t} - LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{838}$$

ili

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial u}{\partial t} + GRu. \tag{839}$$

Deriviranje jednadžbe (830) po t, a (835) po x daje

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = R\frac{\partial i}{\partial t} + L\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \tag{840}$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = G\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}. \tag{841}$$

Uvrstimo li u (841) izraz za $\frac{\partial u}{\partial x}$ iz (830) i izraz za $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ iz (840), izlazi

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -GRi - GL\frac{\partial i}{\partial t} - CR\frac{\partial i}{\partial t} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \tag{842}$$

ili

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial i}{\partial t} + GRi. \tag{843}$$

Vidimo, da za veličine $i(x,t)$ i $u(x,t)$ vrijedi ista diferencijalna jednadžba 2. reda, koju zovemo telegrafskom jednadžbom, a prelazi u (817) odnosno (816), ako stavimo $R = 0$. U ovoj potpunijoj - ali samo približno ispravnoj - jednadžbi pojavljuju se još član sa $u(x,t)$ odnosno sa $i(x,t)$.

Ako je medij savršen izolator, pa možemo uzeti $G = 0$, onda dobivamo jednadžbe

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + RC\frac{\partial i}{\partial t} \tag{844}$$

i

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + RC\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{845}$$

Te su onda jednadžbe istoga oblika kao egzaktne jednadžbe (816), (817), gdje je $R = 0$, pa se njihova rješenja dobivaju iz rješenja jednadžbi (816), (817), ako se L nadomjesti sa C i obrnuto, a G sa R. Budući da se odvod može češće zanemariti nego ohmski otpor vodiča, ta je napomena važna, samo treba imati na umu, da (844) i (845) ne vrijede sasvim točno, napose za visoke frekvencije, gdje se konstante mijenjaju.

Razmotrit ćemo sada neka specijalna rješenja telegrafske jednadžbe. Nastojat ćemo pri tome dobiti i uvid u strujanje energije, koje je u slučaju $R = 0$ svakako paralelno s vodičima. Osim toga će nas posebno zanimati širenje valova uzduž voda.

Napomenimo najprije, da se mogu razmatrati i kompleksna rješenja telegrafske jednadžbe (839). Iz činjenice, da je ta jednadžba linearna s konstantnim realnim koeficijentima, lako se zaključuje, da će realni i imaginarni dio kompleksnog rješenja svaki za sebe biti realno rješenje te jednadžbe. Ako dakle postavimo rješenje u obliku

$$f(x,t) = Ae^{\gamma x + \tau t}, \tag{846}$$

gdje su γ i τ neke kompleksne konstante tj.

$$\gamma = \beta + j\alpha, \tag{847}$$

$$\tau = \rho + j\omega, \tag{848}$$

a A neka je realno, onda dobivamo

$$f(x,t) = Ae^{\beta x + \rho t} \cdot e^{j(\alpha x + \omega t)} = Ae^{\beta x + \rho t}\cos(\alpha x + \omega t) +$$

$$+ jAe^{\beta x + \rho t}\sin(\alpha x + \omega t). \tag{849}$$

Funkcija

$$f_1(x,t) = Ae^{\beta x + \rho t}\cos(\alpha x + \omega t) \tag{850}$$

mora dakle također biti rješenje (839), ako je (846) rješenje te jednadžbe. No vrijedi i obrat. Recimo, da je funkcija $f_1(x,t)$ prema (849) rješenje jednadžbe (839). Tvrdimo, da je onda i (846) rješenje te jednadžbe. Zaista, ako provedemo pomak vremenske nultočke, tj. odaberemo drugi trenutak kao početak brojanja vremena supstitucijom

$$t = t' - \frac{\pi}{2\omega}, \tag{851}$$

onda funkcija $f_1\left(x, t' - \frac{\pi}{2\omega}\right)$ dakako opet zadovoljava jednadžbu (839). No ta funkcija glasi

$$f_1\left(x, t' - \frac{\pi}{2\omega}\right) = Ae^{\beta x + \rho\left(t' - \frac{\pi}{2\omega}\right)}\cos\left[\alpha x + \omega\left(t' - \frac{\pi}{2\omega}\right)\right]$$

$$= Ae^{-\frac{\rho\pi}{2\omega}} e^{\beta x+\rho t'} \sin(\alpha t + \omega t'). \tag{852}$$

No zbog linearnosti će i funkcija

$$f_2(x,t) = e^{\frac{\rho\pi}{2\omega}} f_1\left(x, t' - \frac{\pi}{2\omega}\right) = Ae^{\beta x+\rho t'} \sin(\alpha x + \omega t')$$

zadovoljavati jednadžbe (839). Prema tome i realni i imaginarni dio funkcije $f(x,t)$ prema (846) zadovoljavaju tu jednadžbu, dakle, zbog linearnosti te jednadžbe i linearna kombinacija $f_1(x,t) + jf_2(x,t)$, tj. sama kompleksna funkcija $f(x,t)$.

Pokušajmo dakle odrediti konstante γ, τ tako, da (846) zadovoljava jednadžbu (839). Uvrštenje daje

$$\gamma^2 Ae^{\gamma x+\tau t} = LC\tau^2 Ae^{\gamma x+\tau t} + (RC+GL)\,\tau Ae^{\gamma x+\tau t} + GRAe^{\gamma x+\tau t}, \tag{853}$$

dakle

$$\gamma^2 = LC\tau^2 + (RC+GL)\tau + GR. \tag{854}$$

Uvrstimo li izraze (847), (848), izlazi

$$\beta^2 - \alpha^2 = LC(\rho^2 - \omega^2) + (RC+GL)\rho + GR, \tag{855}$$

$$2\alpha\beta = 2LC\rho\omega + (RC+GL)\omega. \tag{856}$$

Ako su dakle α, β, ρ, ω odabrani tako, da zadovoljavaju te dvije jednadžbe, onda je (846), dakle i (850) rješenje telegrafske jednadžbe.

Promatrat ćemo napose dva slučaja. Ako je $\beta = 0$, (850) predstavlja vremenski prigušen (prigušen za $\rho < 0$) val, koji se giba uzduž osi x brzinom $v = -\frac{\omega}{\alpha}$. Ako je pak $\rho = 0$, radi se o prostorno prigušenom (a vremenski neprigušenom) valu, kojemu se amplituda smanjuje u smjeru osi x, ako je $\beta < 0$. I ovdje je brzina širenja dana sa $v = -\frac{\omega}{\alpha}$. Nas će posebno zanimati brzina širenja takvih valova za ta dva slučaja.

Stavimo dakle najprije

$$\beta = 0. \tag{857}$$

Jednadžba (856) daje tada

$$2LC\rho\omega + (RC+GL)\omega = 0 \tag{858}$$

ili

$$\rho = -\frac{RC+GL}{2LC}. \tag{859}$$

Time postaje (855)

$$-\alpha^2 = LC\left(\frac{(RC+GL)^2}{4L^2C^2} - \omega^2\right) - (RC+GL)\frac{RC+GL}{2CL} + GR \tag{860}$$

ili

$$\alpha^2 = LC\omega^2 + \frac{(RC+GL)^2}{4LC} - GR = LC\omega^2 + \frac{(RC-GL)^2}{4LC}, \tag{861}$$

tj.

$$\alpha = \pm\sqrt{LC\omega^2 + \frac{(RC-GL)^2}{4LC}} = \pm\omega\sqrt{LC}\sqrt{1+\frac{(RC-GL)^2}{4L^2C^2\omega^2}}. \tag{862}$$

Za brzinu širenja izlazi dakle

$$v = -\frac{\omega}{\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(RC-GL)^2}{4L^2C^2\omega^2}}}. \tag{863}$$

gdje predznak ovisi o tome, da li se val pomiče u pozitivnom ili u negativnom smjeru osi x.

Iz ove formule vidimo, da je

$$|v| < \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{864}$$

ako je $RC \neq GL$, i dalje, da je

$$\lim_{\omega\to\infty} |v| = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{865}$$

Očito je, da brzina širenja vala raste, kada ω raste, jer se time radikand u nazivniku izraza (863) smanjuje. Granična brzina za neizmjerno veliku frekvenciju je dakle $\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Ako je medij vakuum (ili zrak, što je praktički isto), onda je $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$ brzina svjetlosti. No i za druge medije će biti $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ brzina svjetlosti u dotičnom mediju za slučaj, da je taj medij čisti izolator.

Za specijalni slučaj

$$RC = GL \tag{866}$$

bit će za svaku frekvenciju ista brzina širenja vala $\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Zamislimo li trenutni oblik nekog vala rastavljen pomoću Fourierova integrala u neprekinuti spektar sinusnih valova, onda to znači, da će se svi ti sinusni valovi pomicati istom brzinom i biti će svi vremenski prigušeni istim faktorom $e^{\rho t}$, gdje je sada

$$\rho = -\frac{RC+GL}{2LC} = -\frac{2RC}{2LC} = -\frac{R}{L} = -\frac{G}{C}. \tag{867}$$

No onda će se cijeli val kao cjelina pomicati tom brzinom, a da pri tom ne mijenja oblik, osim toga što se vremenski prigušuje spomenutim faktorom. Zbog toga govorimo **o vodu bez izobličenja (distorzije)**.

Razmotrimo sada rješenje, koje predstavlja vremenski neprigušen, ali prostorno prigušen val, tj. stavimo

$$\rho = 0. \tag{868}$$

Jednadžbe (855), (856) onda glase

$$\beta^2 - \alpha^2 = -LC\omega^2 + GR, \tag{869}$$

$$2\alpha\beta = (RC + GL)\omega. \tag{870}$$

Iz (870) je

$$\alpha = \frac{(RC + GL)\omega}{2\beta}, \tag{871}$$

što uvršteno u (869) poslije sređenja daje

$$\beta^4 - (GR - LC\omega^2)\beta^2 - \frac{(RC + GL)^2\omega^2}{4} = 0, \tag{872}$$

dakle

$$\beta^2 = \frac{GR - LC\omega^2}{2} + \sqrt{\frac{(GR - LC\omega^2)^2}{4} + \frac{(RC + GL)^2\omega^2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{GR - LC\omega^2 + \sqrt{(GR - LC\omega^2)^2 + (RC + GL)^2\omega^2}\right\}, \tag{873}$$

pri čemu pred korijenom očito može pisati samo $+$, jer β^2 ne može biti negativno. Izraz pod korijenom se može dovesti u nešto pregledniji oblik, pa izlazi

$$\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{GR - LC\omega^2 + \sqrt{(G^2 + C^2\omega^2)(R^2 + L^2\omega^2)}}, \tag{874}$$

čime prema (870) dobivamo

$$v = -\frac{\omega}{\alpha} = -\frac{2\beta}{RC + GL} =$$

$$= \pm\frac{\sqrt{2}}{RC + GL}\sqrt{GR - LC\omega^2 + \sqrt{(G^2 + C^2\omega^2)(R^2 + L^2\omega^2)}}. \tag{875}$$

Vidi se, da je ovdje brzina širenja drugačija funkcija frekvencije ω nego kod rješenja s vremenskim (a bez prostornog) prigušenjem. Lagan račun pokazuje, da se taj izraz može pisati i ovako:

$$n_\omega = (C^2R^2 + L^2G^2)\omega^2;$$

$$m_\omega = (C^2R^2 - L^2G^2)^2\omega^4;$$

$$v = \pm\frac{1}{(RC+GL)\sqrt{GR}}\sqrt{2G^2R^2 - n_\omega + (CR-LG)^2\omega^2 + \sqrt{\left(2G^2R^2+n_\omega\right)^2 - m_\omega}}. \tag{876}$$

Taj je oblik prikladan, da se vidi za slučaj voda bez izobličenja, kolika je brzina širenja takvih valova. Neka dakle vrijedi (866). Dobivamo

$$|v| = \frac{1}{2GL\sqrt{GR}}\sqrt{2G^2R^2 - (C^2R^2+L^2G^2)\omega^2 + [2G^2R^2 + (C^2R^2+L^2G^2)\,\omega^2]}$$

$$= \frac{1}{2GL\sqrt{GR}}2GR = \frac{R}{L\sqrt{GR}} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{R}{G}} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{877}$$

I ovdje je dakle za vod bez ograničeja brzina jednaka $\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Prostorno prigušenje je dano sa α, pa izlazi

$$\alpha = -\frac{\omega}{v} = -\omega\sqrt{LC}\text{ , za svaki } v > 0 \tag{878}$$

tj. to prostorno prigušenje je to jače, što je frekvencija veća.

Još ćemo pokazati, da za opći vod brzina s frekvencijom raste i približava se vrijednosti $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Označimo li ω^2 sa ξ, to se prema (875) radi o funkciji

$$|v| = \varphi(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{RC+GL}\sqrt{GR - LC\xi + \sqrt{(G^2+C^2\xi)(R^2+L^2\xi)}}. \tag{879}$$

Da ustanovimo, da li ta funkcija raste, treba odrediti predznak njene derivacije. Ako je

$$\psi(\xi) = \left[\frac{RC+GL}{\sqrt{2}}\varphi(\xi)\right]^2 = GR - LC\xi + \sqrt{(G^2+C^2\xi)(R^2+L^2\xi)}, \tag{880}$$

onda je dalje

$$\psi'(\xi) = \frac{(RC+GL)^2}{2}2\varphi(\xi)\cdot\varphi'(\xi), \tag{881}$$

tako je zbog $\varphi > 0$ dovoljno odrediti predznak derivacije $\psi'(\xi)$, koji se podudara s predznakom funkcije $\varphi'(\xi)$. Izlazi

$$\psi'(\xi) = -LC + \frac{C^2(R^2+L^2\xi) + L^2(G^2+C^2\xi)}{2\sqrt{(G^2+C^2\xi)(R^2+L^2\xi)}}$$

$$= \frac{-2LC\sqrt{(G^2+C^2\xi)(R^2+L^2\xi)} + C^2(R^2+L^2\xi) + L^2(G^2+C^2\xi)}{2\sqrt{(G^2+C^2\xi)(R^2+L^2\xi)}}. \tag{882}$$

Treba dakle odrediti predznak brojnika. No iz

$$\left[C^2(R^2+L^2\xi) - L^2(G^2+C^2\xi)\right]^2 = \left[C^2(R^2+L^2\xi) + L^2(G^2+C^2\xi)\right]^2 -$$

$$-4C^2L^2(R^2+L^2\xi)(G^2+C^2\xi) \geq 0 \tag{883}$$

(jer je na lijevoj strani kvadrat, koji ne može biti negativan) izlazi

$$\left[C^2(R^2+L^2\xi) + L^2(G^2+C^2\xi)\right]^2 \geq 4C^2L^2(R^2+L^2\xi)(G^2+C^2\xi) \tag{884}$$

ili

$$C^2(R^2+L^2\xi) + L^2(G^2+C^2\xi) \geq 2CL\sqrt{(R^2+L^2\xi)(G^2+C^2\xi)}, \tag{885}$$

iz čega se vidi, da je brojnik u (882) pozitivan. Jedini slučaj, kada vrijedi znak jednakosti, bit će prema (883)

$$C^2(R^2+L^2\xi) - L^2(G^2+C^2\xi) = C^2R^2 - L^2G^2 = 0, \tag{886}$$

a to vrijedi samo za vod bez izobličenja. Onda je dakle $\varphi'(\xi) = 0$ što se slaže s time, da je brzina širenja konstanta, tj. nezavisna od ω, dakle i od $\xi = \omega^2$. Za opći vod je $\varphi(\xi)$ svakako uzlazna funkcija, tj. brzina širenja raste s frekvencijom

Da nađemo, čemu se približava, kada frekvencija raste preko svih granica, treba naći $\lim_{\xi\to\infty}\varphi(\xi)$. Iz (880) možemo zaključiti

$$\lim_{\xi\to\infty}\psi(\xi) = \frac{(RC+GL)^2}{2}\left(\lim_{\xi\to\infty}\varphi(\xi)\right)^2, \tag{887}$$

dakle

$$\lim_{\xi\to\infty}\varphi(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{RC+GL}\sqrt{\lim_{\xi\to\infty}\psi(\xi)}, \tag{888}$$

pa je dakle dovoljno odrediti $\lim_{\xi\to\infty}\psi(\xi)$.

Bit će

$$\lim_{\xi\to\infty}\psi(\xi) = \lim_{\xi\to\infty}\left[GR - LC\xi + \sqrt{(G^2+C^2\xi)(R^2+L^2\xi)}\right]$$

$$= \lim_{\xi\to\infty}\frac{\frac{GR}{\xi} - LC + \sqrt{\left(\frac{G^2}{\xi}+C^2\right)\left(\frac{R^2}{\xi}+L^2\right)}}{\frac{1}{\xi}}. \tag{889}$$

Ovo se može shvatiti kao neodređeni oblik $\frac{0}{0}$, pa ga rješavamo po l'Hospitalovu pravilu derivirajući brojnik i nazivnik svaki za sebe.

$$\lim_{\xi\to\infty}\psi(\xi)=\lim_{\xi\to\infty}\frac{-\frac{GR}{\xi^2}+\frac{\frac{R^2}{\xi}\left(\frac{R^2}{\xi}+L^2\right)-\frac{R^2}{\xi^2}\left(\frac{G^2}{\xi}+C^2\right)}{2\sqrt{\left(\frac{G^2}{\xi}+C^2\right)\left(\frac{R^2}{\xi}+L^2\right)}}}{-\frac{1}{\xi^2}}$$

$$=\lim_{\xi\to\infty}\left[GR+\frac{G^2\left(\frac{R^2}{\xi}+L^2\right)+R^2\left(\frac{G^2}{\xi}+C^2\right)}{2\sqrt{\left(\frac{G^2}{\xi}+C^2\right)\left(\frac{R^2}{\xi}+L^2\right)}}\right]$$

$$=GR+\frac{G^2L^2+R^2C^2}{2LC}=\frac{(GL+RC)^2}{2LC}. \tag{890}$$

Uvršteno u (888) dobivamo

$$\lim_{\omega\to\infty}|v|=\lim_{\xi\to\infty}\varphi(\xi)=\frac{\sqrt{2}}{RC+GL}\frac{GL+RC}{\sqrt{2LC}}=\frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{891}$$

čime je dokaz naše tvrdnje proveden: i za rješenje s prostornim prigušenjem brzina s frekvencijom raste i približava se vrijdnosti $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, tj. brzini svjetlosti u mediju, u kojemu se vodovi nalaze, kada bi taj medij bio čisti izolator.

Prijeći ćemo sada na razmatranje jednog drugog problema. Zamislimo, da je vod mrtav, tj. da je svagdje $u=0$, $i=0$. Priključimo na početak voda napon $u_0=1$. Onda će se uzduž voda širiti val sa strmom frontom, pa nas zanima, kojom će se brzinom širiti taj diskontinuitet u prostornoj razdiobi napona.

Da taj problem riješimo, valja poći od telegrafske jednadžbe i tražiti rješenje, koje odgovara rečenim početnim i rubnim uvjetima. Ako je napon 1 priključen na mjestu $x=0$, mora dakle biti

$$u(0,t)=1 \;\text{ za } t>0. \tag{892}$$

Dalje je

$$u(x,0)=0 \;\text{ za } x>0. \tag{893}$$

Konačno možemo uzeti, da je za vrlo veliko x, recimo za $x=l$, napon stalno nula, jer val do toga mjesta dopire tek poslije dugo vremena. Možemo zamišljati, da je vod na mjestu $x=l$ kratko spojen (što nema važnosti, dok val nije još dospio do tamo), pa onda u rješenju pustiti da l teži prema neizmjerno.

Da lakše dobijemo rješenje, primjenit ćemo Laplaceovu transformaciju s obzirom na varijablu t. Pri tome je za $t=0$ ne samo $u(x,0)=0$, nego i $\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0}=0$, jer u prvom trenutku val još nije dospio do dotičnog mjesta, pa se napon tamo ne mijenja. Preslikavanjem napona $u(x,t)$ u donje područje dobivamo novu funkciju od x i p, dakle

$$\mathcal{L}\left(u(x,t)\right) = \mu(x,p), \tag{894}$$

tj.

$$\mu(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x,t) dt. \tag{895}$$

Parcijalne derivacije po parametru x mogu se izvršiti pod znakom integracije, tako da dobijemo

$$\frac{\partial \mu(x,p)}{\partial x} = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dt \tag{896}$$

i

$$\frac{\partial^2 \mu(x,p)}{\partial x^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dt, \tag{897}$$

tj., drukčije pisano,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}. \tag{898}$$

Telegrafska jednadžba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC+GL)\frac{\partial u}{\partial x} + GRu \tag{899}$$

primjenom Laplaceove transformacije prelazi u

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = LC\left[p^2\mu(x,p) - pu(x,0) - \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)_{t=0}\right]$$

$$+(RC+GL)\left[p\mu(x,p) - u(x,0)\right] + GR\mu(x,p) \tag{900}$$

ili, zbog $u(x,0) = 0$ i $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$,

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = \left[LCp^2 + (RC+GL)p + GR\right] \mu(x,p). \tag{901}$$

No ovdje se pojavljuje samo druga derivacija po x, tako da je to obična diferencijala jednadžba s obzirom na varijablu x.

Označimo kraće

$$LCp^2 + (RC + GL)p + GR = (R + pL)(G + pC) = q(p), \tag{902}$$

onda jednadžba glasi:

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = q\mu. \tag{903}$$

Njezino rješenje glasi

$$\mu = c_1 e^{x\sqrt{q}} + c_2 e^{-x\sqrt{q}}. \tag{904}$$

Da se odrede konstante, moramo uočiti, da je za $x = 0$

$$u(0, t) = 1. \tag{905}$$

dakle

$$\mu(0, p) = \frac{1}{p} \tag{906}$$

i dalje,

$$u(l, t) = 0, \tag{907}$$

dakle

$$\mu(l, p) = 0. \tag{908}$$

Prema tome (904) daje za $x = 0$

$$\frac{1}{p} = c_1 + c_2 \tag{909}$$

i za $x = l$

$$0 = c_1 e^{l\sqrt{q}} + c_2 e^{-l\sqrt{q}}. \tag{910}$$

Iz toga je

$$c_1 = \frac{1}{(1 - e^{2l\sqrt{q}})p}, \tag{911}$$

$$c_2 = \frac{1}{(1 - e^{-2l\sqrt{q}})p}. \tag{912}$$

Sada provodimo granični prijelaz $l \to \infty$. Izlazi

$$c_1 = 0, \tag{913}$$

$$c_2 = \frac{1}{p}, \tag{914}$$

tako da rješenje problema u donjem području glasi

$$\mu(x,p) = \frac{1}{p} e^{-x\sqrt{q(p)}}. \tag{915}$$

Zadatak će dakle biti riješen, ako uspijemo ovu funkciju vratiti u gornje područje uzevši u obzir značenje (902) za $q(p)$.

Da se to provede, potrebna je izvjesna priprema.

Sjetimo se najprije definicije Besselove funkcije 0-tog reda:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(4!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + ... \tag{916}$$

Stavimo li $x = 2\sqrt{t}$, izlazi

$$J_0(2\sqrt{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2} = 1 - \frac{t}{(1!)^2} + \frac{t^2}{(2!)^2} - \frac{t^3}{(3!)^2} + ... \tag{917}$$

Tražimo li sada donju funkciju, možemo Laplaceovu transformaciju primjeniti član po član. (Da se smije, ne obrazlažemo potanje). Izlazi tako

$$\mathcal{L}\left(J_0(2\sqrt{t})\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{p}\right)^3 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{p}\right)^4 + ... =$$

$$= \frac{1}{p}\left[1 - \frac{\frac{1}{p}}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^3}{3!} + ...\right] = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}, \tag{918}$$

tj.

$$\mathcal{L}\left(J_0(2\sqrt{t})\right) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}. \tag{919}$$

Tražit ćemo dalje donju funkciju za funkciju $J_0(\sqrt{t^2 - \xi^2}) \cdot S(t - \xi)$, tj. funkciju, koja je jednaka nuli za $t < \xi$ i jednaka $J_0(\sqrt{t^2 - \xi^2})$ za $t > \xi$. Označimo li tu donju funkciju sa $f(p)$, bit će dakle

$$f(p) = \int_{\xi}^{\infty} e^{-pt} J_0(\sqrt{t^2 - \xi^2}) dt. \tag{920}$$

Da taj integral odredimo, ići ćemo zaobilaznim putem. Bit će zgodno, da umjesto funkcije $J_0(\sqrt{t^2 - \xi^2})$ razmatramo još nešto općenitiju funkciju $J_0(a\sqrt{t^2 - \xi^2})$, gdje je a neka konstanta. Do te bismo funkcije došli, ako u funkciji $J_0(\sqrt{t^2-\xi^2})$ nadomjestimo t sa at i ξ sa $a\xi$. Laplaceova transformacija onda glasi

$$f(p) = \int\limits_{\xi}^{\infty} e^{-pt} J_0(a\sqrt{t^2-\xi^2})dt, \tag{921}$$

što za $a = 1$ prelazi u (920). Uvodimo novu varijablu integracije u prema

$$u^2 = t^2 - \xi^2 \text{ ili } t = \sqrt{u^2+\xi^2}, \tag{922}$$

dakle

$$dt = \frac{udu}{\sqrt{u^2+\xi^2}}. \tag{923}$$

Izlazi

$$f(p) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-p\sqrt{u^2+\xi^2}} J_0(au) \frac{udu}{\sqrt{u^2+\xi^2}}, \tag{924}$$

gdje su granice dobivene time, što za $t = \xi$ izlazi $u = 0$ i za $t \to \infty$ vrijedi $u \to \infty$. Glavna teškoća je Besselova funkcija pod integralom, koju smo ipak utoliko pojednostavili, da joj je sada argument postao jednostavan. Da je se sasvim riješimo, provest ćemo jednu Laplaceovu transformaciju, i to s obzirom na varijablu a^2 kao varijablu gornjeg područja, dok će se varijabla u donjem području te nove transformacije zvati q. Vrijedi

$$J_0(au) = J_0\left(2\sqrt{\frac{u^2}{4}a^2}\right). \tag{925}$$

U drugu ruku znamo, ako varijablu gornjeg područja pomnžimo s nekom konstantom b, onda u donjem području treba varijablu i funkciju podijeliti sa b. Prema (919) vrijedi dakle

$$\mathcal{L}\left(J_0(2\sqrt{bt})\right) = \frac{1}{b}\frac{1}{\frac{p}{b}} e^{-\frac{1}{\frac{p}{b}}} = \frac{1}{p} e^{-\frac{b}{p}}. \tag{926}$$

Pišemo li a^2 mjesto t, $\frac{u^2}{4}$ mjesto b i q mjesto p, izlazi

$$\mathcal{L}\left(J_0(au)\right) = \mathcal{L}\left(J_0\left(2\sqrt{\frac{u^2}{4}a^2}\right)\right) = \frac{1}{q} e^{-\frac{u^2}{4q}} \tag{927}$$

ili

$$\mathcal{L}_{(a^2)} J_0(au) = \frac{1}{q} e^{-\frac{u^2}{4q}}, \tag{928}$$

gdje $\mathcal{L}_{(a^2)}$ znači operator Laplaceove transformacije s obziorm na gornju varijablu a^2. Rezultat primjene operatora $\mathcal{L}_{(a^2)}$ dakako više ne zavisi od gornje varijable a^2, kako se to i vidi iz desne strane (928). Primjenimo li taj operator na obje strane jednadžbe (924) (gdje lijeva strana dakako osim p zavisi i od parametra a) izlazi

$$\mathcal{L}_{(a^2)}f(p) = \int_0^\infty e^{-p\sqrt{u^2+\xi^2}}\mathcal{L}_{(a^2)}J_0(au)\frac{udu}{\sqrt{u^2+\xi^2}}, \tag{929}$$

jer $\mathcal{L}_{(a^2)}$ znači množenje sa e^{-qa^2} i zatim integraciju po a^2 od 0 do ∞, a to se sve može izvršiti pod znakom integracije po u. S obzirom na (928) izlazi dakle

$$\mathcal{L}_{(a^2)}f(p) = \int_0^\infty \frac{1}{q}e^{-p\sqrt{u^2+\xi^2}}e^{-\frac{u^2}{4q}}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\xi^2}}. \tag{930}$$

Da nađemo $f(p)$, treba taj integral dovesti u oblik

$$\int_0^\infty e^{-qa^2}h(a^2)d(a^2), \tag{931}$$

jer je onda $h(a^2)$ tražena gornja funkcija, koja će dakako ovisiti i o varijabli p, koja kod Laplaceve transformacije s obzirom na a^2 ima ulogu paremetra. Oblik (931) za integral (930) postići ćemo postepenom primjenom nekih supstitucija u integralu (930). Najprije uvodimo novu varijablu integracije w prema

$$u = 2q\sqrt{w}, \tag{932}$$

$$du = \frac{q}{\sqrt{w}}dw. \tag{933}$$

Izlazi

$$\mathcal{L}_{(a^2)}f(p) = \int_0^\infty \frac{1}{q}e^{-p\sqrt{4q^2w+\xi^2}}e^{-qw}\frac{2q^2dw}{\sqrt{4q^2w+\xi^2}}$$

$$= \int_0^\infty e^{-qw-2pq\sqrt{w+\frac{\xi^2}{4q^2}}}\frac{dw}{\sqrt{w+\frac{\xi^2}{4q^2}}}, \tag{934}$$

pri čemu su granice integracije ostale iste, jer $u = 0$ daje $w = 0$ i za $u \to \infty$ vrijedi $w \to \infty$. Druga supstitucija neka je

$$w + \frac{\xi^2}{4q^2} = v^2, \tag{935}$$

$$dw = d(v^2) = 2vdv. \tag{936}$$

Ovdje za $w = 0$ dobivamo $v = \frac{\xi}{2q}$, a za $w \to \infty$ vrijedi $v \to \infty$, tj.

$$\mathcal{L}_{a^2} f(p) = 2 \int_{\frac{\xi}{2q}}^{\infty} e^{-qv^2 + \frac{\xi^2}{4q} - 2pqv} dv. \tag{937}$$

Konačno prelazimo na varijablu integracije a^2 supstitucijom

$$v = \frac{\xi}{2q} + \sqrt{a^2 + p^2} - p;\ dv = \frac{d(a^2)}{2\sqrt{a^2 + p^2}}. \tag{938}$$

Za $v = \frac{\xi}{2q}$ izlazi $\sqrt{a^2 + p^2} = p$ ili $a^2 + p^2 = p^2$, dakle $a^2 = 0$; za $v \to \infty$ vrijedi $a^2 \to \infty$. Dalje će eksponent u (937) dati

$$-qv^2 + \frac{\xi^2}{4q} - 2pqv = -q \left(-\frac{\xi}{2q} + \sqrt{a^2 + p^2} - p \right)^2 + \frac{\xi^2}{4q}$$

$$-2pq \left(\frac{\xi}{2q} + \sqrt{a^2 + p^2} - p \right) = -\frac{\xi^2}{4q} - qa^2 - 2qp^2$$

$$-\xi\sqrt{a^2 + p^2} + p\xi + 2pq\sqrt{a^2 + p^2} + \frac{\xi^2}{4q} - p\xi - 2pq\sqrt{a^2 + p^2} + 2p^2 q$$

$$= -qa^2 - \xi\sqrt{a^2 + p^2}. \tag{939}$$

Time dobivamo iz (937)

$$\mathcal{L}_{a^2} f(p) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi\sqrt{a^2+p^2}}}{\sqrt{a^2 + p^2}} d(a^2), \tag{940}$$

što se podudara sa (931), ako stavimo

$$h(a^2) = \frac{e^{-\xi\sqrt{a^2+p^2}}}{\sqrt{a^2 + p^2}}. \tag{941}$$

Vrijedi dakle

$$f(p) = \mathcal{L}\left[J_0(a\sqrt{t^2 + \xi^2}) S(t - \xi) \right] = \frac{e^{-\xi\sqrt{a^2+p^2}}}{\sqrt{a^2 + p^2}}. \tag{942}$$

Sjetimo se sada definicije Besselove funkcije n-toga reda:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \tag{943}$$

Napose je za $n = 1$

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}, \tag{944}$$

dok za $n = 0$ izlazi (916). Deriviramo li $J_0(x)$, otpada član sa $k = 0$, pa dobivamo

$$J_0'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \frac{1}{2}}{(k!)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}}{(k-1)!k!}. \tag{945}$$

Uvedemo li novi indeks sumacije

$$r = k - 1 \tag{946}$$

onda taj indeks prima vrijednosti od 0 do ∞, kad k prima vrijednosti od 1 do ∞, pa izlazi

$$J_0'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}}{r!(r+1)!} = -\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}}{r!(r+1)!}$$

$$= -J_1(x). \tag{947}$$

Iz tog izlazi

$$\frac{d}{d\xi} J_0\left(a\sqrt{t^2-\xi^2}\right) = J_0'\left(a\sqrt{t^2-\xi^2}\right) \frac{-a\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}} =$$

$$= \frac{a\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}} J_1\left(a\sqrt{t^2-\xi^2}\right). \tag{948}$$

Za derivaciju funkcije $J_0\left(a\sqrt{t^2-\xi^2}\right) S(t-\xi)$ vrijedi dakle

$$\frac{d}{d\xi}\left[J_0\left(a\sqrt{t^2-\xi^2}\right) S(t-\xi)\right] = \frac{a\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}} J_1\left(a\sqrt{t^2-\xi^2}\right) S(t-\xi) -$$

$$-J_0\left(a\sqrt{t^2-\xi^2}\right) \delta(t-\xi), \tag{949}$$

gdje je $\delta(t)$ Diracova funkcija. No budući da je Diracova funkcija $\delta(t-\xi)$ jednaka nuli svagdje osim za $t=\xi$, to njezin faktor dolazi do izražaja samo za $t=\xi$, pa vrijedi

$$J_0\left(a\sqrt{t^2-\xi^2}\right)\delta(t-\xi)=J_0(0)\delta(t-\xi)=\delta(t-\xi), \tag{950}$$

tj. bit će

$$\frac{d}{d\xi}\left[J_0\left(a\sqrt{t^2-\xi^2}\right)S(t-\xi)\right]=-\delta(t-\xi)+\frac{a\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}}J_1\left(a\sqrt{t^2-\xi^2}\right)S(t-\xi). \tag{951}$$

Deriviramo li obje strane od (942) po parametru ξ, možemo to na lijevoj strani učiniti pod operatorom $\mathcal{L}$, koji znači množenje sa e^{-pt} i integraciju po t od 0 do ∞. Izlazi dakle

$$\mathcal{L}\left[-\delta(t-\xi)+\frac{a\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}}J_1(a\sqrt{t^2-\xi^2})S(t-\xi)\right]=-e^{-\xi\sqrt{a^2+p^2}}. \tag{952}$$

Nadomjestimo li p sa bp, moramo u gornjoj funkciji t nadomjestiti s $\frac{t}{b}$ i tu funkciju podijeliti sa b. Uzet ćemo, da je $b>0$. Vrijedi dakle

$$\mathcal{L}\left[-\frac{1}{b}\delta\left(\frac{t}{b}-\xi\right)+\frac{a\xi}{b\sqrt{\frac{t^2}{b^2}-\xi^2}}J_1\left(a\sqrt{\frac{t^2}{b^2}-\xi^2}\right)S\left(\frac{t}{b}-\xi\right)\right]$$

$$=-e^{-\xi\sqrt{a^2+b^2p^2}}. \tag{953}$$

No

$$S\left(\frac{t}{b}-\xi\right)=S(t-b\xi) \text{ za } b>0 \tag{954}$$

jer je ta jedinična funkcija jendaka nuli za $\frac{t}{b}-\xi<0$, što je za $b>0$ ekvivalentno sa $t-b\xi<0$. Isto tako je jedinična funkcija 1 za $\frac{t}{b}-\xi>0$, tj. $t-b\xi>0$.

Dalje vrijedi

$$\delta(t-b\xi)=\frac{d}{dt}S(t-b\xi)=S'(t-b\xi)=\frac{d}{dt}S\left(\frac{t}{b}-\xi\right)=$$

$$=\frac{1}{b}S'\left(\frac{t}{b}-\xi\right)=\frac{1}{b}\delta\left(\frac{t}{b}-\xi\right) \tag{955}$$

tj.

$$\delta\left(\frac{t}{b}-\xi\right)=b\cdot\delta\left(t-b\xi\right). \tag{956}$$

Uvršteno u (953) to daje

$$\mathcal{L}\left[-\delta(t-b\xi)+\frac{a\xi}{\sqrt{t^2-b^2\xi^2}}J_1\left(\frac{a}{b}\sqrt{t^2-b^2\xi^2}\right)S(t-b\xi)\right]$$

$$=-e^{-\xi\sqrt{a^2+b^2p^2}}, \tag{957}$$

Nadomjestimo konačno p sa $p+\rho$, onda se gornja funkcija prigušuje $e^{-\rho t}$, tj.

$$\mathcal{L}\left[-e^{-\rho t}\delta(t-b\xi)+\frac{a\xi e^{-\rho t}}{\sqrt{t^2-b^2\xi^2}}J_1\left(\frac{a}{b}\sqrt{t^2-b^2\xi^2}\right)S(t-b\xi)\right]$$

$$=-e^{-\xi\sqrt{a^2+b^2(p+\rho)^2}}. \tag{958}$$

Sada ćemo obje strane pomnožiti sa $-\frac{1}{p}$. No množenje donje funkcije sa $\frac{1}{p}$ znači integraciju gornje funkcije po t od 0 do t, tako da umjesto da množimo sa $\frac{1}{p}$ izvan operatora $\mathcal{L}$ možemo integrirati po t unutar toga operatora. Dalje vrijedi

$$\int\limits_0^t e^{-\rho t}\delta(t-b\xi)dt=e^{-\rho b\xi}S(t-b\xi), \tag{959}$$

jer δ-funkcija vadi funkcijsku vrijednost od $e^{-\rho t}$ za $t=b\xi$, ako je $t>b\xi$, tj. ako se integracija proteže preko toga mjesta, a integral je jednak nuli, ako je $t<b\xi$. To se slaže s desnom stranom (959). Dobivamo tako

$$\mathcal{L}\left[-e^{-\rho b\xi}S(t-b\xi)-\int\limits_0^t\frac{a\xi e^{-\rho t}}{\sqrt{t^2-b^2\xi^2}}J_1\left(\frac{a}{b}\sqrt{t^2-b^2\xi^2}\right)S(t-b\xi)dt\right]$$

$$=\frac{1}{p}e^{-\xi\sqrt{a^2+b^2(p+\rho)^2}}. \tag{960}$$

Uzmimo sad još, da je konačna konstanta a čisto imaginarna, tj.

$$a=j\alpha, \tag{961}$$

gdje je α realno. Treba onda uočiti, da je prema (944)

$$J_1(jx)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{jx}{2}\right)^{2k+1}$$

$$=j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!}=j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$$

$$= j\left(\frac{x}{2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!2!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!3!}+...\right). \tag{962}$$

Običava se označiti

$$I_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!}, \tag{963}$$

dakle

$$J_1(jx)=jI_1(x), \tag{964}$$

pa stoga uvrštavanjem vrijednosti (961) u (960) dobivamo

$$\mathcal{L}\left[e^{-\rho b\xi}S(t-b\xi)+\int_0^t\frac{\alpha\xi e^{-\rho t}}{\sqrt{t^2-b^2\xi^2}}I_1\left(\frac{\alpha}{b}\sqrt{t^2-b^2\xi^2}\right)S(t-b\xi)dt\right]$$

$$=\frac{1}{p}e^{-\xi\sqrt{b^2(p+\rho)^2-\alpha^2}}. \tag{965}$$

Sada imamo sredstva, da nađemo gornju funkciju rješenja (915) naše diferencijalne jednadžbe (903), koja odgovara telegrafskoj jednadžbi.

S obzirom na (902) vrijedi

$$q(p)=LCp^2+(RC+GL)p+GR=LC\left(p+\frac{RC+GL}{2LC}\right)^2-$$

$$-\frac{(RC-GL)^2}{4LC}=LC\left[p+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)\right]^2-LC\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)^2. \tag{966}$$

Obično se označuje

$$\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right) \tag{967}$$

kao **prigušenje** voda, a

$$\sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right) \tag{968}$$

kao **distorzija** ili **izobličenje** voda. Napominjemo, da se ta veličina ρ slaže s veličinom, koju smo prema (859) kod vodova s vremenskim prigušenjem zvali $-\rho$, dok se σ također pojavilo u jednadžbi (863) pod korijenom. Nazovemo li još sa w graničnu brzinu

$$w=\frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{969}$$

onda bi tadašnja formula (863) za brzinu vremenski prigušena sinusna vala glasila

$$v = \pm w \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}}. \tag{970}$$

Vratimo se sada na funkciju $q(p)$. Izlazi

$$q(p) = \frac{1}{w^2} \left[(p + \rho)^2 - \sigma^2 \right], \tag{971}$$

pa ako u (965) stavimo

$$\alpha = \frac{\sigma}{w}, \tag{972}$$

$$b = \frac{1}{w}, \tag{973}$$

i mjesto ξ napišemo x, izlazi

$$\mathcal{L} \left[e^{-\frac{\rho}{w} x} S\left(t - \frac{x}{w}\right) + \frac{\sigma}{w} \int_0^t e^{-\rho t} \frac{x}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{w}\right)^2}} I_1 \left(\sigma \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{w}\right)^2} \right) S\left(t - \frac{x}{w}\right) dt \right]$$

$$= \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{w}\sqrt{(p+\rho)^2 - \sigma^2}} = \frac{1}{p} e^{-x\sqrt{q(p)}}. \tag{974}$$

Izraz pod operatorom $\mathcal{L}$ je dakle naše gornja funkcija i traženo rješenje za napon $u(x,t)$, koje možemo napisati ovako:

$$u(x,t) = 0 \ \text{ za } \ t < \frac{x}{w}$$

i

$$u(x,t) = e^{-\frac{\rho}{w} x} + \frac{\sigma}{w} \int_{\frac{x}{w}}^{t} e^{-\rho t} \frac{x}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{w}\right)^2}} I_1 \left(\sigma \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{w}\right)^2} \right) dt$$

$$\text{za } t > \frac{x}{w}. \tag{975}$$

Vidi se, da će na nekom mjestu x napon biti jednak nuli do trenutka $t = \frac{x}{w}$ i tada skočiti na vrijednost $e^{-\frac{\rho}{w} x}$ (jer je integral još jednak nuli). Prema tome se kod $t = \frac{x}{w}$ nalazi prekinutost, tj. strma fronta vala, koja se širi brzinom w i njezina se visina ekponencijalno prigušuje, jer iznosi $e^{-\frac{\rho}{w} x} = e^{-\rho t}$.

Razabire se dakle, da se diskontinuitet u prostornoj razdiobi napona širi brzinom w, koju smo prije upoznali kao graničnu brzinu specijalnih tipova valova, kad frekvencija teži prema neizmjerno. Pomoću teorije karakteristika za diferencijalne jednadžbe hiperbolnog tipa može se to općenito dokazati za diskontinuitete ma kakvih valova, dok smo se mi ograničili na specijalno rješenja, koje se dobiva za slučaj priključenja istosmjernog napona.

Zanimljivo je razmotriti ovo pitanje sa stajališta prikazivanja neke funkcije pomoću Fourierova integrala.

Prema teoremima o egzistenciji i jednoznačnosti rješenja diferencijalnih jednadžbi, rješenje $u(x,t)$ telegrafske jednadžbe (899) je određeno, ako je poznata na cijelom vodu za x od $-\infty$ do $+\infty$ funkcija $u(x,0)$ i $\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0}$, dakle vrijednost funkcije i njezine prve derivacije po vremenu za $t=0$ i za svako x. Za kraću oznaku pisat ćemo za te dvije funkcije $u_0(x)$ i $u_{t0}(x)$, tj.

$$u_0(x) = u(x,0), \tag{976}$$

$$u_{t0}(x) = \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0}. \tag{977}$$

Te dvije funkcije možemo prikazati u obliku Fourierova integrala, koji ćemo uzeti u kompleksnom obliku. Bit će dakle

$$u_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi) e^{2\pi j \xi x} d\xi, \tag{978}$$

$$u_{t0}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\xi) e^{2\pi j \xi x} d\xi, \tag{979}$$

gdje su funkcije $\varphi_1(\xi)$ i $\varphi_2(\xi)$ određene formulama

$$\varphi_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(x) e^{-2\pi j \xi x} dx, \tag{980}$$

$$\varphi_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{t0}(x) e^{-2\pi j \xi x} dx. \tag{981}$$

Nije teško uvidjeti, da zbog realnosti $u_0(x)$ mora $\varphi_1(\xi)$ biti konjugirano kompleksna vrijednost od $\varphi_1(-\xi)$, a analogno vrijedi za $\varphi_2(\xi)$.

Pokušajmo sada sagraditi rješenje $u(x,t)$ pomoću vremenski prigušenih (i prostorno neprigušenih) valova. Takvi valovi su dani izrazom

$$u = Ae^{-\rho t}\sin(\alpha x + \omega t), \tag{982}$$

ili

$$u = Ae^{-\rho t}\cos(\alpha x + \omega t),$$

gdje je prema (862)

$$\alpha = \pm\frac{\omega}{w}\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2}} \tag{983}$$

sa značenjem (968) za σ i (969) za w, dok ρ ima značenje (967). Predznak za α je pozitivan ili negativa, prema tome, da li se valovi šire na lijevo ili desno (u smjeru negativne ili pozitivne osi x). Zaista je brzina širenja dana prema (863) kao $v = -\frac{\omega}{\alpha}$, tj. v je suprotnog predznaka nego α. No računski će nam biti zgodnije, da dopuštamo za ω i negativne vrijednosti (što fizikalno ne znači ništa bitno novo, jer je npr. $\cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$ i $\sin(-\omega t) = -\sin(\omega t)$, a da α i ω budu uvijek istog predznaka. Onda moramo valove s pozitivnom i negativnom brzinom razlikovati tako, da argument sinusa i kosinusa (982) jedanput pišemo kao $\alpha x - \omega t$, a drugi put $\alpha x + \omega t$. Ako su α i ω istog predznaka, onda u prvom slučaju val putuje na desno u drugom u lijevo. Veza između α i ω bit će onda prema (983)

$$\alpha = \frac{\omega}{w}\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2}} \tag{984}$$

ili riješimo po ω,

$$\omega = \alpha w\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{\alpha^2 w^2}} \tag{985}$$

Ako želimo dopustiti i vrijednosti za α, koje su apsolutno manje od σ, onda postaje ω imaginarno, a to znači, da se više ne radi o vremenski prigušenom titranju na bilo kojem fiksiranom mjestu, nego o aperiodičkom mijenjanju napona na dotičnom mjestu. Te "neprave" valove također ćemo upotrijebiti kao rješenja telegrafske jednadžbe. Prostorno su to sinusni valovi s duljinom vala većom ili jednakom $\frac{2\pi}{\sigma}$, a uopće se ne pomiču, nego su samo vremenski prigušeni slabije ili jače nego što odgovara faktoru $e^{-\rho t}$. Zaista, ako je recimo $\omega = j\zeta$, gdje je

$$\zeta = \sqrt{\sigma^2 - \alpha^2 w^2} \tag{986}$$

rješenje $e^{-\rho t}e^{j(\alpha x+\omega t)}$ prelazi u $e^{-(\rho+\zeta)t}e^{j\alpha x}$, a rješenje $e^{-\rho t}e^{j(\alpha x-\omega t)}$ prelazi u $e^{-(\rho-\zeta)t}e^{j\alpha x}$. Prigušenje može dakle odgovarati faktoru $-(\rho+\zeta)$ ili $-(\rho-\zeta)$ u eksponentau, dakle biti jače ili slabije nego kod "pravih" valova. Budući da je $\sigma < \rho$ [jer je razlika manja od sume, vidi (967) i (968)], a zbog (986) vrijedi $\zeta < \sigma$, to je i $\zeta < \rho$ odnosno, $\rho - \zeta > 0$, tj. uvijek se radi o prigušenju.

Da se bolje vidi, kako je to moguće, da nepomični "val" napona s istom valnom duljinom može imati dva različita vremenska prigušenja, koji odgovaraju faktorima $e^{-(\rho+\zeta)t}$ i $e^{-(\rho-\zeta)t}$, računat ćemo pripadnu struju. Pretpostavimo dakle za napon $u(x,t)$ rješenje

$$u(x,t) = e^{-(\rho+\zeta)t}e^{j\alpha x}, \tag{987}$$

gdje su ρ, ζ, α podvrgnuti jednadžbama (967), (986) s vrijednošću za σ prema (968). Uvrstimo to rješenje u telegrafsku jednadžbu 1. reda (835). Izlazi lako

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu - (\rho+\zeta)Cu = [G - (\rho+\zeta)C]u. \tag{988}$$

Iz toga je

$$i(x,t) = [(\rho+\zeta)C - G]\int u dx + f(t) = \frac{(\rho+\zeta)C - G}{j\alpha}u + f(t). \tag{989}$$

Uvrštenje toga izraza kao i izraza (987) u telegrafsku jednadžbu jednadžbu 1. reda (830) daje dalje

$$-j\alpha u = R\left[\frac{(\rho+\zeta)C-G}{j\alpha}u + f(t)\right] + L\left[-(\rho+\zeta)\frac{(\rho+\zeta)C-G}{j\alpha}u + f'(t)\right]. \tag{990}$$

No nije teško provjeriti, da je

$$-j\alpha = R\frac{(\rho+\zeta)C-G}{j\alpha} - L(\rho+\zeta)\frac{(\rho+\zeta)C-G}{j\alpha}. \tag{991}$$

Zaista množenjem sa $j\alpha$ izlazi

$$\alpha^2 = [(\rho+\zeta)C - G][R - L(\rho+\zeta)] = -LC\zeta^2 + \zeta\left[RC + GL - 2LC\rho\right] -$$

$$-LC\rho^2 + (RC+GL)\rho - GR. \tag{992}$$

Zbog (986) i (969) vrijedi

$$\alpha^2 = \frac{1}{w^2}(\sigma^2 - \zeta^2) = LC\sigma^2 - LC\zeta^2, \tag{993}$$

tako da (992) prelazi u

$$-LC\zeta^2 = -LC\zeta^2 + (RC + GL - 2LC\rho)\zeta - LC\rho^2 + (RC+GL)\rho - GR - LC\sigma^2. \tag{994}$$

S vrijednostima (967) i (968) za ρ i σ ovo je zaista ispunjeno za svako ζ.

Prema tome jednadžba (990) daje

$$0 = Rf(t) + Lf'(t), \tag{995}$$

što bi značilo

$$f(t) = ke^{-\frac{R}{L}t}. \tag{996}$$

No ovdje konstantu k možemo uzeti jednaku nuli, jer sumand $f(t)$ za struju znači dodatnu struju, koja je nezavisna od x i jenjava vremenski, pa je podržavana upravo od onoga u vodiče induciranog napona, što ga daje smanjivanje njezinog magnetskog polja. Ne treba dakle nikakvog napona između vodiča za tu struju, pa možemo za naš slučaj uzeti, da takve dodatne struje nema.

Time je rješenje za struju $i(x,t)$ dano sa

$$i(x,t) = \frac{(\rho+\zeta)C - G}{j\alpha} e^{-(\rho+\zeta)t} e^{j\alpha x}. \tag{997}$$

Uzmimo sada realne dijelove od (987) i (997) kao fizikalno moguća rješenja. Izlazi

$$u(x,t) = e^{-(\rho+\zeta)t} \cos \alpha x \tag{998}$$

$$i(x,t) = \frac{(\rho+\zeta)C - G}{\alpha} e^{-(\rho+\zeta)t} \sin \alpha x. \tag{999}$$

Vidimo, da je sinuslinija za struju prostorno pomaknuta prema liniji napona na desno za četvrt perioda.

Ako pođemo od slabije prigušenog rješenja za napon

$$u_1(x,t) = e^{-(\rho-\zeta)t} \cos \alpha x, \tag{1000}$$

izlazi za struju analogno

$$i_1(x,t) = \frac{(\rho-\zeta)C - G}{\alpha} e^{-(\rho-\zeta)t} \sin \alpha x. \tag{1001}$$

U trenutku $t = 0$ imamo u oba slučaju istu razdiobu napona

$$u(x,0) = \cos \alpha x. \tag{1002}$$

No struje se razlikuju i to za

$$i(x,0) - i_1(x,0) = \frac{2\zeta C}{\alpha} \sin \alpha x. \tag{1003}$$

Vidimo, da u prvom slučaju, dakle kod jačeg prigušenja, imamo dodatnu struju (1003). Lako uviđamo, da ta struja pomaže, da se uzduž vodiča izjednače statički naboji i time brže smanjuje napon voda. Zaista, npr. kod $x = \frac{\pi}{2\alpha}$ napon je jednak nuli, a lijevo od toga je pozitivan (naboj + na vodiču jedan), a desno negativan (naboj minus na vodiču jedan). Struja (1003) je na tom mjestu pozitivna, dakle transportira pozitivni naboj s lijeva na denso i prema tome pridonosi izjednačenju naboja na vodičima (koje se vrši dakako i kroz izolator). Time postaje razumljivija mogućnost dvaju riješenja za napon u obliku nepomičnih sinusnih valova iste valne duljine, a različitog vremenskog prigušenja.

Vratimo se sada na valove prema (982), koje pišemo u kompleksnom obliku pomoću eksponencijalne funkcije, pa razmatramo dakle oba tipa:

$$Ae^{-\rho t}e^{j(\alpha x-\omega t)} \tag{1004}$$

i

$$Ae^{-\rho t}e^{j(\alpha x+\omega t)}. \tag{1005}$$

Pokušat ćemo, da iz njih sagradimo željeno rješenje telegrafske jedandžbe s početnim uvjetima (976), (977). Postavljamo

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\psi_1(\alpha)e^{-\rho t}e^{j(\alpha x-\omega t)}+\psi_2(\alpha)e^{-\rho t}e^{j(\alpha x+\omega t)}\right]d\alpha \tag{1006}$$

pri čemu je dakako ω izraz (985), dakle ovisan o varijabli integracije α. Ovakva funkcija svakako predstavlja rješenje telegrafske jednadžbe (ukoliko se deriviranje po x i t može vršiti pod znakom integracije), jer je to "linearna kombinacija" rješenja te jednadžbe, dobivena integracijom po α.

Dobivamo dalje

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\psi_1(\alpha)(-\rho-j\omega)e^{-\rho t}e^{j(\alpha x-\omega t)}+$$

$$+\psi_2(\alpha)(-\rho+j\omega)e^{-\rho t}e^{j(\alpha x+\omega t)}]d\alpha. \tag{1007}$$

Pokušajmo sada zadovoljiti početne uvjete stavivši $t=0$. Izlazi

$$u_0(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\psi_1(\alpha)+\psi_2(\alpha)]e^{j\alpha x}d\alpha \tag{1008}$$

ili, ako uvedemo novu varijablu integracije

$$\xi=\frac{\alpha}{2\pi},\ d\alpha=2\pi d\xi, \tag{1009}$$

$$u_0(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}2\pi[\psi_1(2\pi\xi)+\psi_2(2\pi\xi)]e^{2\pi j\xi x}d\xi. \tag{1010}$$

Isto tako je

$$u_{t0}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\psi_1(\alpha)(-\rho-j\omega)+\psi_2(\alpha)(-\rho+j\omega)]e^{j\alpha x}d\alpha \tag{1011}$$

ili sa (1009),

$$u_{t0}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2\pi[\psi_1(2\pi\xi)(-\rho - j\omega) + \psi_2(2\pi\xi)(-\rho + j\omega)]e^{2\pi j\xi x} d\xi, \tag{1012}$$

gdje je sada prema (985) i (1009)

$$\omega = 2\pi\xi\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{4\pi^2\xi^2}}. \tag{1013}$$

Usporedimo li (1010) i (1012) sa (978) i (979), vidimo, da je sada

$$\varphi_1(\xi) = 2\pi[\psi_1(2\pi\xi) + \psi_2(2\pi\xi)] \tag{1014}$$

i

$$\varphi_2(\xi) = 2\pi[\psi_1(2\pi\xi)(-\rho - j\omega) + \psi_2(2\pi\xi)(-\rho + j\omega)]. \tag{1015}$$

Iz tih jednadžbi izlazi za funkcije $\psi_1(2\pi\xi)$ i $\psi_2(2\pi\xi)$

$$\psi_1(2\pi\xi) = \frac{1}{4\pi\omega}[(-\rho + j\omega)\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)], \tag{1016}$$

$$\psi_2(2\pi\xi) = -\frac{1}{4\pi\omega}[(-\rho + j\omega)\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)], \tag{1017}$$

No funkcije $\varphi_1(\xi)$ i $\varphi_2(\xi)$ odredive su prema (980) i (981) iz početnih uvjeta, pa su time dobivene u funkcije ψ_1 i ψ_2, koje daju rješenje $u(x,t)$ u obliku integrala (1006). Zaista se dakle bilo koje rješenje može sagraditi iz takvog tipa valova.

Vidi se, da rješenje predstavlja superpoziciju valova različite frekvencije. No brzina širenja tih pojedinih valova različita je i približava se vrijednosti $w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, kada frekvencija raste prema $\pm\infty$. U drugu ruku, ako rješenje $u(x,t)$ ima na nekom mjestu diskontinuitet u obliku skoka, taj se diskontinuitet pomiče upravo tom brzinom w. Ta činjenica nas navodi na pomisao, da postojanje diskontinuiteta mora pojačati dotičnu funkciju spektra, naime $\varphi_1(\alpha)$, u području vrlo visokih frekvencija, dakle za veliko α (jer α zajedno sa ω raste u neizmjernost). Ako se diskontinuitet širi na lijevo, onda će to biti $\varphi_2(\alpha)$, jer dotični valovi imaju isti smjer širenja. Vraćajući se na obični Fourierov integral (978) očekivat ćemo, da će diskontinuitet funkcije $u_0(x)$ uzrokovati pojačanje visokofrekventnog dijela spektralne funkcije $\varphi_1(\xi)$. Ta funkcija svakako teži prema nuli za $\xi \to \pm\infty$. No u slučaju diskontinuiteta funkcije $u_0(x)$ morat će $\varphi_1(\xi)$ **slabije** težiti k nuli za $\xi \to \pm\infty$ nego, kada toga diskontinuiteta nema. Može se dokazati, da u slučaju postojanja diskontinuiteta za funkciju $u_0(x)$, funkcija $\varphi_1(\xi)$ teži k nuli samo kao $\frac{1}{\xi}$. Ako $u_0(x)$ nema diskontinuiteta, $\varphi_1(\xi)$ teži k nuli barem kao $\frac{1}{\xi^2}$ i to ne jače ako prva derivacija $u_0'(x)$ ima diskontinuitet, inače barem kao $\frac{1}{\xi^3}$ itd. Kada se diskontinuitet javlja tek kod n-te derivacije funkcije

$u_0(x)$, funkcija $\varphi_1(\xi)$ teži k nuli kao $\frac{1}{\xi^{n+1}}$. Vidi se, što je funkcija $u_0(x)$ "glađa", to jače je prigušen visokofrekventni dio njezina spektra[17]

Razmotrit ćemo sada još strujanje energije oko vodova, ograničavajući se na slučaj $R = 0$, gdje znamo, da je strujanje paralelno s vodičima.

Najprije nekoliko riječi o brzini strujanja elektromagnetske energije, bez obzira na vodove.

Brzina strujanja bit će jednaka iznosu Poyntingova vektora podijeljenom s gustoćom energije. Zaista, iznos Poyntingova vektora daje količinu energije u jedinici vremena, koja prolazi kroz jedinicu površine okomite na smjer strujanja. No tu veličinu dobivamo, ako gustoću energije pomnožimo s brzinom strujanja. Ta brzina je dakle

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{F} \times \vec{H}}{\frac{1}{2}(\varepsilon F^2 + \mu H^2)}. \tag{1018}$$

Jasno je najprije, da će uz zadani iznos $\vec{F}$ i $\vec{H}$ ta brzina biti najveća, kada $\vec{F}$ i $\vec{H}$ stoje međusobno okomito, jer onda vektorski produkt u brojniku ima svoj najveći iznos, dok se nazivnik ne mijenja. Kod naših rješenja za elektromagnetsko polje oko voda $\vec{F}$ i $\vec{H}$ su međusobno okomiti, a isto tako je to vrijedilo i za polje zračenja za dipol u valnoj zoni. Pitamo, kolika može biti najveća brzina strujanja energije, s obzirom na međusobni omjer iznosa F i H, koji može biti različit. U tu svrhu izvodimo jednostavnu nejednadžbu. Ako su ξ i ν dva realna broja, onda je

$$(\xi - \nu)^2 \geq 0 \tag{1019}$$

gdje znak jednakosti vrijedi samo za $\xi = \nu$. Dalje je poslije kvadriranja

$$\xi^2 + \nu^2 - 2\xi\nu \geq 0 \text{ ili } \xi^2 + \nu^2 \geq 2\xi\nu. \tag{1020}$$

Dijelimo li s pozitivnim brojem $\xi^2 + \nu^2$ (pretpostavljajući, da ξ i ν nisu oba jednaka nuli), izlazi

$$\frac{2\xi\nu}{\xi^2 + \nu^2} \leq 1, \tag{1021}$$

gdje znak jednakosti vrijedi za $\xi = \nu$. Označimo sada

$$\xi = \sqrt{\varepsilon} F, \tag{1022}$$

$$\nu = \sqrt{\mu} H. \tag{1023}$$

Onda je

$$\frac{2\xi\nu}{\xi^2 + \nu^2} = \frac{2\sqrt{\varepsilon\mu} FH}{\varepsilon F^2 + \mu H^2} = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{FH}{\frac{1}{2}(\varepsilon F^2 + \mu H^2)} = \sqrt{\varepsilon\mu} v_e \leq 1 \tag{1024}$$

[17] To pitanje je potpuno razmotreno u raspravi: D. Blanuša, Upliv diskontinuiteta neke funkcije i njenih derivacija na njezin Fourierov spektar, Rad Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti **274**(1942), 273–285.

ili

$$v_e \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{1025}$$

gdje znak jednakosti vrijedi onda, ako je

$$\sqrt{\varepsilon}F = \sqrt{\mu}H. \tag{1026}$$

Vidimo, da je najveća moguća brzina $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, što je u vakuumu brzina svjetlosti c (a u nekom mediju brzina svjetlosti u dotičnom mediju). Relacija (1026) bila je ispunjena u valnoj zoni dipola, pa stoga tamo strujanje energije odgovara brzini svjetlosti.

Prijeđimo sada na određivanje brzine strujanje energije u mediju oko voda za $R = 0$.

Ponovimo radi preglednosti formule (747), (748), (771), (760), (785), (789), (813):

$$\vec{F} = \frac{\partial V}{\partial x} \operatorname{grad} U, \tag{1027}$$

$$\vec{H} = -\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V\right)(\vec{i} \times \operatorname{grad} U), \tag{1028}$$

$$i = -\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V\right)\oint \operatorname{grad} U d\vec{n}, \tag{1029}$$

$$u = -\frac{\partial V}{\partial x}(U_1 - U_2), \tag{1030}$$

$$G = -\varkappa\frac{\oint \operatorname{grad} U d\vec{n}}{U_1 - U_2}, \tag{1031}$$

$$C = -\varepsilon\frac{\oint \operatorname{grad} U d\vec{n}}{U_1 - U_2}, \tag{1032}$$

$$L = -\mu\frac{U_1 - U_2}{\oint \operatorname{grad} U d\vec{n}}. \tag{1033}$$

Funkciju $U(y, z)$ možemo pomnožiti s nekom konstantom, ako istodobno funkciju $V(x, t)$ pomnožimo s recipročnom vrijednošću te konstante. Stoga možemo uzeti, da je

$$U_1 - U_2 = 1, \tag{1034}$$

čime se nešto pojednostavljuje pisanje. Računajmo Poyntingov vektor:

$$\vec{S} = \vec{F} \times \vec{H} = -\frac{\partial V}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V\right)(\operatorname{grad} U \times (\vec{i} \times \operatorname{grad} U))$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V\right)(\vec{i}(\operatorname{grad} U)^2 - \operatorname{grad} U(\vec{i}\operatorname{grad} U)). \tag{1035}$$

No $\vec{i}\operatorname{grad} U$ je jednako nuli, jer $\operatorname{grad} U$ leži u ravnini okomitoj na os x, dakle je

$$\vec{S} = \vec{i}\left[-\frac{\partial V}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t} + \varkappa V\right)(\operatorname{grad} U)^2\right] = \vec{i}\lambda i u, \tag{1036}$$

ako pod faktorom λ razumijevamo

$$\lambda = -\frac{(\operatorname{grad} U)^2}{\oint \operatorname{grad} U d\vec{n}}. \tag{1037}$$

To dakle znači, da je iznos Poyntingova vektora proporcionalan sa iu na nekom mjestu x u nekom trenutku t, a faktor je funkcija od y, z. To je i razumljivo, jer je strujanje energije jače u blizini vodiča, gdje su i polja $\vec{F}$ i $\vec{H}$ jača.

Računajmo dalje gustoću energije uzevši u račun, da je

$$(\vec{i} \times \operatorname{grad} U)^2 = (\vec{i} \times \operatorname{grad} U)(\vec{i} \times \operatorname{grad} U)$$

$$= \vec{i}(\operatorname{grad} U \times (\vec{i} \times \operatorname{grad} U)) = (\vec{i}\vec{i})(\operatorname{grad} U)^2 = (\operatorname{grad} U)^2. \tag{1038}$$

Dobivamo

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon F^2 + \mu H^2\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} U)^2\left[\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \varkappa V\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{grad} U)^2\left[\varepsilon u^2 + \mu i^2\frac{1}{(\oint \operatorname{grad} U d\vec{n})^2}\right]. \tag{1039}$$

Vidimo, da gustoća energije u nekoj ravnini okomitoj na vod ovisi o struji i o naponu za dotično x i t i o mjestu (y, z) u toj ravnini.

Konačno za brzinu strujanja izlazi

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{S}}{\frac{1}{2}\left(\varepsilon F^2 + \mu H^2\right)}$$

$$= \vec{i}\frac{-\frac{(\operatorname{grad} U)^2}{\oint \operatorname{grad} U d\vec{n}} i u}{\frac{1}{2}(\operatorname{grad} U)^2\left[\varepsilon u^2 + \mu\frac{i^2}{(\oint \operatorname{grad} U d\vec{n})^2}\right]}$$

$$= \vec{i}\frac{-2iu}{\varepsilon \oint \operatorname{grad} \vec{dn} \cdot u^2 + \frac{\mu}{\oint \operatorname{grad} U\vec{dn}} i^2}$$

$$= \vec{i}\frac{2iu}{Cu^2 + Li^2}. \tag{1040}$$

Ovdje nalazimo zanimljivi rezultat, da je brzina strujanja u nekoj ravnini okomitoj na vodiče zavisna samo od struje i napona za dotično x, t, ali je u cijeloj toj ravnini ista. U blizini vodiča je strujanje jače, jer je gustoća energije veća, ali je brzina strujanja ista. Dalje ta brzina zavisi od konstanata voda C i L, ali ne zavisi od G. (Dakako, razdioba struje i napona zavise od G). Maksimalna brzina strujanja nastaje, ako je

$$\sqrt{C}u = \sqrt{L}i, \tag{1041}$$

pa onda dobivamo

$$v_e = \frac{2i \cdot i\sqrt{\frac{L}{C}}}{C \cdot \frac{L}{C}i^2 + Li^2} = \frac{2i^2\sqrt{\frac{L}{C}}}{2Li^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{1042}$$

tj. granična brzina valova, koja se u vakuumu podudara s brzinom svjetlosti c.

Jedinice

Upotrebljavan je sustav jedinica baziran na četvorci osnovnih jedinica volt-amper-sekunda-metar, a iznimno, po potrebi, sustav baziran na četvorci metar-kilogram(masa)-sekunda-amper (Giorgi). Jedinice pojedinih elektromagnetskih i mehaničkih jedinica iste su u oba sustava, samo im je fizikalna dimenzija različita.

Prema tome ćemo upotrebljavati kao jedinice:

za jakost električkog polja	$\vec{F}$	$\frac{V}{m}$
za električni pomak	$\vec{D}$	$\frac{As}{m^2}$
za jakost magnetskog polja	$\vec{H}$	$\frac{A}{m}$
za magnetsku indukciju	$\vec{B}$	$\frac{Vs}{m^2}$ (tesla T)
za električni naboj	Q	As (kulon C)
za gustoću električnog naboja	ρ	$\frac{As}{m^3}$ (kulon po kubnom metru)
za gustoću struje	$\vec{G}$	$\frac{A}{m^2}$
za električku vodljivost	$\varkappa$	$\frac{A}{Vm}$ (simens po metru)

Za permeabilnost vakuuma μ_0 izlazi $4\pi 10^{-7}\frac{Vs}{Am}$, a za dielektričnu konstantu $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0}$ (c brzina svjetlosti $2.988 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$) izlazi $8.854 \cdot 10^{-12}\frac{As}{Vm}$.

Za ostale jedinice vidi primjerice J. Lončar, *Osnovi elektrotehnike* 1956., str. 14–15.

Pregled formula

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – jedinični vektori u smjeru koordinatnih osi;

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\ \ a_x, a_y, a_z$ – skalarne komponente vektora $\vec{a}$;

$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ – apsolutna vrijednost vektora $\vec{a}$;

$\vec{a}_0 = \dfrac{1}{a}\vec{a}$ – jedinični vektor vektora $\vec{a}$;

$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$ – zbroj i razlika vektora;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$ – skalarni produkt vektora;

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$ – vektorski produkt;

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ – mješoviti produkt;

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$ – Lagrangeov identitet;

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$\vec{a}_0 = \dfrac{1}{a}\vec{a} = \dfrac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{a}$ – jedinični vektor vektora $\vec{a}$;

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – radijvektor;

$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$ – vektorska funkcija jedne varijable;

$\dfrac{d\vec{a}(t)}{dt} = \dfrac{da_x(t)}{dt}\vec{i} + \dfrac{da_y(t)}{dt}\vec{j} + \dfrac{da_z(t)}{dt}\vec{k}$ – derivacija;

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d[\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})]}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot \left(\frac{d\vec{b}}{dt} \times \vec{c}\right) + \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \frac{d\vec{c}}{dt}\right)$$

$\displaystyle\int \vec{a}(t)dt = \left(\int a_x(t)dt\right)\vec{i} + \left(\int a_y(t)dt\right)\vec{j} + \left(\int a_z(t)dt\right)\vec{k}$ – integral;

$\Psi = \Psi(x, y, z)$ – skalarno polje;

$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$ – vektorsko polje;

$\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ – Hamiltonov ili nabla (atled) operator;

$\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – Laplaceov ili delta operator;

$\Box = \Delta - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ – d'Alembertov operator;

$\mathrm{grad}\,\Psi = \nabla\Psi = \dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial\Psi}{\partial z}\vec{k}$ – gradijent skalarnog polja;

$\mathrm{div}\,\vec{a} = \nabla\cdot\vec{a} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}$ – divergencija vektorskog polja;

$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \nabla\times\vec{a} = \left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$ – rotor vektorskog polja;

$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\Psi = \nabla\times\nabla\Psi = \vec{0}$

$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} = \nabla(\nabla\times\vec{a}) = 0$

$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} = \nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{a} - \Delta\vec{a}$

$\mathrm{div}\,(\Psi\vec{a}) = \nabla\cdot(\Psi\vec{a}) + \Psi(\nabla\cdot\vec{a}) = \vec{a}\cdot\mathrm{grad}\,\Psi + \Psi\,\mathrm{div}\,\vec{a}$

$\mathrm{rot}\,(\Psi\vec{a}) = \nabla\times(\Psi\vec{a}) = \nabla\Psi\times\vec{a} + \Psi\nabla\times\vec{a} = \mathrm{grad}\,\Psi\times\vec{a} + \Psi\mathrm{rot}\,\vec{a}$

$\vec{v}_0$ – jedinični vektor;

$\vec{v}_0\cdot\nabla = \dfrac{\eth}{\partial v_0} = v_{0x}\dfrac{\partial}{\partial x} + v_{0y}\dfrac{\partial}{\partial y} + v_{0z}\dfrac{\partial}{\partial z}$ – operator usmjerene derivacije;

$\dfrac{\eth\Psi}{\partial v} = (\vec{v}_0\cdot\nabla)\Psi = v_{0x}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} + v_{0y}\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} + v_{0z}\dfrac{\partial\Psi}{\partial z}$ – usmjerena derivacija skalarnog polja;

$\dfrac{\eth\vec{a}}{\partial v} = (\vec{v}_0\cdot\nabla)\vec{a} = (\vec{v}_0\cdot\nabla)a_x\vec{i} + (\vec{v}_0\cdot\nabla)a_y\vec{j} + (\vec{v}_0\cdot\nabla)a_z\vec{k}$ – usmjerena derivacija vektorskog polja;

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= \nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} + \vec{a}\times(\nabla\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a})\\ &= a\dfrac{\eth\vec{b}}{\partial a} + b\dfrac{\eth\vec{a}}{\partial b} + \vec{a}\times\mathrm{rot}\,\vec{b} + \vec{b}\times\mathrm{rot}\,\vec{a}\end{aligned}$$

$\mathrm{div}\,(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a} - \vec{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{b}$

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,(\vec{a}\times\vec{b}) &= \nabla\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}(\nabla\cdot\vec{b}) + \vec{b}(\nabla\cdot\vec{a}) + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}\\ &= \vec{a}\cdot\mathrm{div}\,\vec{b} + \vec{b}\cdot\mathrm{div}\,\vec{a} + b\dfrac{\eth\vec{a}}{\partial b} - a\dfrac{\eth\vec{b}}{\partial a}\end{aligned}$$

$\mathrm{div}\,\vec{r} = \nabla\cdot\vec{r} = 3$ – divergencija radijvektora;

$\mathrm{rot}\,\vec{r} = \nabla\times\vec{r} = \vec{0}$ – rotor radijvektora;

$\mathrm{grad}\,f(r) = \nabla f(r) = \dfrac{df(r)}{dr}\vec{r}_0$

$\dfrac{\eth f(r)}{\partial v} = (\vec{v}_0\cdot\nabla)f(r) = (\vec{v}_0\cdot\vec{r}_0)\dfrac{df(r)}{dr}$

$\mathrm{div}\,(\vec{r}_0 f(r)) = \nabla\cdot(\vec{r}_0 f(r)) = \dfrac{2}{r}f(r) + \dfrac{df(r)}{dr}$

$$\operatorname{rot}(\vec{r}_0 f(r)) = \nabla \times (\vec{r}_0 f(r)) = \vec{0}$$

$$(\vec{a} \cdot \nabla)(\vec{r}_0 f(r)) = \frac{f(r)}{r}(\vec{a} - \vec{r}_0(\vec{a} \cdot \vec{r}_0)) + \vec{r}_0(\vec{a} \cdot \vec{r}_0)\frac{df(r)}{dr}$$

$$\operatorname{grad}(\vec{r} \cdot \vec{a}) = \vec{a} + (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{a} + \vec{r} \times (\nabla \times \vec{a}) = \vec{a} + r\frac{\partial \vec{a}}{\partial r} + \vec{r} \times \operatorname{rot}\vec{a}$$

$$\iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS \text{ – tok vektorskog polja;}$$

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{a} dV = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS \text{ – Gaussov teorem divergencije;}$$

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{a} \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{s} \text{ – Stokesov teorem;}$$

$$\iiint_V \operatorname{rot}\vec{a} dV = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS$$

$$\iiint_V \operatorname{grad}\Psi dV = \iint_S \Psi d\vec{S} = \iint_S \Psi \vec{n} dS$$

$$\iiint_V (\Phi \Delta \Psi + \operatorname{grad}\Phi \cdot \operatorname{grad}\Psi) dV = \iint_S \Phi \operatorname{grad}\Psi \cdot d\vec{S} \text{ – Greenov identitet;}$$

$$\iiint_V (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) dV = \iint_S (\Phi \operatorname{grad}\Psi - \Psi \operatorname{grad}\Phi) \cdot d\vec{S} \text{ – Greenov teorem;}$$

Indeks